Seção 27 – Função Gama

A expressão

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \tag{1}$$

está definida apenas para valores inteiros positivos de n. Uma primeira extensão é feita dizendo que $0! = 1$. Mas queremos estender a noção de fatorial inclusive para valores não inteiros de n. Mais precisamente, queremos definir, de maneira natural, uma função $g(x)$ satisfazendo $g(n) = n!$. É claro que seria muito fácil definir uma tal $g(x)$ arbitrariamente, só que, para que a definição tenha alguma utilidade, temos que descobrir uma maneira natural de fazer isto.

Revisão de duas fórmulas do Cálculo.

1– $\displaystyle \int_c^d \int_a^b f(x)\, g(y)\, dx\, dy = \left(\int_a^b f(x)\, dx \right) \left(\int_c^d g(x)\, dy \right)$

2– Fórmula de Leibniz: $\displaystyle \frac{d}{dx} \int_a^b F(x,y)\, dy = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\, dy$

Note que

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{i=1}^{n} F(x, y_i)\, \Delta_i y \right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y_i)\, \Delta_i y \ ,$$

pois a derivada de uma soma finita é a soma das derivadas. Passando ao limite quando os $\Delta_i y \longrightarrow 0$, obtém-se a fórmula de Leibniz.

Por exemplo, dada a função de duas variáveis $F(x,y) = x^2\, y$, definimos uma nova função, de uma variável, por

$$f(x) = \int_0^1 F(x,y)\, dy = \int_0^1 x^2\, y\, dy = x^2 \int_0^1 dy = \frac{x^2}{2} \ .$$

É fácil comprovar que $f'(x) = 1$ e que $\displaystyle \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\, dy = \int_0^1 2\, x\, y\, dy = x\, .$

Ponto de partida para difinir a Função Gama.

1– Observemos que $\displaystyle \int_0^{+\infty} e^{-r}\, dr = -e^{-r}\Big|_0^{+\infty} = 1 \ .$

2– Fazendo a mudança de variável $r = s\,t$, $dr = t\, ds$, ($t > 0$ fixo), obtemos

$$\int_0^{+\infty} e^{-s\,t}\, ds = \frac{1}{t} \ , \qquad \text{para todo } \ t > 0 \ .$$

3– Derivando em relação a t e utilizando a fórmula de Leibniz temos

$$\int_0^{+\infty} s\, e^{-s\,t}\, ds = \frac{1}{t^2} \ , \qquad \text{para todo } \ t > 0 \ .$$

4– Derivando novamente em relação a t, obtém-se

$$\int_0^{+\infty} s^2\, e^{-s\,t}\, ds = \frac{1\cdot 2}{t^3}\ , \qquad \text{para todo} \ \ t>0\ .$$

5– Derivando sucessivas vezes em relação a t, encontramos

$$\int_0^{+\infty} s^n\, e^{-s\,t}\, ds = \frac{n!}{t^{n+1}}\ , \qquad \text{para todo} \ \ t>0\ .$$

6– Finalmente, fazendo $t=1$, obtém-se

$$\int_0^{+\infty} s^n\, e^{-s}\, ds = n!\ . \tag{2}$$

CONCLUSÃO: Encontramos uma expressão alternativa para o fatorial de n. Em lugar do produto (1) de n fatores, que só faz sentido para n inteiro positivo, o fatorial $n!$ pode ser expresso através da integral (2), que faz sentido inclusive para valores não inteiros da variável. Em outras palavras, a função

$$g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-s}\, s^x\, ds\ ,$$

que está definida inclusive para valores não inteiros de x, é tal que $g(n)=n!$, para todo n inteiro positivo. Era exatamente isto o que estávamos procurando. A tradição, no entanto, consagrou uma definição levemente diferente desta.

