Método de Frobenius – 3º Caso

Vamos passar ao estudo do 3º caso do método de Frobenius, em que a equação indicial tem raízes distintas que diferem por um inteiro. Como antes, estudaremos o método a partir de exemplos particulares.

Exemplo 1. Consideremos a equação diferencial

$$x^2y'' + 4x\,y' + x\,y = 0 \ . \qquad (1)$$

Substituindo $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ na equação diferencial (1), obtém-se

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 4(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0 \ .$$

Fazendo $k = n+1$ no último somatório da linha acima, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 4(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^{k+r} = 0 \ .$$

Separando o primeiro termo nos dois primeiros somatórios, usando n em lugar de k no último somatório e agrupando os termos semelhantes, temos

$$\big[r(r-1)+4r\big]a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\big[(n+r)(n+r-1)+4(n+r)\big]a_n + a_{n-1}\Big)x^{n+r} = 0 \ ,$$

ou, fatorando os coeficientes,

$$r(r+3)a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\big[(n+r)(n+r+3)a_n + a_{n-1}\big]x^{n+r} = 0 \ .$$

Igualando a zero o coeficiente de cada potência de x, obtemos

Equação indicial: $r(r+3) = 0$;

Fórmula de recorrência: $(n+r)(n+r+3)a_n + a_{n-1} = 0$.

As raízes da equação indicial são $r_1 = 0$ e $r_2 = -3$. Estamos no 3º caso do método de Frobenius, em que as raízes da equação indicial são diferentes e diferem por um inteiro. Chamaremos sempre de r_1 a maior das raízes da equação indicial, pois com ela sempre conseguiremos construir uma solução da equação diferencial pelo método mais simples, o mesmo empregado no 1º caso.

1ª Solução: Para $r_1 = 0$, a fórmula de recorrência fica

$$n(n+3)a_n + a_{n-1} = 0 \ .$$

Escolhendo $a_0 = 1$ e aplicando repetidas vezes a fórmula de recorrência, obtemos

$$a_1 = -\frac{1}{1\cdot 4}\ , \qquad a_2 = \frac{1}{(1\cdot 2)\cdot(4\cdot 5)}\ , \qquad a_3 = -\frac{1}{(1\cdot 2\cdot 3)\cdot(4\cdot 5\cdot 6)}\ , \ \ldots$$

Para obter uma expressão mais simples, multiplicamos o numerador e o denominador por 6, obtendo

$$a_n = \frac{(-1)^n\, 6}{n!(n+3)!}\ .$$

Logo, uma primeira solução da equação diferencial (1) é

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 6}{n!(n+3)!}\, x^n\ .$$

2ª Solução: Se tentássemos construir a 2ª solução do mesmo modo que a 1ª, só que usando a raiz $r_2 = -3$ da equação indicial, teríamos a fórmula de recorrência

$$n(n-3)a_n + a_{n-1} = 0\ .$$

Escolhemos $a_0 = 1$. Fazendo $n = 1$, a fórmula de recorrência nos diz que

$$-2a_1 + a_0 = 0\ ,$$

isto é,

$$a_1 = \frac{1}{2}\ .$$

Para $n = 2$, a fórmula de recorrência fica

$$-2a_2 + a_1 = 0\ ,$$

de onde segue que

$$a_2 = \frac{1}{4}\ .$$

Para $n = 3$, a fórmula de recorrência fica

$$0\cdot a_2 + a_2 = 0\ ,$$

Independentemente do valor de a_3, isto nos diz que $a_2 = 0$, em contradição com o valor $a_2 = \frac{1}{4}$ encontrado acima. A conclusão é que nossa equação diferencial não admite uma 2ª solução, linearmente independente da 1ª, da forma $y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Precisamos, então, desenvolver um método diferente para encontrar esta 2ª solução.

