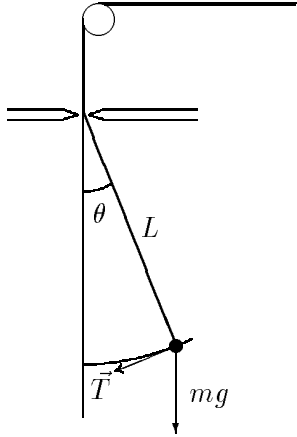


## Pêndulo de Comprimento Variável



### Dedução da equação diferencial:

Consideremos o pêndulo da figura ao lado em que uma massa  $m = 1$  oscila presa a um fio cujo comprimento  $L = L(t)$  varia com o tempo, pela ação de uma roldana. Colocamos um sistema de coordenadas tendo a origem no ponto de suspensão do pêndulo e tendo o eixo dos  $Y$  dirigido para baixo. Temos

$$\text{posição} \begin{cases} x = L \operatorname{sen} \theta \\ y = L \operatorname{cos} \theta \end{cases}$$

$$\text{velocidade} \begin{cases} x' = L' \operatorname{sen} \theta + L \theta' \operatorname{cos} \theta \\ y' = L' \operatorname{cos} \theta - L \theta' \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

$$\text{aceleração} \begin{cases} x'' = L'' \operatorname{sen} \theta + 2L' \theta' \operatorname{cos} \theta - L (\theta')^2 \operatorname{sen} \theta + L \theta'' \operatorname{cos} \theta \\ y'' = L'' \operatorname{cos} \theta - 2L' \theta' \operatorname{sen} \theta - L (\theta')^2 \operatorname{cos} \theta - L \theta'' \operatorname{sen} \theta \end{cases} \quad (1)$$

Sobre a massa atuam duas forças, o peso  $\vec{P} = (0, mg)$  e a força  $\vec{R}$  de reação da corda. A força de reação  $\vec{R}$  tem a direção radial, mas é difícil de dizer qual o seu módulo, que depende de como o comprimento  $L$  varia. Se por exemplo,  $L$  é constante, então  $\vec{R}$  vale exatamente o oposto da componente do peso na direção radial. A 2ª lei de Newton nos diz que

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a} .$$

Acima  $\vec{a} = (x'', y'')$  é a aceleração. Consideremos  $\vec{T} = (\operatorname{cos} \theta, -\operatorname{sen} \theta)$ , o vetor unitário na direção perpendicular à direção radial (no caso  $L$  constante,  $\vec{T}$  é tangente à trajetória). Então  $\vec{R} \cdot \vec{T} = 0$ , de modo que

$$\vec{P} \cdot \vec{T} = m \vec{a} \cdot \vec{T} .$$

Logo

$$(0, mg) \cdot (\operatorname{cos} \theta, -\operatorname{sen} \theta) = (x'', y'') \cdot (\operatorname{cos} \theta, -\operatorname{sen} \theta) ,$$

ou seja,

$$-mg \operatorname{sen} \theta = x'' \operatorname{cos} \theta - y'' \operatorname{sen} \theta \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), obtém-se

$$-g \operatorname{sen} \theta = 2L' \theta' + L \theta'' . \quad (3)$$

Usando a aproximação  $\operatorname{sen} \theta \approx \theta$ , obtemos a equação

$$2L' \theta' + L \theta'' + g \theta = 0 \quad (4)$$

**Resolução da equação diferencial.** A partir de agora fazemos a hipótese que o comprimento do pêndulo cresce a uma taxa constante,

$$L = L_0 + v_0 t .$$

Para resolver a equação diferencial (1) que governa o sistema, introduzimos  $L$  como variável independente. Pela regra da cadeia,

$$\theta' = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dL} \frac{dL}{dt} = v_0 \frac{d\theta}{dL} . \quad (5)$$

