# Cabo Suspenso

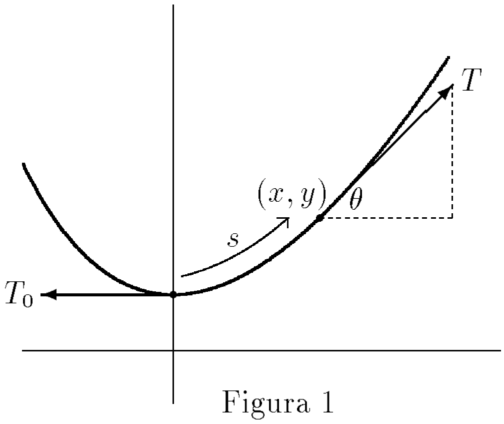



Figura 1

**PROBLEMA 1.** Consideremos o problema de determinar a forma assumida por um cabo homogêneo flexível, suspenso pelas duas extremidades, sob a ação de seu próprio peso.

**Solução:**

Evidentemente, quando atingir o equilíbrio, o cabo vai ficar, todo ele, contido em um plano, o plano vertical que passa por suas duas extremidades. Ficamos, então, com um problema no plano. Coloquenos, neste plano, um sistema de coordenadas em que o eixo $Y$ seja vertical e passe pelo ponto mais baixo $(0, y_0)$ do cabo. A força de tensão é variável ao longo do cabo. A tensão em um ponto $P$ do cabo depende, entre outras grandezas, do peso da porção de cabo acima do ponto $P$.

Consideremos um trecho do cabo, de comprimento $s$, entre o ponto de coordenadas $(x, y)$ e o ponto mais baixo do cabo. Este trecho está em equilíbrio sob a ação de 3 forças: o seu peso, a tensão $T_0$ no ponto mais baixo e a tensão $T$ no ponto mais alto. O fato do cabo ser flexível se expressa matematicamente dizendo que a força de tensão tem sempre a direção tangente à curva. Isto, porque não há forças internas, o cabo não oferece nenhuma resistência a curvar-se na direção da tensão. A soma destas 3 forças que agem sobre o trecho considerado do cabo é nula. Considerando as componentes horizontais, temos

$$T_0 = T\,\cos\theta \tag{1}$$

e, igualando a componentes vertical de $T$ ao peso do trecho, temos

$$T\,\mathrm{sen}\,\theta = \lambda\, g\, s\ , \tag{2}$$

onde $\lambda$ é a densidade linear do cabo.

Dividindo (2) por (1), obtemos

$$\tan\theta = \frac{\lambda\, g\, s}{T_0}\ . \tag{3}$$

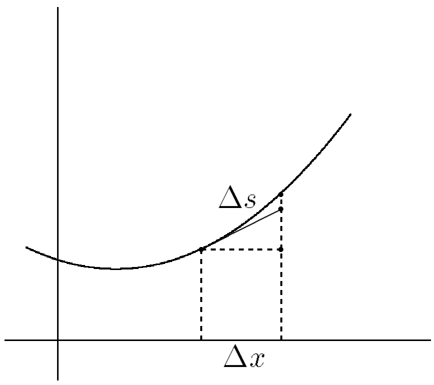
Estamos procurando a função $y = y(x)$ que dá a forma assumida pelo cabo. A condição (3) nos diz que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda\, g\, s}{T_0}\ . \tag{4}$$

Note que $s = s(x)$ é função de $x$. A igualdade acima não é ainda uma EDO, pois 3 variáveis estão envolvidas. Para superar esta dificuldade, derivamos (3) em relação a $x$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\lambda\, g}{T_0}\,\frac{ds}{dx}\ . \tag{5}$$

Vamos aqui abrir um parênteses para revisar uma fórmula do cálculo, a fórmula (6) abaixo.




A figura ao lado mostra um pequeno segmento de comprimento $\Delta x$ a partir do ponto $x$. Queremos expressar o pequeno comprimento de arco $\Delta s$, medido sobre a curva. A idéia é aproximar $\Delta s$ pelo comprimento medido sobre a reta tangente. Chamando de $\theta$ o ângulo entre esta tangente e o o eixo $X$, temos

$$\Delta x \approx \big(\Delta s\big)\cos\theta\ .$$

Logo

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} \approx \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta = \sqrt{1+\tan^2\theta}\ .$$

Fazendo $\Delta x \longrightarrow 0$, obtemos

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{6}$$

Substituindo (6) em (5), obtemos

$$y'' = \frac{\lambda\, g}{T_0}\sqrt{1+\big(y'\big)^2}\ , \tag{7}$$

que é uma EDO de segunda ordem redutível à primeira ordem. Chamando $z = y'$, temos

$$\frac{dz}{dx} = a\sqrt{1+z^2}\ , \tag{8}$$

onde $a = \dfrac{\lambda g}{T_0}$. A EDO (8) é separável, Separando as variáveis e integrando, temos

