Método de Frobenius – 2º Caso

Vamos passar ao estudo do 2º caso do método de Frobenius, em que a equação indicial tem raiz dupla. Vamos estudar o método já em exemplos particulares.

Exemplo 1. Consideremos a equação diferencial

$$2\,x\big(1+2\,x\big)\,y''+2\,y'-8\,y=0\ .$$

Substiuindo $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$ na equação diferencial, obtém-se

$$\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}2(n+r)a_nx^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}8a_nx^{n+r}=0\ .$$

Fazendo $k=n-1$ no 1º e no 3º somatórios, obtemos

$$\sum_{k=-1}^{\infty}2(k+r+1)(n+r)a_{k+1}x^{k+r}+\sum_{n=0}^{\infty}4(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}$$

$$+\sum_{k=-1}^{\infty}2(k+r+1)a_{k+1}x^{k+r}-\sum_{n=0}^{\infty}8a_nx^{n+r}=0\ .$$

Em seguida, usando n como índice em todos os somatórios, retiramos o 1º termo do 1º e do 3º somatórios e agrupamos os retantes termos em um único somatório, obtendo

$$2\,r^2\,a_0\,x^{r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\Big[2\big(n+r+1\big)^2a_{n+1}+4\Big((n+r)(n+r-1)-2\Big)a_n\Big]x^{n+r}=0\ .$$

Obtemos, daí, a equação indicial

$$2\,r^2=0\ ,$$

que tem raiz dupla

$$r_1=r_2=0$$

e a fórmula de recorrência

$$\big(n+r+1\big)^2a_{n+1}=-2\Big((n+r)(n+r-1)-2\Big)a_n\ ,\quad n=0,1,2,\ldots$$

Pondo $t = n + r$, o coeficiente de a_n se torna

$$-2\Big((n+r)(n+r-1)-2\Big) = -2\Big(t(t-1)-2\Big) = -2(t^2-t-2)$$

Este trinômio do 2º grau tem raízes -1 e 2 e, portanto, se fatora como

$$-(t+1)(t-2)$$

Fazendo a substituição inversa obtemos, finalmente, a fatoração

$$2-(n+r)(n+r-1) = -(n+r+1)(n+r-2) \ .$$

Portanto, nossa fórmula de recorrrência, depois de simplificação, pode ser reescrita como

$$(n+r+1)\,a_{n+1} = -2(n+r-2)\,a_n \ .$$

1ª Solução: Para $r_1 = 0$, a fórmula de recorrência fica

$$(n+1)\,a_{n+1} = -2(n-2)\,a_n \ .$$

Escolhemos

$$a_0 = 1 \ .$$

Aplicando a fórmula de recorrência para $n = 0$, obtemos

$$a_1 = 4 \ .$$

Para $n = 1$, obtemos

$$a_2 = 4 \ .$$

aplicando novamente a recorrência, com $n = 2$, obtemos

$$a_3 = 0 \ .$$

Continuando este raciocínio, obtemos

$$a_n = 0 \ , \qquad \forall\, n \geq 3 \ .$$

Encontramos, assim, a solução

$$y_1(x) = 1 + 4x + 4x^2 \ .$$

2ª Solução: Ao contrário do que ocorria no 1º caso do método de Frobenius, neste caso não temos outra raiz da equação indicial para construir a 2ª solução da mesma maneira que a 1ª foi construída, pois a equação indicial tem uma única raiz. Precisamos, então, desenvolver um método diferente para encontrar uma 2ª solução linearmente independente da 1ª.

Consideremos a função

$$y(x,r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)\, x^{n+r}$$

e seja

$$\mathcal{L}(y) = 2\,x\big(1+2\,x\big)\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial y}{\partial x} - 8\,y$$

o operador diferencial associado a nossa equação diferencial. Aproveitando os cálculos já feitos acima, podemos afirmar que

$$\mathcal{L}\big(y(x,r)\big) =$$

$$= 2\,r^2\,a_0(r)\,x^r + \sum_{n=0}^{\infty}\Big[2\big(n+r+1\big)^2 a_{n+1}(r) + 4\Big(\big(n+r\big)\big(n+r-1\big)-2\Big)a_n(r)\Big]\,x^{n+r}\ .$$

Impondo que

$$2\big(n+r+1\big)^2 a_{n+1}(r) + 4\Big(\big(n+r\big)\big(n+r-1\big)-2\Big)a_n(r) = 0\ , \qquad \forall\, n \geq 0\,,$$

ou ainda, por fatoração,

$$2\big(n+r+1\big)^2 a_{n+1}(r) + 4\big(n+r+1\big)\big(n+r-2\big)a_n(r) = 0\ ,$$

ou seja, impondo a fórmula recorrência

$$\big(n+r+1\big)a_{n+1}(r) + 2\big(n+r-2\big)a_n(r) = 0\ ,$$

teremos

$$\mathcal{L}\big(y(x,r)\big) = 2\,r^2\,a_0(r)\,x^r\ .$$

No 2º caso do método de Frobenius podemos continuar com a escolha

$$a_0(r) = 1\ .$$

Isto nos dá

$$\mathcal{L}\big(y(x,r)\big) = 2\,r^2\,x^r\ .$$

No produto acima o fator r aparece com multiplicidade 2. Segue que também é um fator da derivada em relação a r. De fato,