Consideremos a função

$$y(x,r) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(r) x^{n+r}$$

e seja

$$\mathcal{L}(y) = x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 4x \, \frac{\partial y}{\partial x} + xy$$

o operador diferencial associado a nossa equação diferencial. Temos então, aproveitando os cálculos feitos acima,

$$\mathcal{L}\big(y(x,r)\big) = r(r+3)c_0(r)x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \big[(n+r)(n+r+3)c_n(r) + c_{n-1}(r)\big] x^{n+r} \ .$$

Impondo já

$$(n+r)(n+r+3)c_n(r) + c_{n-1}(r) = 0 \ , \qquad \text{para} \ \ n = 1, 2, 3, \ldots \ , \tag{2}$$

temos

$$\mathcal{L}\big(y(x,r)\big) = r(r+3)c_0(r)x^r \ .$$

No 3º caso do método de Frobenius, vamos sempre escolher

$$c_0(r) = r - r_2 \ .$$

No presente exemplo,

$$c_0(r) = r + 3 \ .$$

Portanto

$$\mathcal{L}\big(y(x,r)\big) = r(r+3)^2 x^r \ .$$

No produto acima o fator $r+3$ aparece com multiplicidade 2 (de fato, $c_0(r)$ foi escolhido de modo que isto acontecesse). Logo $r+3$ ainda é um fator da derivda em relação a r. Isto pode ser comprovado diretamente,

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big[\mathcal{L}\big(y(x,r)\big)\Big] = (r+3)^2 x^r + 2r(r+3)x^r + r(r+3)^2 x^r \ln x$$

e, em conseqüência,

$$\frac{\partial \mathcal{L}(y)}{\partial r}(x,-3) = 0 \ .$$

O operador diferencial $\mathcal{L}$ envolve derivações em relação a x. Usando o teorema que afirma que a ordem em que as derivações parciais são tomadas não influi no resultado, temos que

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big[\mathcal{L}\big(y(x,r)\big)\Big] = \mathcal{L}\left(\frac{\partial y}{\partial r}(x,r)\right) \ .$$

Finalmente, fazendo $r = r_2 = -3$, obtemos

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial y}{\partial r}(x,-3)\right) = 0 \ ,$$

que nos diz que

$$y_2(x) = \frac{\partial y}{\partial r}(x, r_2) = \frac{\partial y}{\partial r}(x, -3)$$

é uma 2ª solução da equção diferencial. Falta ainda obter a expressão da solução y_2 e, em particular, verificar que ela é linearmente independente da 1ª . Efetuando a derivação em relação a r, temos

$$y_2(x) = \frac{\partial y}{\partial r}(x, -3) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(-3)x^{n-3} \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} c_n'(-3)x^{n-3} \ .$$

Lembrando que $c_0(r) = r + 3$, temos

$$c_0(-3) = 0 \qquad \text{e} \qquad c_0'(-3) = 1 \ .$$

Tomando $n = 1$ na fórmula de recorrência (2), obtemos

$$c_1(r) = -\frac{r+3}{(r+1)(r+4)} \ .$$

Temos, então,

$$c_1(-3) = 0 \ .$$

Pela definição de derivada,

$$c_1'(-3) = \lim_{r \to -3} \frac{c_1(r) - c_1(-3)}{r - (-3)} = \lim_{r \to -3} \frac{1}{(r+1)(r+4)} = \frac{1}{2} \ .$$

Novamente pela fórmula de recorrência (2), com $n = 2$, obtemos

$$c_2(r) = \frac{r+3}{(r+1)(r+2)(r+4)(r+5)} \ .$$

Segue que

$$c_2(-3) = 0$$

e, novamente pela definição de derivada,

$$c_2'(-3) = \lim_{r \to -3} \frac{c_2(r) - c_2(-3)}{r+3} = \lim_{r \to -3} \frac{1}{(r+1)(r+2)(r+4)(r+5)} = \frac{1}{4} \ .$$

De modo análogo, obtém-se

$$c_3(r) = -\frac{1}{(r+1)(r+2)(r+4)(r+5)(r+6)} \ .$$

Temos

$$c_3(-3) = -\frac{1}{3!\,2} \ .$$

Como $c_3(-3) \neq 0$, por continuidade vamos ter $c_3(r) \neq 0$ para r em uma vizinhança de -3. Podemos, então, considerar

$$\ln|c_3(r)| = -\Big(\ln|r+1| + \ln|r+2| + \ln|r+4| + \ln|r+5| + \ln|r+6|\Big) \ .$$