Concluimos que derivar uma vez em relação a  $t$  equivale a derivar uma vez em relação a  $L$  e multiplicar pela constante  $v_0$ . Segue que

$$\theta'' = \frac{d^2\theta}{dt^2} = v_0^2 \frac{d^2\theta}{dL^2} . \quad (6)$$

Substituindo (2) e (3) em (1), obtém-se

$$Lv_0^2 \frac{d^2\theta}{dL^2} + 2v_0^2 \frac{d\theta}{dL} + g\theta = 0$$

ou ainda

$$L^2 \frac{d^2\theta}{dL^2} + 2L \frac{d\theta}{dL} + \frac{g}{v_0^2} \theta = 0 . \quad (7)$$

Lembremos a equação de Bessel modificada: As soluções de

$$x^2 y'' + (1 - 2\alpha)xy' + (\alpha^2 - \beta^2 p^2 + \beta^2 k^2 x^{2\beta})y = 0$$

são  $y = x^\alpha Z_p(kx^\beta)$ , onde  $Z_p$  indica uma função de Bessel de índice  $p$ .

Aplicando este resultado com  $\alpha = -\frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{2}$ ,  $k = \frac{2\sqrt{g}}{v_0}$  e  $p = 1$ , obtemos

$$\theta = C_1 L^{-\frac{1}{2}} J_1\left(\frac{2}{v_0} \sqrt{gL}\right) + C_2 L^{-\frac{1}{2}} Y_1\left(\frac{2}{v_0} \sqrt{gL}\right)$$

Pondo  $z = \frac{2}{v_0} \sqrt{gL}$ , temos

$$\theta = Az^{-1} J_1(z) + Bz^{-1} Y_1(z) .$$

Derivando em relação a  $z$ , usando que

$$\frac{d}{dz} \left[ z^{-1} J_1(z) \right] = -z^{-1} J_2(z)$$

e que vale uma fórmula análoga para as  $Y$  (ver obs. 1 abaixo), obtém-se

$$\frac{d\theta}{dz} = - \left[ Az^{-1} J_2(z) + Bz^{-1} Y_2(z) \right] .$$

Vamos usar as condições iniciais

$$\theta(0) = \theta_0 , \quad \theta'(0) = 0 .$$

Levando em conta que  $\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dz} \frac{dz}{dt}$ , temos que  $\frac{d\theta}{dt} = 0$  se e somente se  $\frac{d\theta}{dz} = 0$ . Temos, assim,

as condições  $\theta = \theta_0$  e  $\frac{d\theta}{dz} = 0$ , para  $z = z_0 = \frac{2}{v_0} \sqrt{gL_0}$ , isto é,

$$\begin{cases} Az_0^{-1} J_1(z_0) + Bz_0^{-1} Y_1(z_0) = \theta_0 \\ Az_0^{-1} J_2(z_0) + Bz_0^{-1} Y_2(z_0) = 0 \end{cases}$$

Pela regra de Cramer obtém-se

$$A = \frac{\theta_0 z_0^{-1} Y_2(z_0)}{z_0^{-2} [J_1(z_0) Y_2(z_0) - J_2(z_0) Y_1(z_0)]} = \frac{\theta_0 z_0 Y_2(z_0)}{J_1(z_0) Y_2(z_0) - J_2(z_0) Y_1(z_0)}$$

e

$$B = \frac{-\theta_0 z_0 J_2(z_0)}{J_1(z_0) Y_2(z_0) - J_2(z_0) Y_1(z_0)} .$$

Afirmação:  $J_1(z) Y_2(z) - J_2(z) Y_1(z) = -\frac{2}{\pi z} .$

Demonstração:

Usando a relação

$$\frac{d}{dz} [z^{-p} J_p(z)] = -z^{-p} J_{p+1}(z)$$

com  $p = 1$ , e também a relação

$$\frac{d}{dz} [z^{-1} Y_1(z)] = -z^{-1} Y_2(z)$$

( cf. observação 1 , abaixo ) , temos

$$\begin{aligned} J_1(z) Y_2(z) - J_2(z) Y_1(z) &= z [J_1(z) (z^{-1} Y_2(z)) - (z^{-1} J_2(z)) Y_1(z)] \\ &= -z [J_1(z) (z^{-1} Y_1(z))' - (z^{-1} J_1(z))' Y_1(z)] \\ &= -z [J_1(z) Y_1'(z) - J_1'(z) Y_1(z)] = -W(z) , \end{aligned}$$

