

Seção 4: Equações Exatas – Fator Integrante

Introduzimos a idéia de equação exata, através de dois exemplos simples. Note que nesses dois exemplos, além de exata, a EDO também é separável, podendo alternativamente ser resolvida pelo método da Seção 3.

Exemplo 1. Seja a equação diferencial

$$xy' + y = 0. \quad (1)$$

A EDO (1) pode ser reescrita como

$$(xy)' = 0, \quad (2)$$

que é equivalente a

$$xy = C, \quad (3)$$

Portanto a solução geral de (1) é a família de hipérbolas

$$y = \frac{C}{x},$$

definidas nos intervalos $I = (0, +\infty)$ ou $J = (-\infty, 0)$, tendo ainda a solução $y = 0$ definida em todo \mathbb{R} .

Exemplo 2. A equação diferencial

$$y y' = x + 1 \quad (4)$$

pode ser reescrita como

$$\left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{x^2}{2} - x\right)' = 0, \quad (5)$$

que é equivalente a

$$\frac{1}{2}y^2 - \frac{x^2}{2} - x = C, \quad (6)$$

Então, (6) é a solução geral de (4) em forma implícita. Esta solução geral pode ser reescrita como

$$y = \pm\sqrt{x^2 + 2x + C}.$$

Observação. O que as equações (1) e (4) têm em comum é que podem ser reescritas na forma

$$\frac{d}{dx}[F(x, y)] = 0, \quad (7)$$

para uma conveniente função de duas variáveis $F(x, y)$. A solução geral de (7) é

$$F(x, y) = C.$$

Definição. Uma EDO de primeira ordem **exata** é uma equação da forma (7), isto é, da forma

$$F_x(x, y) + F_y(x, y) y' = 0, \quad (8)$$

Para alguma função de duas variáveis $F(x, y)$. Pelo exposto acima, a solução geral de (7) ou (8) é a família $F(x, y) = C$.

Exemplo 3. A equação diferencial

$$xy y' + \frac{y^2}{2} = \operatorname{sen} x \quad (9)$$

pode ser reescrita como

$$\frac{y^2}{2} - \operatorname{sen} x + xy y' = 0.$$

Para encaixá-la no modelo (8), precisamos verificar se existe uma função de duas variáveis $F(x, y)$ tal que

$$F_x(x, y) = \frac{y^2}{2} - \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad F_y(x, y) = xy.$$

De fato, existe,

$$F(x, y) = \frac{xy^2}{2} + \cos x.$$

Logo a solução geral de (9) é

$$\frac{xy^2}{2} + \cos x = C.$$

Observação Fundamental. Segue da discussão acima que uma EDO

$$M(x, y) + N(x, y) y' = 0, \quad (10)$$

é exata se existir uma conveniente função de duas variáveis $F(x, y)$ satisfazendo

$$M(x, y) = F_x(x, y) \quad \text{e} \quad N(x, y) = F_y(x, y). \quad (11)$$

Neste caso, a solução geral da EDO (10) é a família $F(x, y) = C$.

Notação. Com o mesmo significado de (10) são usuais as notações

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (12)$$

e

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0. \quad (13)$$

Não vale a pena perdermos tempo tentando atribuir um sentido a dx e dy isolados. O melhor é considerarmos que (13) é simplesmente uma notação que significa (12).

Questão Prática. Dada uma EDO em forma (10), ou equivalentemente (12) ou (13), como reconhecer se ela é exata? Se a equação for exata, é porque existe uma função $F(x, y)$ satisfazendo (11). Segue que $M_y = F_{xy}$ e $N_x = F_{yx}$. Mas sabemos do Cálculo que $F_{xy} = F_{yx}$. Obtemos assim o seguinte teste.

Teste. Para que a EDO (13) seja exata é necessário que seja satisfeita a condição

$$M_y = N_x. \quad (14)$$

conhecida como **condição de Euler**.

Observações. 1– Não estamos afirmando que a condição (14) seja suficiente para que a EDO (13) seja exata, mas apenas que ela é necessária. Em outras palavras, verificado que vale (13) devemos passar a procurar pela função $F(x, y)$, mas se (14) não for válida, paramos por aí, pois a função $F(x, y)$ não existirá.

2– Embora a condição (14) não seja suficiente para assegurar que a EDO em questão é exata, na prática, para as EDO's que normalmente encontraremos, se a condição (14) for cumprida, dificilmente a EDO deixará de ser exata. Em particular, toda a vez que o domínio das funções M e N for todo o \mathbb{R}^2 a condição (14) é também suficiente.

3– No Cálculo foi estudada a noção de diferencial exata, no contexto de integrais de linha independentes do caminho. Estas duas noções estão intimamente relacionadas. De fato, a diferencial $M(x, y) dx + N(x, y) dy$ é exata se e somente se ela provém de um potencial, isto é, se existe uma função de duas variáveis $F(x, y)$ para a qual $dF = M(x, y) dx + N(x, y) dy$. É fácil ver que isto acontece se e somente se a EDO $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ for exata.