Derivando, temos

$$\frac{c_3'(r)}{c_3(r)} = -\left(\frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+2} + \frac{1}{r+4} + \frac{1}{r+5} + \frac{1}{r+6}\right) \ ,$$

que, para $r = -3$, nos dá

$$\frac{c_3'(-3)}{c_3(-3)} = -\left(-\frac{1}{2} - 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

e, finalmente,

$$c_3'(-3) = \frac{1}{36} \ .$$

De maneira análoga, obtem-se

$$c_n(r) = \frac{(-1)^n}{(r+1)(r+2)(r+4)^2\cdots(r+n)^2(r+n+1)(r+n+2)(r+n+3)} \ , \quad (n \geq 4).$$

Segue daí que

$$c_n(-3) = \frac{(-1)^n}{(n-3)!\, n!\, 2} \ , \qquad \text{para} \ \ n \geq 4 \ .$$

Tomando módulo, depois logaritmo e, finalmente, derivando, temos

$$\frac{c_n'(r)}{c_n(r)} = -\left(\frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+2} + \frac{2}{r+4} + \cdots \frac{2}{r+n} + \frac{1}{r+n+1} + \frac{1}{r+n+2} + \frac{1}{r+n+3}\right) \ .$$

Para $r = -3$, tem-se

$$\frac{c_n'(-3)}{c_n(-3)} = -\left(-\frac{1}{2} - 1 + \frac{2}{1} + \cdots \frac{2}{n-3} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) \ ,$$

ou, ainda,

$$\frac{c_n'(-3)}{c_n(-3)} = \frac{3}{2} - \Big(H_n + H_{n-3}\Big) \ , \qquad \text{para} \ \ n \geq 4 \ ,$$

onde, para qualquer n, H_n indica $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Segue que

$$c_n'(-3) = \frac{(-1)^n\Big[3 - 2\big(H_n + H_{n-3}\big)\Big]}{4\,(n-3)!\, n!} \ , \qquad \text{para} \ \ n \geq 4 \ .$$

Podemos então escrever escrever

$$y_2(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\,(n-3)!\, n!} \ln x + x^{-3}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{36} + \right.$$

$$+\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n \Big[3-2\big(H_n+H_{n-3}\big)\Big]}{4\,(n-3)!\,n!}\, x^n\Bigg)$$

Notemos que fazendo $k=n-3$ no somatório que multiplica $\ln x$, este pode ser reescrito como

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\,(n-3)!\,n!}\, x^n = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+3)!}\, x^n = -\frac{1}{12}\, y_1(x)\ .$$

Isto não foi foi coincidência. Acontece sempre no 3º caso. Tomando $m=-3$ na fórmula de recorrência (2), obtém-se

$$(n-3)nc_n(-3)+c_{n-1}(-3)=0\ .$$

Substituindo n por $n+3$, temos

$$n(n+3)c_{n+3}(-3)+c_{(n+3)-1}(-3)=0\ .$$

Comparando com relação

$$n(n+3)a_n+a_{n-1}=0$$

para os coeficientes da 1ª solução, temos que os $c_{n+3}(-3)$ e os a_n satisfazem exatamente a mesma fórmula de recorrência. A única diferença é que $a_0=1$, enquanto que $c_{0+3}(-3)=-\dfrac{1}{12}$. Segue, portanto, que

$$c_{n+3}(-3)=-\frac{1}{12}\,a_n\ , \qquad \text{para todo } \ n\ ,$$

e que

$$y_2(x)=-\frac{1}{12}\,y_1(x)\ln x+x^{-3}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{36}+\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n \Big[3-2\big(H_n+H_{n-3}\big)\Big]}{4\,(n-3)!\,n!}\, x^n\right).$$

Curiosidade: O somatório que aparece na expressão de y_2, pode ser reescrito como

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n \Big[3-2\big(H_n+H_{n-3}\big)\Big]}{4\,(n-3)!\,n!}\, x^n = \frac{3}{4}\sum_{n=4}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-3)!\,n!}\,x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n\frac{H_n+H_{n-3}}{(n-3)!\,n!}\,x^n$$