onde  $W$  indica o determinante wronskiano das duas soluções  $J_1$  e  $Y_1$  da equação de Bessel de índice 1,  $z^2 y'' + zy' + (z^2 - 1)y = 0$ . Pelo Teorema de Abel,  $W(z)$  é uma solução de  $z^2 W'(z) + zW(z) = 0$  e, portanto, da forma

$$W(z) = \frac{D}{z} .$$

Determinamos o valor da constante  $D$ , fazendo o limite

$$D = zW(z) = \lim_{z \rightarrow 0} zW(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z [J_1(z) Y_1'(z) - J_1'(z) Y_1(z)]$$

Usando que  $J_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1}$  e

$$Y_1(z) = \frac{2}{\pi} \left[ \left( \ln \frac{z}{2} + \gamma \right) J_1(z) - \frac{1}{z} - \frac{z}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (H_n + H_{n+1})}{n!(n+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1} \right]$$

temos

$$J_1(z) \approx \frac{z}{2} , \quad J_1'(z) \approx \frac{1}{2} , \quad Y_1(z) \approx -\frac{2}{\pi z} \quad \text{e} \quad Y_1'(z) \approx \frac{2}{\pi z^2}$$

e, portanto,

$$D = \frac{2}{\pi} .$$

**Obs: 1º)** Para todo  $n$  natural valem

$$\frac{d}{dx} [x^n Y_n(x)] = x^n Y_{n-1}(x) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx} [x^{-n} Y_n(x)] = -x^{-n} Y_{n+1}(x) .$$

A razão é que para  $J_p$  valem estas fórmulas e  $Y_p$  pode ser definida por

$$Y_n(x) = \lim_{p \rightarrow n} \frac{J_p(x) \cos \pi p - J_{-p}(x)}{\operatorname{sen} \pi p} .$$

Ver *Watson, Treatise on the Theory of Bessel Functions*, pág. 66.

**2º)** Mais geralmente, para todo  $n$  natural vale

$$J_n(z) Y_{n+1}(z) - J_{n+1}(z) Y_n(z) = -\frac{2}{\pi z} .$$

Para demonstração ver *Watson, Treatise on the Theory of Bessel Functions*, pág. 77.

Conseqüência:  $A = -\frac{\pi}{2} \theta_0 z_0^2 Y_2(z_0)$ ,  $B = -\frac{\pi}{2} \theta_0 z_0^2 J_2(z_0)$  e

$$\theta = \frac{\pi}{2} \theta_0 z_0^2 z \left[ -Y_2(z_0) J_1(z) + J_2(z_0) Y_1(z) \right] .$$

Conseqüência: Se as constantes  $L_0$  e  $v_0$  são ajustadas para que  $z_0 = \frac{2}{v_0} \sqrt{gL_0}$  seja um zero de  $J_2$ , então  $B = 0$  e obtém-se a expressão mais simples

$$\theta = -\frac{\pi}{2} \theta_0 z_0^2 z Y_2(z_0) J_1(z) .$$

Em outras palavras, a solução é dada por

$$\theta(t) = -C \frac{1}{\sqrt{L_0 + v_0 t}} J_1 \left( \frac{2}{v_0} \sqrt{g(L_0 + v_0 t)} \right) ,$$

onde

$$C = \frac{\pi}{2} \frac{4gL_0}{v_0^2} \theta_0 Y_2 \left( \frac{2}{v_0} \sqrt{gL_0} \right) .$$

Para simplificar, vamos analisar com mais detalhe esta situação mais simples. Notamos que:

1. O pêndulo passa pela posição  $\theta = 0$  quando  $\frac{d\theta}{dz} = 0$ .
2. Ocorre  $\frac{d\theta}{dz} = 0$ , i.e., alongação máxima, quando  $\frac{d\theta}{dz} = 0$ , ou seja, para  $J_2(z) = 0$ .
3. Definimos um “quarto-período” como sendo o tempo que o pêndulo leva para deslocar-se de  $\theta = 0$  até  $\theta' = 0$ , ou vice-versa. Os “quarto-períodos” podem ser encontrados olhando para os zeros de  $J_1(z)$  e  $J_2(z)$ .