Definição: A Função Gama (de Euler) é definida pela integral

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt\ . \tag{3}$$

OBS: Aproveitando o símbolo $g(x)$ introduzido provisoriamente acima, temos $\Gamma(x) = g(x-1)$. Logo

$$\Gamma(n) = (n-1)!\ , \qquad \text{para todo } n \text{ inteiro positivo.} \tag{4}$$

Domínio da Função Gama. A integral (3) converge para todo $x>0$. Portanto temos

$$\Gamma : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}\ .$$

Para ver isto escrevemos

$$\Gamma(x) = \int_0^{1} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt + \int_1^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt\ .$$

A segunda integral converge qualquer que seja x, pois $e^{-t} \longrightarrow 0$ tão rápido quando $t \longrightarrow \infty$ que, qualquer eventual crescimento de t^{x-1} é neutralizado. Já na primeira integral, para $0 \le t \le 1$, a função e^{-t} fica sob controle, $0 < e^{-t} \le 1$, e a convergência ou não da integral só depende do fator t^{x-1}. Basta então observar que

(a) Para $x > 0$, temos $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,dt = \frac{t^x}{x}\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{x} < \infty$;

(b) Para $x = 0$, temos $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,dt = \int_0^1 t^{-1}\,dt = \ln t\Big|_0^1 = \infty$;

(c) Para $x < 0$, temos $x - 1 < -1$, $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,dt \geq \int_0^1 t^{-1}\,dt = \infty$.

Segue daí que a integral que define a Função Gama converge para $x > 0$ e diverge para $x \leq 0$, isto é, o domínio da função por ela definida é realmente $(0, +\infty)$. Mais adiante o domínio da Função Gama vai ser estendido.

Proposição: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Demonstração:

Segue da definição que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{-\frac{1}{2}}\, dt\ .$$

Fazendo a mudança de variável $t = r^2$, $dt = 2\,r\,dr$, temos

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{-\frac{1}{2}}\, dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-r^2}\, dr\ .$$

Cálculo da integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$:

Até aqui, para todas (ou praticamente todas) as integrais definidas que precisamos calcular, seguimos a sistemática de primeiro encontrar uma primitiva e depois avaliar a diferença entre os valores da primitiva nas duas extremidades do intervalo de integração. No presente caso este caminho não será seguido. Sabemos, desde o Cálculo 1, que a função e^{-x^2}, como toda função contínua, possui uma primitiva, mas que esta primitiva não pode ser expressa em termos das funções elementares. A alternativa é usar um "truque" descoberto por Liouville. Chamamos de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ a integral que queremos calcular. Temos

$$\begin{aligned} I^2 = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\right)\cdot\left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy\right) &= \int_0^{+\infty}\!\!\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, e^{-y^2}\, dx\, dy \\ &= \int_0^{+\infty}\!\!\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy\ . \end{aligned}$$

Temos assim I^2 expressa como uma integral dupla em que a região de integração é o 1º quadrante. Calculando esta integral dupla em coordenadas polares,

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\!\!\int_0^{+\infty} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}\, r\, dr = \frac{\pi}{2}\,\frac{-e^{-r^2}}{2}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}\ .$$

Logo $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, isto é,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \ .$$

Segue daí que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \ .$$

Propriedade Fundamental: $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

Demonstração:

Pela definição, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^x\, dt$. Integrando por partes com $u = t^x$ e $dv = e^{-t}\, dt$,

$$\Gamma(x+1) = -e^{-t}\, t^x \Big|_{t=0}^{t=+\infty} + \int_0^{+\infty} x\, t^{x-1}\, e^{-t}\, dt = x\,\Gamma(x) \ .$$

Exemplo. Calcular $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$.