Notando que

$$\frac{3}{4}\,x^{-3}\sum_{n=4}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-3)!\,n!}\,x^n=-\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+3)!}\,x^k=-\frac{1}{8}\,y_1(x)+\frac{1}{8}\ ,$$

temos que

$$y_2(x)=-\frac{1}{12}\,y_1(x)\ln x+x^{-3}\bigg(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{36}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n\frac{H_n+H_{n-3}}{(n-3)!\,n!}\,x^n\Bigg)-\frac{1}{8}\,y_1(x)+\frac{1}{8}\ .$$

Segue daí que

$$z_2(x)=-\frac{1}{12}\,y_1(x)\ln x+x^{-3}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{11\,x^3}{72}-\frac{1}{2}\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n\frac{H_n+H_{n-3}}{(n-3)!\,n!}\,x^n\right)$$

é outra possibilidade para uma 2ª solução linearmente independente da 1ª, de nossa equação diferencial . A expressão de z_2 é um pouco mais simples que a de y_2.

Observação final: Com um argumento inteiramente análogo ao que foi feito acima, pode-se mostrar que

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial y}{\partial r}(x,r_1)\right)=\mathcal{L}\big(y(x,r_2)\big)=0\ ,$$

ou seja,

$$y_3(x)=y(x,r_2)\qquad \text{e}\qquad y_4(x)=\frac{\partial y}{\partial r}(x,r_1)$$

também são soluções da equação diferencial. No entanto se calculássemos as expressões destas soluções, veríamos que elas são linearmente dependentes de y_1.

Observação: No 3º caso do método de Frobenius, pondo $N=r_1-r_2$, temos $0=c_0(r_2)=c_1(r_2)=\cdots=c_{N-1}(r_2)$ e se $\lambda=c_N(r_2)\neq 0$, a 2ª solução é da forma

$$y_2(x)=\lambda\,y_1(x)\ln x+x^{r_2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n'(r_2)\,x^n\right)\ .$$

Mas se tivermos $\lambda=0$, então a 2ª solução é da forma

$$y_2(x)=x^{r_2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n'(r_2)\,x^n\right)\ .$$

ou seja, a 2ª solução é da mesma forma simples da 1ª. No 3º caso do método de Frobenius pode, portanto, acontecer que as soluções sejam da mesma forma simples do 1º caso. Isto acontece no exemplo 4 abaixo.

Exemplo 2. Resolver a equação diferencial

$$x\,y''-3\,y'+x\,y=0\ . \tag{3}$$

Substiuindo $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$ na equação diferencial (3), obtém-se

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}3(n+r)a_nx^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+1}=0\ .$$

Juntando os dois primeiros somatórios, tem-se

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-4)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0 \ .$$

Fazendo $n = k+2$ no 1º somatório, obtemos

$$\sum_{k=-2}^{\infty}(k+r+2)(k+r-2)a_{k+2} x^{k+r+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0 \ .$$

Separando os 2 primeiros termos e agrupando com o segundo somatório,

$$r(r-4)a_0 x^{r-1} + (r+1)(r-3)a_1 x^r + \sum_{n=0}^{\infty}\Big((n+r+2)(n+r-2)a_{n+2} + a_n\Big)x^{n+r+1} = 0 \ .$$

Igualando a 0 os coeficientes de cada potência de x, obtemos 3 condições:

Equação indicial: $r(r-4) = 0$

$$(r+1)(r-3)a_1 = 0$$

Fórmula de recorrência: $(n+r+2)(n+r-2)a_{n+2} + a_n = 0\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

As raízes da equação indicial são $r_1 = 4$ e $r_2 = 0$.

