Seção 30: Um exemplo – resfriamento de um cilindro

Exemplo. Suponhamos que um cilindro de raio 1, bastante longo, feito de um material condutor de calor inicialmente a 100ºC é mantido em um meio a 0ºC. Estudar a evolução da temperatura no cilindro.

Solução:

Supondo o cilindro bastante longo e que estejamos interessados em descrever o que acontece longe das extremidades, podemos considerá-lo, então, infinitamente longo. Basta estudar o que acontece em uma seção D (o disco unitário) do cilindro. No instante $t = 0$, a temperatura u, sendo constante, tem simetria radial. Esta simetria não se perde ao longo do tempo. Em outras palavras, a temperatura u depende apenas da coordenada polar r, não dependendo de θ. Com isso, o problema matemático se simplifica. Na equação do calor $u_t = c^2 \Delta u$, usamos a expressão do laplaciano em coordenadas polares para uma função que não depende de θ

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}\, u_r + \frac{1}{r^2} + u_{\theta\theta} = u_{rr} + \frac{1}{r}\, u_r \, .$$

Por simplicidade, vamos considerar o caso $c^2 = 1$ (isto sempre pode ser conseguido, tomando unidades convenientes). Estamos procurando uma função $u = u(r,t)$ satisfazendo

$$\begin{cases} u_t = u_{rr} + \dfrac{1}{r}\, u_r & , \quad (0 < r < 1 \ , \ 0 < t < \infty) \\ u(1,t) = 0 & , \quad \text{para} \quad t > 0 \\ u(r,0) = 100 & , \quad \text{para} \quad 0 < r < 1 \end{cases}$$

Começamos procurando u da forma $u(r,t) = \varphi(r)\, \psi(t)$. Substituindo na equação e separando as variáveis, temos que

$$\frac{r\,\varphi''(r) + \varphi'(r)}{r\,\varphi(r)} = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \lambda \ ,$$

que nos dá as equações

$$r\,\varphi''(r) + \phi'(r) + \lambda\, r\, \varphi(r) = 0 \qquad \text{e} \qquad \psi'(t) = \lambda\, \psi(t) \ .$$

A solução da segunda equação é a exponencial $\psi(t) = e^{\lambda\, t}$. Devemos ter $\lambda < 0$, pois caso contrário a solução se tornaria infinita para $t \longrightarrow \infty$. Pondo, então, $\lambda = -\,\alpha^2$, obtemos

$$r\,\varphi''(r) + \varphi(r) + \alpha^2\, r\, \varphi(t) = 0 \ .$$

Multiplicando por r e fazendo a mudança de variável $s = \alpha r$, esta última equação se transforma em

$$s^2\, \frac{d^2\varphi}{ds^2} + s\, \frac{d\varphi}{ds} + s^2\, \varphi = 0 \ ,$$

que é a equação de Bessel de índice 0. A solução, portanto, é

$$\varphi(r) = A\, J_0(\alpha\, r) + B\, Y_0(\alpha\, r) \ ,$$

mas $B = 0$, pois a solução deve permanecer finita para $r = 0$, que corresponde à origem, que faz parte do disco. Obtemos, assim,

$$u(r,t) = A\, J_0(\alpha r)\, e^{-\alpha^2 t} \ .$$

Pela condição de fronteira $u(1,t) = 0$, devemos ter $J_0(\alpha) = 0$, isto é, $\alpha = \alpha_n$ é um dos zeros positivos da função de Bessel J_0. Encontramos então as soluções

$$u_n(r,t) = A_n J_0(\alpha_n r)\, e^{-\alpha_n^2 t}$$

para a equação diferencial e a condição de fronteira. Fazendo a superposição obtemos

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r)\, e^{-\alpha_n^2 t} \ .$$

Para $t = 0$, devemos ter o desenvolvimento de Fourier-Bessel

$$100 = u(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r) \ .$$

Como vimos, os A_n são dados por

$$A_n = \frac{200}{\big[J_1(\alpha_n)\big]^2} \int_0^1 J_0(\alpha_n r)\, r\, dr \, .$$

Da equação de Bessel,

$$r\, J_0(r) = -\left[r\, J_0''(r) + J_0'(r)\,\right] = -\left(r\, J_0'(r)\right)' \ .$$

Logo,

$$\int_0^1 J_0(\alpha_n r)\, r\, dr = \frac{1}{\alpha_n^2} \int_0^{\alpha_n} J_0(\tau)\, \tau\, d\tau = -\frac{r}{\alpha_n^2}\, J_1(r) \Bigg|_{r=0}^{r=\alpha_n} = -\frac{1}{\alpha_n}\, J_1(\alpha_n) \, .$$

Obtemos, finalmente, que a solução do problema é

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{200}{\alpha_n J_1(\alpha_n)}\, J_0(\alpha_n\, r)\, e^{-\alpha_n^2\, t} \, .$$