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big[\mathcal{L}\big(y(x,r)\big)\Big] = 4\,r x^r + 2\,r^2 x^r \ln r$$

e, em conseqüência,

$$\frac{\partial}{\partial r}\mathcal{L}(y)(x,0) = 0\ .$$

O operador diferencial $\mathcal{L}$ envolve derivações em relação a x. Usando o teorema que afirma que a ordem em que são tomadas as derivações parciais não influi no resultado, a ordem em que são aplicados $\mathcal{L}$ e $\dfrac{\partial}{\partial r}$ não importa e temos

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big[\mathcal{L}\big(y(x,r)\big)\Big] = \mathcal{L}\Big(\frac{\partial y}{\partial r}(x,r)\Big) \ .$$

Finalmente, fazendo $r = r_1 = 0$, obtemos

$$\mathcal{L}\Big(\frac{\partial y}{\partial r}(x,0)\Big) = 0 \ ,$$

que nos diz que

$$y_2(x) = \frac{\partial y}{\partial r}(x,r_1) = \frac{\partial y}{\partial r}(x,0)$$

é uma 2ª solução da equação diferencial. Falta ainda obter a expressão da solução y_2 e, em particular, verificar que ela é linearmente independente da 1ª. Efetuando a derivação em relação a r, temos

$$y_2(x) = \frac{\partial y}{\partial r}(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(0)\, x^n \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(0)\, x^n \ .$$

Lembrando que $a_0(r) = 1$, temos

$$a_0(0) = 1 \qquad \text{e} \qquad a_0'(0) = 0 \ .$$

A fórmula de recorrência obtida acima pode ser reescrita como

$$a_{n+1}(r) = -\,\frac{2\big(n+r-2\big)}{n+r+1}\, a_n(r) \ .$$

Para $n = 0$, obtemos

$$a_1(r) = -\frac{2\big(r-2\big)}{r+1} \ .$$

que nos dá

$$a_1(0) = 4 \qquad \text{e} \qquad a_1'(0) = -6 \ .$$

Para $n = 1$, obtemos

$$a_2(r) = \frac{2^2\big(r-2\big)\big(r-1\big)}{\big(r+1\big)\big(r+2\big)} \ ,$$

donde

$$a_2(0) = 4 \ .$$

O cálculo da derivada fica simplificado pelo emprego da derivação logarítmica. Na expressão de $a_2(r)$, tomando módulo e depois logaritmo, temos

$$\ln|a_2(r)| = \ln|r-2| + \ln|r-1| - \ln|r+1| - \ln|r+2| \ .$$

Derivando,

$$\frac{a_2'(r)}{a_2(r)} = \frac{1}{r-2} + \frac{1}{r-1} - \frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2} \ .$$

Finalmente, fazendo $r=0$, obtém-se

$$a_2'(0) = -12 \ .$$

Para $n=2$ na fórmula de recorrência, obtemos

$$a_3(r) = -\frac{2^3(r-2)(r-1)r}{(r+1)(r+2)(r+3)} \ .$$

Segue que

$$a_3(0) = 0 \ .$$

Não calculamos a derivada empregando o logaritmo $\ln|a_3(r)|$, pois este não está definido para $r=0$. O mais simples é usar a própria definição de derivada,

$$a_3'(0) = \lim_{r\to 0} \frac{a_3(r)-a_3(0)}{r-0} = \lim_{r\to 0} \frac{a_3(r)}{r} = \lim_{r\to 0} -\frac{2^3(r-2)(r-1)}{(r+1)(r+2)(r+3)} = -\frac{8}{3} \ .$$

Continuando o processo descrito acima, obtemos

$$a_4(r) = \frac{2^4(r-2)(r-1)r(r+1)}{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)} = \frac{2^4(r-2)(r-1)r}{(r+2)(r+3)(r+4)}$$

e, daí,

$$a_4(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad a_4'(0) = \frac{2^5}{2\cdot 3\cdot 4} \ .$$

Continuando este racioncínio, obtemos

$$a_n(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad a_n'(0) = \frac{(-1)^n\, 2^{n+1}}{(n-2)(n-1)n} \ , \qquad \forall\, n \geq 3 \ .$$

Podemos agora escrever a outra solução de nossa equação diferencial

$$y_2(x) = \left(1+4x+4x^2\right)\ln x - 6x - 12x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^{n+1}}{(n-2)(n-1)n}\, x^n \ ,$$

ou seja,

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x - 6x - 12x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^{n+1}}{(n-2)(n-1)n}\, x^n \ .$$

A solução $y_2(x)$ é, evidentemente, linearmente independente de $y_1(x)$.

Observação: Não foi por acaso que, na expressão de $y_2(x)$, a soma que multiplica $\ln x$ é igual a $y_1(x)$. Isto sempre acontece no 2º caso do método de Frobenius. De fato, as funções $a_n(r)$ satisfazem $a_n(0) = a_n$, os coeficietes da 1ª solução. É fácil ver isto, pois fazendo $r = 0$ na fórmula de recorrência

$$\big(n + r + 1\big)a_{n+1}(r) + 2\big(n + r - 2\big)a_n(r) = 0 \ ,$$

obtém-se

$$\big(n + 1\big)a_{n+1}(0) + 2\big(n - 2\big)a_n(0) = 0 \ .$$

Comparando com a fórmula de recorrência

$$\big(n + 1\big)a_{n+1} + 2\big(n - 2\big)a_n = 0 \ ,$$

para os coeficientes de $y_1(x)$, vemos que os $a_n(0)$ e os a_n satisfazem à mesma fórmula de recorrência. Além disto, $a_0(0) = a_0$ e $a_1(0) = a_1$. Logo as duas seqüências são iguais.