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = a \int dx\ .$$

Fazendo a substituição $z = \tan t$, $dz = \sec^2 t\, dt$,

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{\sec^2 t\, dt}{\sec t} = \int \sec t\, dt$$

$$= \ln|\tan t + \sec t| = \ln\left|z + \sqrt{1+z^2}\right|\ .$$

Logo

$$\ln\left|z + \sqrt{1+z^2}\right| = a\,x + C_1$$

Usando que a tangente no ponto mais baixo da curva é horizontal, isto é, $z(0) = y'(0) = 0$, deduzimos que $C_1 = 0$. Logo

$$\ln\left|z + \sqrt{1+z^2}\right| = a\,x\ ,$$

ou seja,

$$z + \sqrt{1+z^2} = \pm e^{x}\ .$$

Se nos concentrarmos no lado direito do cabo, onde $z = y' > 0$, temos

$$z + \sqrt{1+z^2} = e^{a\,x}\ .$$

Podemos isolar $z$,

$$\begin{aligned} \sqrt{1+z^2} &= e^{a\,x} - z \\ 1 + z^2 &= e^{2\,a\,x} - 2\,z\,e^{a\,x} + z^2 \\ 1 &= e^{2\,a\,x} - 2\,z\,e^{a\,x} \\ z &= \frac{e^{2\,a\,x} - 1}{2\,e^{a\,x}x} = \frac{e^{a\,x} - e^{-a\,x}}{2}\ . \end{aligned}$$

Logo

$$y' = \frac{e^{a\,x} - e^{-a\,x}}{2}$$

e

$$y = \frac{e^{a\,x} x + e^{-a\,x}}{2\,a\,x} + C_2 = \frac{1}{a}\cosh(a\,x) + C_2 \ .$$

Concluímos que a posição de equilíbrio do cabo é dada por

$$\boxed{ay = \cosh(a\,x) + C_2}$$

isto, é, uma translação vertical da curva $ay = a\,\cosh(a\,x)$, que nada mais é do que uma mudança de escala (uma ampliação ou redução) da curva

$$y = \cosh x \ , \tag{9}$$

já que provém dela através da tranformação $(x, y) \longmapsto (a\,x, a\,y)$.

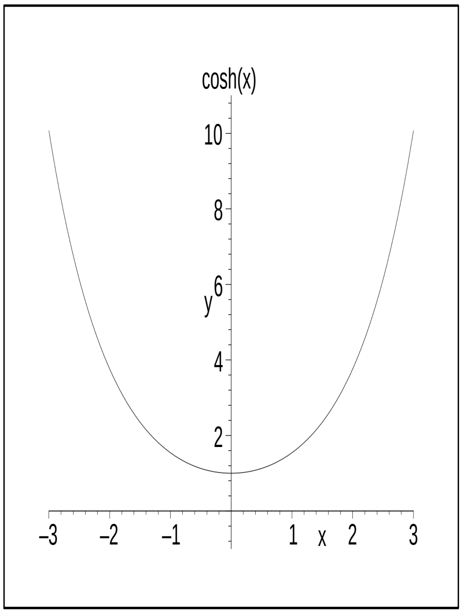
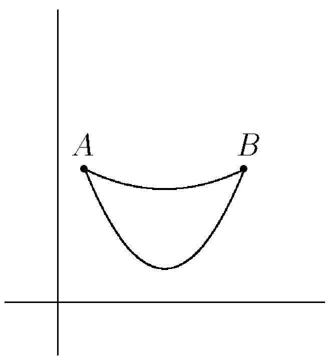



Figure 1: Função $\cosh(x)$

A curva $y = \cosh x$ chama-se **catenária**, do latim *catena*, que significa cadeia ou corrente. A catenária (9), portanto, é a forma assumida por um cabo flexível suspenso, a menos de um fator de ampliação ou redução. Fixados 2 pontos $A$ e $B$ como na figura ao lado, consideremos 2 cabos flexíveis de comprimentos diferentes suspensos por estes 2 pontos. A forma assumida pelo cabo de menor comprimento, que ficou mais acima é a de um pequeno trecho da catenária (9), bem próximo ao ponto mais baixo, submetido a uma grande ampliação. Já a forma assumida pelo cabo de maior comprimento é a de um trecho muito mais longo da catenária (9), sujeito a uma pequena ampliação ou até mesmo a uma redução.



**PROBLEMA 2.** Determine a forma assumida por um cabo de sustentação de um ponte pênsil de densidade horizontal constante, supondo a massa do cabo desprezível face a massa da ponte que ele sustenta.

**Solução:**

Consideremos, novamente na Figura 1, as 3 forças agindo no trecho do cabo entre seu ponto pais baixo e o ponto $(x, y)$. A única diferença é que agora em lugar de considerar o peso do techo de cabo, devemos considerar o peso do trecho da ponte que esta sob o trecho do cabo. Em outras palavras, a condição (1) continua a mesma, mas em lugar de (2) devemos considerar agora a condição

$$T \operatorname{sen} \theta = \lambda \, g \, x \ , \tag{10}$$

onde $\lambda$ designa agora a densidade horizontal da ponte. Dividindo (10) por (1),

$$\tan \theta = \frac{\lambda \, g \, x}{T_0} \ . \tag{11}$$

Logo a função $y = y(x)$ que dá a forma do cabo satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda \, g \, x}{T_0} \ .$$

Trata-se de uma equação diferencial de primeira ordem separável muito simples, cuja solução geral é

$$y = \frac{\lambda \, g \, x^2}{2 \, T_0} + C \ .$$

CONCLUSÃO: Um cabo de sustentação de uma ponte pênsil assume a forma de um arco de parábola.