1ª Solução: Para $r_1 = 4$, temos

$$a_1 = 0$$

e a recorrência

$$(n+6)(n+2)a_{n+2} + a_n = 0 \ ,$$

ou seja

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+6)(n+2)} \ .$$

Escolhendo $a_0 = 1$, temos

$$a_{2n+1} = 0$$

e

$$a_2 = -\frac{1}{2 \cdot 6} \ , \qquad a_4 = \frac{1}{(2\cdot 4)\cdot(6\cdot 8)} = \frac{1}{2!\,4!\,2^3} \ ,$$

$$a_6 = -\frac{1}{6 \cdot 10}\, a_4 = -\frac{1}{3\cdot 5\cdot 2^2}\, a_4 = -\frac{1}{3!\,5!\,2^5} \ .$$

Pelo mesmo argumento, obtém-se

$$a_8 = \frac{1}{4!\,6!\,2^7} \ , \qquad a_{10} = -\frac{1}{5!\,7!\,2^9}$$

e, em geral,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!\,(n+2)!\,2^{2n-1}} \ .$$

Logo uma primeira solução da equação diferencial (3) é

$$y_1(x) = x^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{n!\,(n+2)!\,2^{2n-1}} \ .$$

2ª Solução: Para

$$y(x,r) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(r) x^{n+r} \ ,$$

obtém-se

$$\mathcal{L}\big(y(x,r)\big) = r(r-4)c_0(r)x^{r-1} + (r+1)(r-3)c_1(r)x^r$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \Big((n+r+2)(n+r-2)c_{n+2}(r) + c_n(r)\Big) x^{n+r+1} \ .$$

Para obter

$$\mathcal{L}\big(y(x,r)\big) = r(r-4)c_0(r)x^{r-1} \ ,$$

impomos

$$c_1(r) = 0 \tag{4}$$

e a recorrência

$$(n+r+2)(n+r-2)c_{n+2}(r) + c_n(r) = 0 \tag{5}$$

Como no exemplo 1, uma segunda solução para a equação diferencial (3) é

$$y_2(x) = \frac{\partial y}{\partial r}(x, r_2) = \frac{\partial y}{\partial r}(x, 0) \ .$$

Temos,

$$\frac{\partial y}{\partial r}(x,r) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(r) x^{n+r} \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} c_n'(r) x^{n+r} \ .$$

Segue que

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0) x^{n-1} \ln x + x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n'(0) x^n$$

De (4) e (5) segue que

$$c_{2n+1}(r) = 0 \ , \qquad \text{para todo} \ \ n \ .$$

Como sempre se faz no 3º caso do método de Frobenius, escolhemos

$$c_0(r) = r - r_2 = r \ . \tag{6}$$

a fórmula de recorrência (5) se reescreve como

$$c_{n+2}(r) = -\frac{1}{(n+r+2)(n+r-2)}\, c_n(r) \ , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Combinando (6) e (7), obtemos

$$c_2(r) = -\frac{r}{(r+2)(r-2)} \ ,$$

$$c_4(r) = -\frac{c_2(r)}{(r+4)\,r} = \frac{1}{(r-2)(r+2)(r+4)} \ ,$$

$$c_6(r) = -\frac{c_4(r)}{(r+2)(r+6)} = -\frac{1}{(r-2)(r+2)^2(r+4)(r+6)} \ .$$

Em geral,

$$c_{2\,n}(r) = \frac{(-1)^n}{(r-2)(r+2)^2\cdots(r+2\,n-4)^2(r+2\,n-2)(r+2\,n)} \ , \qquad (n \geq 3).$$

Segue que

$$c_0(0) = c_1(0) = c_2(0) = c_3(0) = 0 \ , \qquad \lambda = c_4(0) = -\frac{1}{16} \ .$$

Temos

$$c_0'(0) = 1 \ , \quad c_2'(0) = \lim_{r\to 0} \frac{c_2(r)}{r} = -\lim_{r\to 0} \frac{1}{(r+2)(r-2)} = -\frac{1}{4}$$

e, também,

$$\ln|c_4(r)| = -\Big(\ln|r-2| + \ln|r+2| + \ln|r+4|\Big) \ .$$

Derivando, obtém-se

$$\frac{c_4'(r)}{c_4(r)} = -\left(\frac{1}{r-2} + \frac{1}{r+2} + \frac{1}{r+4}\right) \ .$$