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}$$

Observação: Segue da propriedade fundamental que

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \ .$$

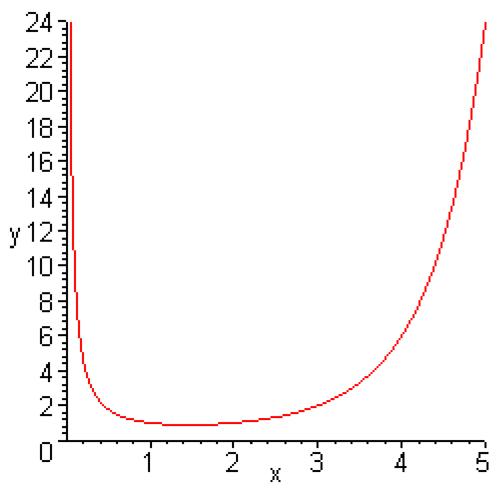
Fazendo $x \longrightarrow 0^+$, temos, então,

$$\Gamma(x) \longrightarrow \frac{\Gamma(1)}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty \ ,$$

isto é,

$$\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x) = +\infty \ .$$

Portanto o gráfico de $\Gamma(x)$ é como na figura abaixo.



Extensão do domínio:

Inicialmente o domnio da Função Gama é o intervalo $(0, +\infty)$, ou seja, o conjunto dos x para os quais a integral que define a Função Gama converge.

A fórmula $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ permite-nos definir $\Gamma(x)$ também para $x \in (-1, 0)$. De fato, se $x \in (-1, 0)$, então $x+1 \in (0,1)$ e, portanto, $\Gamma(x+1)$ está definido. Faz sentido, então, definir

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} .$$

Como $\Gamma(x) > 0$ e $x < 0$ para $x \in (-1, 0)$, vemos que neste trecho

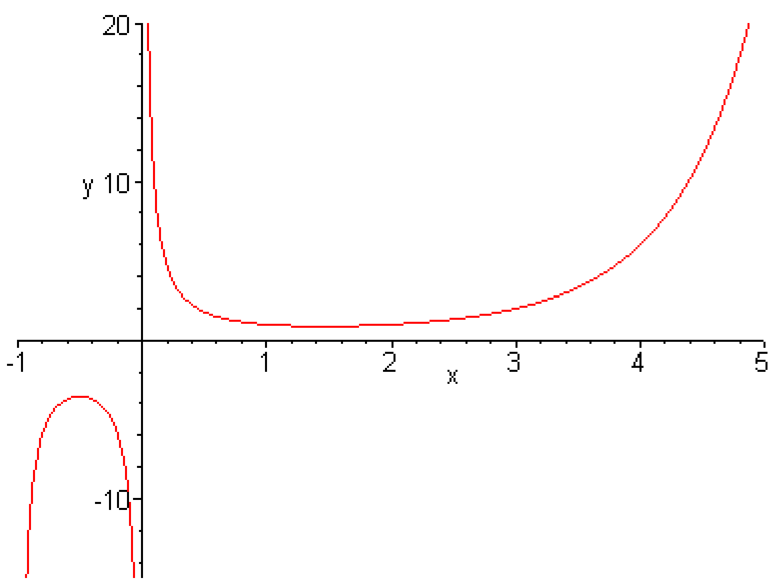
$$\Gamma(x) < 0 , \quad \text{para } x \in (-1,0) ,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \Gamma(x) = \lim_{x\to -1^+} \Gamma(x) = -\infty .$$

Acabamos, então, de estendar a Função Gama para um domínio maior do que ela estava inicialmente definida. Agora temos

$$\Gamma : (-1,0) \cup (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R} ,$$

como mostra a figura abaixo.



Agora que já temos $\Gamma : (-1,0) \cup (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos dar mais um passo e definir $\Gamma(x)$ tambm para $x \in (-2,-1)$.

Dado $x \in (-2,-1)$, temos $x+1 \in (-1,0)$. Portanto $\Gamma(x+1)$ já está definido. Definimos, da mesma forma que acima, $\Gamma(x+1) = \dfrac{\Gamma(x)}{x}$.

