EQUAÇÃO DE BESSEL DE ÍNDICE ZERO

A equação de Bessel de índice p é a EDO

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \ ,$$

onde p é um número real. Vamos estudar aqui o caso $p = 0$, ou seja, a equação

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0 \, . \tag{1}$$

O ponto $x_0 = 0$ é um ponto singular regular. Aplicando, então, o método de Frobenius, procuramos uma solução da forma

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^{n+r} \ , \qquad \text{com} \ \ a_0 \neq 0 \ .$$

Substituindo na equação de Bessel de índice 0 (1), obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n \, x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n \, x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^{n+r+2} = 0 \, .$$

Juntando o 1º e o 2º somatórios, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)^2 a_n \, x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^{n+r+2} = 0 \, .$$

No segundo somatório acima, fazendo $k = n+2$ e fatorando o coeficiente do primeiro somatório, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big(n+r\big)^2 a_n \, x^{n+r} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} \, x^{k+r} = 0 \, .$$

No segundo somatório, substituindo o índice k por n, separando os dois primeiros termos do primeiro somatório, obtemos

$$r^2 a_0 \, x^r + \big(r+1\big)^2 a_1 \, x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \Big(\big(n+r\big)^2 a_n + a_{n-2} \Big) x^{n+r} = 0 \, .$$

Como $a_0 \neq 0$, segue que

$$r^2 = 0 \tag{2}$$
$$\big(r+1\big)^2 a_1 = 0 \tag{3}$$
$$\big(r+n\big)^2 a_n + a_{n-2} = 0 \tag{4}$$

A equação indicial (2) tem raiz dupla $r_1 = r_2 = 0$.

1ª Solução: Para $r_1 = 0$, a equação (3) nos diz que

$$a_1 = 0 \ . \tag{5}$$

A fórmula de recorrência (4) se torna

$$n^2 a_n + a_{n-2} = 0 \ , \qquad n = 2, 3, 4, \ldots \tag{6}$$

De (6) segue que

$$a_n = -\,\frac{a_{n-2}}{n^2} \ , \qquad n = 2, 3, 4, \ldots \tag{7}$$

Usando (5) e (7) e deixando para escolher mais tarde o valor de a_0, obtemos

$$a_{2\,n+1} = 0$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2} \ , \qquad a_4 = \frac{a_0}{2^2 \cdot 4^2} = \frac{a_0}{2^4 \cdot (2!)^2} \ , \qquad a_6 = -\frac{a_0}{2^6 \cdot (3!)^2} \ .$$

Em geral,

$$a_{2\,n} = (-1)^n \, \frac{a_0}{2^{2n} \, (3!)^2} \ . \tag{8}$$

Obtemos, finalmente, a solução

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\,n}$$

Esta função é chamada de **função de Bessel de 1ª espécie de índice 0** e denotada por $J_0(x)$:

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\,n} \ .$$

Examinando a expresão

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{4}\, x^2 + \frac{1}{64}\, x^4 + \cdots \ ,$$

vemos que $J_0(x)$ é uma função par, pois só envolve potências de x com expoentes pares e satisfaz $J_0(0) = 1$.

Precisamos encontrar uma segunda solução, linearmente independente de $J_0(x)$. Qualquer solução da equação de Bessel de índice 0, linearmente independente de $J_0(x)$, é dita uma **função de Bessel de segunda espécie de índice 0**.

Consideremos a função

$$y(x, r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)\, x^{n+r}$$

e seja

$$\mathcal{L}(y) = x^2 \, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \, \frac{\partial y}{\partial x} + x^2 \, y$$

o operador diferencial associado a nossa equação diferencial. Aproveitando os cálculos já feitos acima, podemos afirmar que

$$\mathcal{L}\big(y(x, r)\big) = r^2 a_0 \, x^r + \big(r+1\big)^2 a_1 \, x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \Big(\big(n+r\big)^2 a_n + a_{n-2} \Big) x^{n+r} \ .$$

Impondo que

$$a_1(r) = 0$$

e a fórmula de recorrência

$$(r+n)^2 a_n(r) + a_{n-2}(r) = 0 \ , \qquad \forall\, n \geq 2\,,$$

teremos

$$\mathcal{L}\big(y(x,r)\big) = r^2\, a_0(r)\, x^r \ .$$

No 2º caso do método de Frobenius podemos continuar com a escolha

$$a_0(r) = 1 \ .$$

Isto nos dá

$$\mathcal{L}\big(y(x,r)\big) = r^2\, x^r \ .$$

Derivando em relação a r, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big[\mathcal{L}\big(y(x,r)\big)\Big] = 2\, r x^r + r^2 x^r \ln r$$

Fazendo $r = 0$, segue finalmente que

$$\mathcal{L}\Big(\frac{\partial y}{\partial r}(x,0)\Big) = 0\,.$$

Portanto uma segunda solução é

$$y_2(x) = \frac{\partial y}{\partial r}(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(0)\, x^n \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(0)\, x^n$$

A fórmula de recorrência obtida acima pode ser reescrita como

$$a_n(r) = -\,\frac{1}{(r+n)^2}\, a_{n-2}(r) \ .$$

Como $a_1(r) = 0$, obtemos que

$$a_{2n+1}(r) = 0 \ .$$

Para $n = 2$, temos

$$a_2(r) = -\frac{1}{(r+2)^2} \ .$$

Para $n = 4$,

$$a_4(r) = -\frac{1}{(r+4)^2}\, a_2(r) = \frac{1}{(r+2)^2 (r+4)^2} \ .$$

Analogamente, para $n = 6$, obtém-se

$$a_6(r) = -\frac{1}{(r+6)^2}\, a_4(r) = -\frac{1}{(r+2)^2 (r+4)^2 (r+6)^2}$$

e, mais geralmente,

$$a_{2n}(r) = \frac{(-1)^n}{(r+2)^2(r+4)^2 \cdots (r+2n)^2}$$

$$a_{2n}(0) = \frac{(-1)^n}{(1\cdot2)^2(2\cdot2)^2(3\cdot2)^2 \cdots (n\cdot2)^2} = \frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}}$$

Tomando o módulo e aplicando logaritmo,

$$\ln|a_{2n}(r)| = -2\Big(\ln|r+2| + \ln|r+4| + \ln|r+6| + \cdots + \ln|r+2n|\Big)$$

Derivando

$$\frac{a'_{2n}(r)}{a_{2n}(r)} = -2\left(\frac{1}{r+2} + \frac{1}{r+4} + \frac{1}{r+6} + \cdots + \frac{1}{r+2n}\right)$$

Fazendo $r = 0$,

$$\frac{a'_{2n}(0)}{a_{2n}(0)} = -2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

Finalmente,

$$a'_{2n}(0) = \frac{(-1)^{n+1} H_n}{(n!)^2 2^{2n}}$$

onde,

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

AEncontramos uma segunda solução para a equação de Bessel, linearmente independente da primeira, na forma

$$y_2(x) = Y_0(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} H_n}{(n!)^2 2^{2n}}\, x^{2n}$$

Como $J_0(0) = 1$, temos que

$$\lim_{x\to0^+} Y_0(x) = -\infty$$

Conclusão: *As únicas soluções da equação de Bessel de índice 0 que são limitadas em um intervalo do tipo* $(0, a)$ *são as da forma*

$$y = C\, J_0(x)\ .$$