Para $r = 0$,

$$c_4'(0) = -\frac{1}{4}\, c_4(0) = \frac{1}{64} \ .$$

Analogamente, para todo $n \geq 3$,

$$\ln|c_{2\,n}(r)| = -\Big[\ln|r-2| + 2\Big(\ln|r+2| + \ln|r+4| + \cdots + \ln|r+2\,n-4|\Big)$$

$$+\ln|r+2n-2|+\ln|r+2n|\Big] \ .$$

Derivando, obtemos

$$\frac{c'_{2n}(r)}{c_{2n}(r)} = -\Big[\frac{1}{r-2}+2\Big(\frac{1}{r+2}+\frac{1}{r+4}+\cdots+\frac{1}{r+2n-4}\Big)+\frac{1}{r+2n-2}+\frac{1}{r+2n}\Big] \ .$$

Para $r=0$,

$$\frac{c'_{2n}(0)}{c_{2n}(0)} = -\Big[-\frac{1}{2}+2\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-4}\Big)+\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n}\Big]$$

$$= -\frac{1}{2}\Big[-1+2\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-2}\Big)+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[1-\big(H_n+H_{n-2}\big)\Big] \ .$$

Por outro lado,

$$c_{2n}(0) = \frac{(-1)^{n+1}}{2\cdot 2^2\cdot 4^2\cdots(2n-4)^2(2n-2)(2n)} \ , \qquad (n\geq 3) \, .$$

Segue que

$$c'_{2n}(0) = \frac{(-1)^n\Big(\big(H_n+H_{n-2}\big)-1\Big)}{4\cdot 2^2\cdot 4^2\cdots(2n-4)^2(2n-2)(2n)} \ ,$$

ou seja,

$$c'_{2n}(0) = \frac{(-1)^n\big[\big(H_n+H_{n-2}\big)-1\big]}{(n-2)!\cdot n!\cdot 2^{2n+2}} \ , \qquad (n\geq 3) \, .$$

Podemos agora escrever a segunda solução

$$y_2(x) = -\frac{1}{16}\,y_1(x)\ln x+1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n\big[\big(H_n+H_{n-2}\big)-1\big]}{(n-2)!\,n!\,2^{2n+2}}\,x^{2n} \ .$$

Exemplo 3. Resolver a equação diferencial

$$(x^4-x^2)\,y''-(x^3+x)\,y'+(x^2+1)\,y=0 \ .$$

Substituindo $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$ na equação diferencial, obtém-se

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r+2}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \ .$$

Agrupando os termos, obtém-se

$$\sum_{n=0}^{\infty}\big[(n+r)(n+r-1)-(n+r)+1\big]a_n x^{n+r+2}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\big[(n+r)(n+r-1)+(n+r)-1\big]a_n x^{n+r} = 0 \ .$$

Fazendo $t = n+r$, temos

$$(n+r)(n+r-1)-(n+r)+1 = t^2-2\,t+1 = (t-1)^2 \ ,$$

pois $t=1$ é raiz dupla. Obtém-se daí a fatoração

$$(n+r)(n+r-1)-(n+r)+1 = (n+r-1)^2 \ .$$

Analogamente,

$$(n+r)(n+r-1)+(n+r)-1 = t^2-1 = (t+1)(t-1)$$

$$= (n+r+1)(n+r-1) \ .$$

Portanto

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)^2 a_n\, x^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)(n+r-1)\, a_n\, x^{n+r} = 0 \ .$$

Fazendo $k=n+2$ no 1º somatório, obtemos

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k+r-3)^2 a_{k-2}\, x^{k+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)(n+r-1)\, a_n\, x^{n+r} = 0 \ .$$

Usando a letra n novamente no 1º somatório, separando os 2 primeiros termos do 2º somatório e agrupando os termos em um único somatório, obtém-se

$$-(r+1)(r-1)a_0 x^r - r(r+2)a_1 x^{r+1}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\big[(n+r-3)^2 a_{n-2} - (n+r+1)(n+r-1)\, a_n\big]x^{n+r} = 0 \ .$$

