Curvas de Perseguição

PROBLEMA. Suponhamos que no instante $t_0 = 0$ uma lebre sai correndo ao longo do eixo Y com velocidade uniforme v. No mesmo instante, uma raposa parte do ponto $\big(a, 0\big)$ em perseguição à lebre. Suponhamos que a raposa corre com velocidade uniforme b, mas está constantemente corrigindo seu rumo, de modo que a cada instante corre diretamente em direção ao ponto em que a lebre se encontra. Consideremos o problema de determinar:

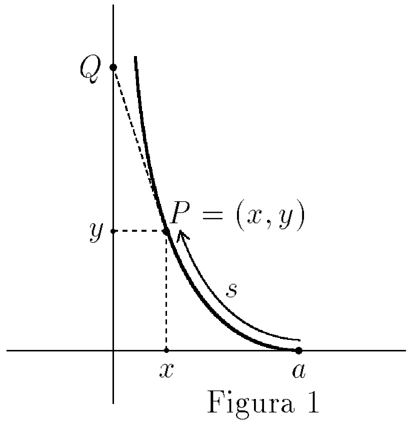

Figura 1

(i) a curva que dá a trajetória percorrida pela raposa;

(ii) supondo $b > v$, qual a distância percorrida pela lebre antes de ser capturada pela raposa;

(iii) supondo $b = v$, qual o valor para o qual tende a distância entre a lebre e a raposa, quando $t \longrightarrow \infty$.

Solução:

No instante t a lebre ocupa a posição $Q = \big(0, v\,t\big)$. Seja $P = \big(x, y\big)$ a posição da raposa neste mesmo instante. O segmento PQ é tangente à trajetória no ponto P. Portanto

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{v\,t - y}{x} \ ,$$

ou, equivalentemente,

$$x\,\frac{dy}{dx} - y = -v\,t. \tag{1}$$

Queremos deduzir uma equação para a trajetória da raposa envolvendo somente as variáveis x e y. Por isto, queremos elminar a variável t da equação (1). Para isto, derivamos (1) em relação a x, obtendo

$$x\,\frac{d^2y}{dx^2} = -v\,\frac{dt}{dx} \ . \tag{2}$$

Precisamos usar ainda a informação que temos sobre a velocidade da raposa. Seja s o espaço percorrido pela raposa, isto é, o comprimento do arco que vai do ponto $\big(a, 0\big)$ ao ponto $P = \big(x, y\big)$. A velocidade da raposa é

$$\frac{ds}{dt} = b \ .$$

Pela regra da cadeia,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds}\,\frac{ds}{dx} = \frac{1}{b}\,\frac{ds}{dx}\ .$$

Por outro lado,

$$\frac{ds}{dx} = \pm\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}\ ,$$

conforme explicação que pode ser vista aqui. No presente exemplo,

$$\frac{ds}{dx} = -\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}\ .$$

O sinal é menos, pois s cresce quando x decresce. Substituindo estas expressões em (2), obtém-se

$$x\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{v}{b}\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}\ . \qquad (3)$$

Esta é uma EDO de 2ª ordem redutível à 1ª ordem, pois não envolve y explicitamente. Pela substituição

$$z = \frac{dy}{dx}\ ,$$

(3) transforma-se em

$$x\,\frac{dz}{dx} = \frac{v}{b}\,\sqrt{z^2+1}\ . \qquad (4)$$

Separando as variáveis e integrando,

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} = \frac{v}{b}\int \frac{dx}{x}\ .$$

Fazendo a substituição trigonométrica $z = \tan v$,

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} = \int \frac{\sec^2 v}{\sec v}\,dv = \int \sec v\,dv = \ln\big(\tan v + \sec v\big) = \ln\big(z + \sqrt{z^2+1}\,\big)\ .$$

Logo a solução geral de (4) é

$$\ln\big(z + \sqrt{z^2+1}\,\big) = \frac{v}{b}\,\ln x + C_1\ .$$

Mas no instante inicial $t_0 = 0$ a raposa corria em direção à origem. Logo temos a condição inicial

$$z(0) = \frac{dy}{dx}(a) = 0\ .$$

Portanto $C_1 = \dfrac{v}{b} \ln a$ e

$$\ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\,\right) = \frac{v}{b} \ln \frac{x}{a} \; .$$

Segue que

$$z + \sqrt{z^2+1} = \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha} \; ,$$

onde

$$\alpha = \frac{v}{b} \; .$$

Para isolar z, elevamos ao quadrado os dois lados da igualdade

$$\sqrt{z^2+1} = \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha} - z \; ,$$

obtendo

$$z^2 + 1 = \left(\frac{x}{a}\right)^{2\,\alpha} - 2\,z\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha} + z^2 \; .$$

Segue que

$$2\,z\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha} = \left(\frac{x}{a}\right)^{2\,\alpha} - 1 \; ,$$

ou seja,

$$z = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha} - \left(\frac{a}{x}\right)^{\alpha}\right] .$$

Conclusão: A trajetória da raposa é obtida integrando

$$y = \int \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha} - \left(\frac{a}{x}\right)^{\alpha}\right] dx \; .$$

Caso $b > v$**:** Neste caso $0 < \alpha < 1$ e

$$y = \frac{x^{1+\alpha}}{2(1+\alpha)a^{\alpha}} - \frac{a^{\alpha}x^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)} + C_2 \; .$$

Usando a condição inicial $y(a) = 0$, obtém-se

$$C_2 = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1+\alpha}\right] = \frac{a\,\alpha}{1-\alpha^2} \; .$$

A solução é dada por

$$y = \frac{x^{1+\alpha}}{2(1+\alpha)a^{\alpha}} - \frac{a^{\alpha}x^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)} + \frac{a\,\alpha}{1-\alpha^2}$$

e está bem definida para $0 \leq x \leq a$. Neste caso

$$y(0) = \frac{a\,\alpha}{1-\alpha^2} = \frac{a\,b\,v}{b^2 - v^2}$$

dá a distância percorrida pela lebre antes de ser capturada pela raposa.

Caso $b = v$ **:** Neste caso $\alpha = 1$ e

$$y = \int \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a} - \frac{a}{x}\right) dx = \frac{x^2}{4\,a} - \frac{a\,\ln x}{2} + C_2 \ .$$

Usando a condição inicial $y(a) = 0$, obtém-se

$$C_2 = a\,\ln a - \frac{a}{4} \ .$$

A solução então é dada por

$$y = \frac{x^2 - a^2}{4\,a} - a\,\ln\frac{x}{a} \ .$$

A distância $\overline{PQ}$ vale

$$\overline{PQ} = x\,|\sec\theta| = x\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = x\sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a} - \frac{a}{x}\right)\right]^2} \ ,$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{a} - a\right)^2} \ .$$

Nota-se que a medida que x decresce para 0, a distância $\overline{PQ}$ também decresce, tendendo para o limite

$$\lim_{t\to\infty} \overline{PQ} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2} = \frac{a}{2} \ .$$