Levando em conta os sinais do numerador e denominador, vemos que

$$\Gamma(x) > 0 , \quad \text{para } x \in (-2,-1)$$

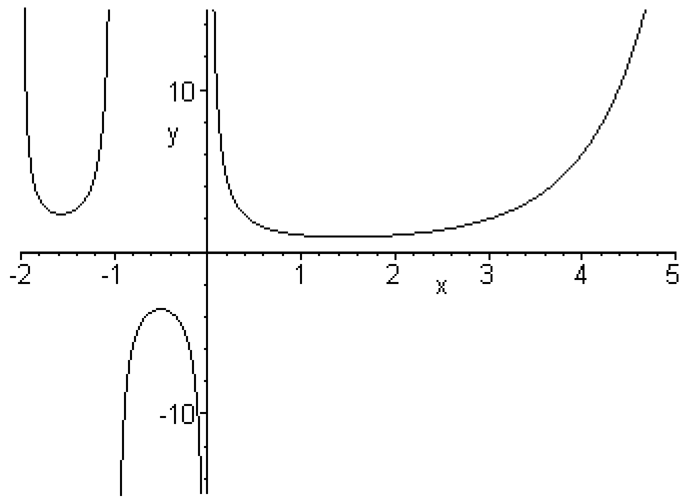
e

$$\lim_{x\to -1^-} \Gamma(x) = \lim_{x\to -2^+} \Gamma(x) = +\infty .$$

O gráfico da extensão

$$\Gamma : (-2,-1) \cup (-1,0) \cup (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

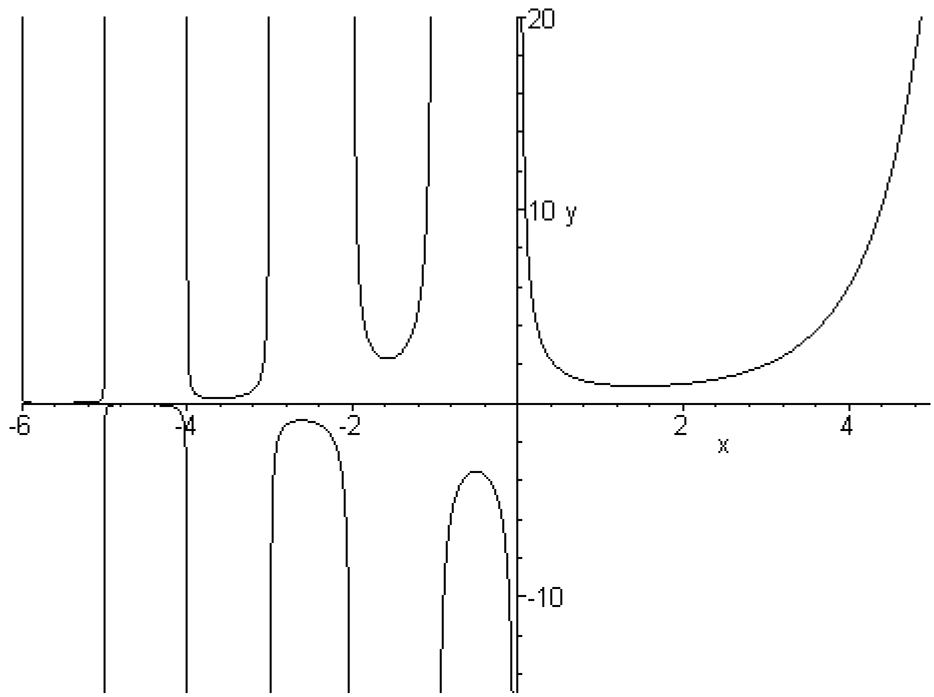
está mostrado abaixo.



Continuando este processo, o domínio da Função Gama passa a ser

$$\mathbb{R} - \{0, -1, -2, -3, \ldots\} \ .$$

Abaixo, mostramos o gráfico de $\Gamma(x)$ com este domínio estendido.



observe, que para $x \to -6$, o gráfico passa tão perto do eixo dos X que, apesar da função tender a infinito, o computador não "enxergou" isto e desenhou como se $\Gamma(x)$ se anulasse em -6.

Obs: A função $\dfrac{1}{\Gamma(x)}$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ e se anula nos pontos

$0, -1, -2, -3, \ldots,$ pois neles $\Gamma(x)$ é infinita. Em outras palavras a singularidade que a função teria nestes pontos pode ser removida pondo o valor da função como sendo 0. O gráfico desta função está mostrado abaixo.