Igualando a zero o coeficiente de cada potência de x, obtemos

Equação indicial: $(r+1)(r-1) = 0\,;$

$r(r+2)a_1 = 0$

Fórmula de recorrência: $(n+r-3)^2 a_{n-2} - (n+r+1)(n+r-1)\, a_n = 0\,.$

As raízes da equação indicial são $r_1 = 1$ e $r_2 = -1$. Esta

1ª Solução: Para $r_1 = 1$, temos

$$1\cdot 3\, a_1 = 0$$

e a recorrência

$$(n-2)^2 a_{n-2} - n(n+2)\, a_n = 0\ .$$

Escolhemos $a_0 = 1$. Para $n = 2$ a recorrência implica que

$$a_2 = 0\ .$$

A partir daí, aplicando repetidas vezes a recorrência, obtém-se

$$a_0 = 1\ , \qquad a_n = 0 \quad \text{para todo } \ n \geq 1.$$

Segue que

$$y_1(x) = x\ .$$

2ª Solução: Para

$$y(x,r) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(r) x^{n+r}$$

obtém-se

$$\mathcal{L}\big(y(x,r)\big) = -(r+1)(r-1)c_0(r)x^r - r(r+2)c_1(r)x^{r+1}$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \big[(n+r-3)^2 c_{n-2}(r) - (n+r+1)(n+r-1)\, c_n(r)\big] x^{n+r}\ .$$

Para obter

$$\mathcal{L}\big(y(x,r)\big) = -(r+1)(r-1)c_0(r)x^r\ ,$$

impomos

$$c_1(r) = 0 \tag{8}$$

e a fórmula de recorrência

$$(n+r-3)^2 c_{n-2}(r) - (n+r+1)(n+r-1)\, c_n(r) = 0\ . \tag{9}$$

Como nos exemplos anteriores, temos

$$y_2(x) = \frac{\partial y}{\partial r}\,(x, r_2) = \frac{\partial y}{\partial r}\,(x, -1)\ .$$

Mas

$$\frac{\partial y}{\partial r}(x,r) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(r) x^{n+r} \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} c_n'(r) x^{n+r} \ .$$

Logo

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(-1) x^{n-1} \ln x + x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n'(-1) x^n$$

Segue de (8) e (9) que

$$c_{2\,n+1}(r) = 0 \ , \qquad \text{para todo} \ \ n \ .$$

De (9), segue que

$$c_n(r) = \frac{(n+r-3)^2}{(n+r+1)(n+r-1)} \, c_{n-2}(r) \ . \tag{10}$$

Usando (10) e levando em conta que

$$c_0(r) = r - r_2 = r + 1 \ ,$$

conclui-se que

$$c_2(r) = \frac{(r-1)^2}{(r+3)(r+1)} \, c_0(r) = \frac{(r-1)^2}{r+3} \ ,$$

$$c_4(r) = \frac{(r+1)^2}{(r+5)(r+3)} \, c_2(r) = \frac{(r-1)^2(r+1)^2}{(r+3)^2(r+5)} \ ,$$

$$c_6(r) = \frac{(r-1)^2(r+1)^2}{(r+5)^2(r+7)} \ ,$$

e,em geral,

$$c_{2\,k}(r) = \frac{(r-1)^2(r+1)^2}{(r+2\,k-1)^2(r+2\,k+1)} \ , \quad k \geq 2 \ .$$

Como $r+1$ é um fator com multiplicidade 2 de $c_{2\,k}(r)$ para todo $k \geq 2$, temos

$$c_{2\,k}(-1) = c_{2\,k}'(-1) = 0 \ , \qquad (k \geq 2) \ .$$

Além disto,

$$c_2(-1) = 2 \ ,$$

$$c_2'(r) = \frac{2(r-1)(r+3) - (r-1)^2}{(r+3)^2}$$

e

$$c_2'(-1) = -3 \ .$$

Segue que

$$y_2(x) = 2\,x \ln x + x^{-1}\Big(1 - 3\,x^2\Big) \ .$$

Exemplo 4. Resolver a equação diferencial

$$x(1-x)y'' - 7y' + 6y = 0 \ . \tag{11}$$

Como observamos depois do Exemplo 1, excepcionalmente, no 3º caso do método de Frobenius pode acontecer que a segunda solução seja do tipo mais simples, sem termo logarítmico. Vamos observar isto no presente exemplo.