A figura ao lado mostra os gráficos das funções  $J_1(\sqrt{x})$  e  $J_2(\sqrt{x})$ . As diferenças entre os zeros de uma da outra dão a medida dos “quarto-períodos” tomando  $\frac{v_0}{4g}$  como unidade de comprimento. Esta conclusão segue da fórmula

$$\theta(t) = -C \frac{1}{\sqrt{L_0 + v_0 t}} J_1 \left( \frac{2}{v_0} \sqrt{g(L_0 + v_0 t)} \right)$$

demonstrada anteriormente. Os quarto-períodos podem ser obtidos das tabelas de zeros das funções de Bessel.

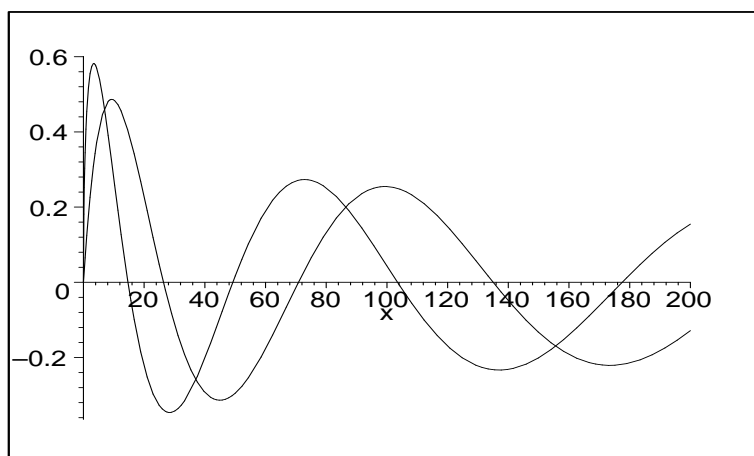


Figure 1: Funções  $J_0(\sqrt{x})$  e  $J_1(\sqrt{x})$

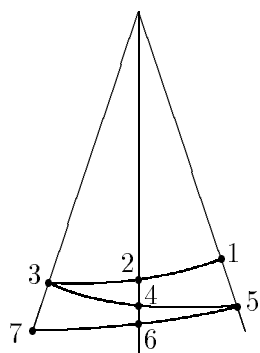
Os 8 primeiros zeros da função de Bessel  $J_1$  são:

$$\{\alpha_{1,n}\} = 3.83171, 7.01559, 10.1735, 13.3237, 16.4706, 19.6159, 22.7601, 25.9037$$

Os 8 primeiros zeros da função de Bessel  $J_2$  são:

$$\{\alpha_{2,n}\} = 5.13562, 8.41724, 11.6198, 14.796, 17.9598, 21.117, 24.2701, 27.4206$$

A partir daí calculamos os quartos-períodos (medindo os intervalos de tempo em múltiplos de  $\frac{v_0}{4g}$ , i.e., tomando  $\frac{v_0}{4g}$  como unidade de tempo):



$$\alpha_{1,2}^2 - \alpha_{2,1}^2 = 22.8438, \text{ tempo gasto para ir de 1 até 2.}$$

$$\alpha_{2,2}^2 - \alpha_{1,2}^2 = 21.6315, \text{ tempo gasto para ir de 2 até 3.}$$

$$\alpha_{1,3}^2 - \alpha_{2,2}^2 = 32.6495, \text{ tempo gasto para ir de 3 até 4.}$$

$$\alpha_{2,3}^2 - \alpha_{1,3}^2 = 31.5213, \text{ tempo gasto para ir de 4 até 5.}$$

$$\alpha_{1,4}^2 - \alpha_{2,3}^2 = 42.5001, \text{ tempo gasto para ir de 5 até 6.}$$

$$\alpha_{2,4}^2 - \alpha_{1,4}^2 = 41.3994, \text{ tempo gasto para ir de 6 até 7.}$$

**Comportamento observado:** Uma oscilação em direção à posição de equilíbrio demora mais tempo que a oscilação para fora que a antecede e também mais tempo que a oscilação para fora que se segue.