Substituindo $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ na equação diferencial (11), obtém-se

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r}$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty} 7(n+r)a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 6\,a_n x^{n+r} = 0 \ .$$

Agrupando os termos, obtém-se

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-8)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}\Big[(n+r)(n+r-1)-6\Big]\,a_n x^{n+r} = 0 \ .$$

Fazendo $t = n + r$, temos

$$(n+r)(n+r-1) - 6 = t^2 - t - 6 = (t+2)(t-3) = (n+r+2)(n+r-3) \ .$$

Logo

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-8)a_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r+2)(n+r-3)a_n x^{n+r} = 0 \ .$$

Fazendo $k = n - 1$ no 1º somatório, obtemos

$$\sum_{k=-1}^{\infty}(k+r+1)(k+r-7)a_{k+1}x^{k+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r+2)(n+r-3)a_n x^{n+r} = 0 \ .$$

Separando o 1º termos do 1º somatório, usando a letra n em lugar de k e reunindo com o 2º somatório, temos

$$r(r-8)a_0 x^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\Big((n+r+1)(n+r-7)a_{n+1} - (n+r+2)(n+r-3)a_n\Big)x^{n+r} = 0 \ .$$

Igualando a 0 os coeficientes, obté-se

Equação indicial: $r(r-8)=0$

Fórmula de recorrência: $(n+r+1)(n+r-7)a_{n+1}-(n+r+2)(n+r-3)a_n=0$.

As raízes da equação indicial são $r_1=8$ e $r_2=0$.

1ª Solução: Para $r=r_1=8$, a fórmula de recorrência fica

$$(n+9)(n+1)a_{n+1}-(n+10)(n+5)a_n=0 \ ,$$

ou seja,

$$a_{n+1}=\frac{(n+10)(n+5)}{(n+9)(n+1)}\,a_n \ ,$$

Escolhendo $a_0=1$, temos, para $n=0$,

$$a_1=\frac{10\cdot 5}{9\cdot 1} \ .$$

Para $n=1$,

$$a_2=\frac{11\cdot 6}{10\cdot 2}\,a_1=\frac{(10\cdot 11)\cdot(5\cdot 6)}{(9\cdot 10)\cdot(1\cdot 2)}=\frac{11}{9}\cdot\frac{5\cdot 6}{1\cdot 2} \ .$$

Para $n=2$,

$$a_3=\frac{12\cdot 7}{11\cdot 3}\,a_2=\frac{12}{9}\cdot\frac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} \ .$$

Analogamente,

$$a_4=\frac{13}{9}\cdot\frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \ , \qquad a_5=\frac{14}{9}\cdot\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

e, em geral,

$$a_n=\frac{n+9}{9}\cdot\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{24} \ , \qquad \text{para todo } \ n\geq 0 \ .$$

Logo

$$y_1=\frac{x^8}{216}\sum_{n=0}^{\infty}(n+9)(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)x^n$$

2ª Solução: Para $r=r_2=0$, a fórmula de recorrência fica

$$(n+1)(n-7)a_{n+1}-(n+2)(n-3)a_n=0 \ .$$

Escolhendo $a_0=1$, para $n=0$, temos

$$-7a_1+6\,a_0=0$$

e

$$a_1 = \frac{6}{7} \ .$$

Para $n = 1$,

$$-12\, a_2 + 6\, a_1 = 0 \ .$$

Logo

$$a_2 = \frac{3}{7} \ .$$

Para $n = 2$,

$$-15\, a_3 + 4\, a_2 = 0 \ .$$

Logo

$$a_3 = \frac{4}{35} \ .$$

Para $n = 3$,

$$-12\, a_4 - 0\, a_3 = 0 \ .$$

Segue que

$$a_4 = 0 \ .$$

A partir daí, a recorrência nos dá

$$a_n = 0 \ , \quad \text{para todo} \ \ n \geq 4 \ .$$

Encontramos assim uma 2ª solução da forma simples

$$y_2 = 1 + \frac{6}{7}\, x + \frac{3}{7}\, x^2 + \frac{4}{35}\, x^3 \ .$$