Exemplo 4. Resolver a equação diferencial

$$(x - y^2) y' = x - y. \quad (15)$$

Para verificar se é exata, o mais simples é reescrever a equação na forma (13), ou seja,

$$(y - x) dx + (x - y^2) dy = 0.$$

Temos que

$$M = y - x \quad \text{e} \quad N = x - y^2$$

satisfazem

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 1 = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Passamos, então, a procurar $F(x, y)$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = y - x \\ \frac{\partial F}{\partial y} = x - y^2 \end{cases} \quad (16)$$

Da primeira equação segue que

$$F(x, y) = xy - \frac{x^2}{2} + \varphi(y),$$

onde $\varphi(y)$ depende só de y . Derivando em relação a y , obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + \varphi'(y).$$

Comparando com a segunda equação de (16), concluímos que

$$\varphi'(y) = -y^2$$

e

$$\varphi(y) = -\frac{y^3}{3}.$$

Nesta última, a constante e integração é tomada como 0, pois basta-nos encontrar **uma** $F(x, y)$, não estamos interessados na mais geral. Então, uma possibilidade é

$$F(x, y) = xy - \frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3}.$$

A solução geral de (15) é

$$xy - \frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} = C.$$

Fator Integrante

Às vezes uma equação diferencial $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ não é exata, mas podemos encontrar uma função $\mu(x, y) \neq 0$, chamada de um **fator integrante**, tal que $\mu(x, y)M(x, y) + \mu(x, y)N(x, y)y' = 0$ seja exata.

Exemplo 5. Consideremos a equação diferencial

$$x^2 y' + (1 - x^2)y^2 = 0. \quad (17)$$

Rescrevendo como

$$(1 - x^2)y^2 dx + x^2 dy = 0,$$

temos $M = (1 - x^2)y^2$ e $N = x^2$, de modo que $M_y = 2(1 - x^2)y$ e $N_x = 2x$. Como $M_y \neq N_x$, a equação (17) não é exata. No entanto, multiplicando pelo fator integrante

$$\mu(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2},$$

obtemos a EDO

$$\left(-1 + \frac{1}{x^2}\right)dx + \frac{1}{y^2}dy = 0, \quad (18)$$

para a qual, agora, $M = -1 + \frac{1}{x^2}$ e $N = \frac{1}{y^2}$ satisfazem a condição (14).

Obs. Quando multiplicamos pelo fator integrante, eliminamos a possibilidade de y se anular, por causa do termo y^2 no denominador. Caso $y = 0$ seja uma solução da equação original (17), ela pode ter sido perdida. Portanto é preciso verificar separadamente se $y = 0$ é uma solução de (17). É fácil ver que é. Em outras palavras, as soluções de (17) e (18) são as mesmas, a menos desta solução particular. A equação (18) não faz sentido para $y = 0$.

Precisamos encontrar $F(x, y)$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = -1 + \frac{1}{x^2} \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{y^2} \end{cases}$$

Da primeira segue que F é da forma

$$F(x, y) = -x - \frac{1}{x} + \varphi(y).$$

Derivando em relação a y , temos $F_y = \varphi'(y)$. Logo, $\varphi'(y) = \frac{1}{y^2}$ e $\varphi(y) = -\frac{1}{y}$. Finalmente $F(x, y) = -x - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ e a solução geral em forma implícita é

$$-x - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = C.$$

Podemos explicitar

$$y = -\frac{x}{x^2 + Cx + 1}.$$

Esta é a solução geral de (17), mas ainda tem a solução $y = 0$ que não faz parte desta família para nenhum valor particular de C .

A dificuldade com o método do fator integrante é encontrar este fator integrante. Encontrar um fator integrante para

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

é encontrar uma função de duas variáveis $\mu = \mu(x, y)$ tal que

$$\mu(x, y) M(x, y) dx + \mu(x, y) N(x, y) dy = 0$$

seja exata. É preciso que

$$\frac{\partial}{\partial y} [\mu(x, y) M(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x} [\mu(x, y) N(x, y)].$$

Esta última equação é uma equação diferencial parcial

$$-N \frac{\partial \mu}{\partial x} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} + (M_y - N_x) \mu = 0,$$

Encontrar uma solução não trivial μ para esta equação diferencial parcial é, em princípio, mais difícil do que resolver a EDO original. Por esta razão o que se faz na prática é procurar se existem fatores integrantes de alguns tipos especiais. Concentraremos nossa atenção em fatores integrantes dependentes de apenas uma das variáveis. Existem métodos para procurar fatores integrantes de muitos outros tipos, mas não nos deteremos neste estudo, pois por mais tipos sejam considerados, nunca esgotaremos todas as possibilidades.

Exemplo 6. Consideremos a equação diferencial

$$xy + x^2 + 1 + (x^2 + x) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (19)$$

Reescrevemos a EDO como $(xy + x^2 + 1)dx + (x^2 + x)dy = 0$ e multiplicamos por $\mu = \mu(x)$.

$$(xy + x^2 + 1)\mu(x) dx + (x^2 + x)\mu(x)dy = 0. \quad (20)$$

A condição necessária para que esta nova equação seja exata é

$$\left((xy + x^2 + 1)\mu(x) \right)_y = \left((x^2 + x)\mu(x) \right)_x,$$

ou seja,

$$x\mu(x) = (2x + 1)\mu(x) + (x^2 + x)\mu'(x).$$

Portanto, para encontrar o fator integrante $\mu(x)$ devemos resolver uma EDO. Só que é uma EDO muito mais simples que a EDO original (19). Trata-se de uma EDO separável que, depois das simplificações, toma a forma

$$x \frac{d\mu}{dx} = -\mu.$$

Separando as variáveis e integrando, temos

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = - \int \frac{dx}{x}, \quad \ln \mu = - \ln x.$$

Portanto um fator integrante é $\mu = \frac{1}{x}$. Multiplicando a equação diferencial (20) por este fator integrante, obtemos

$$(y + x + x^{-1})dx + (x + 1) dy = 0.$$

Esta última EDO deve ser exata. Para resolvê-la precisamos encontrar uma função $F(x, y)$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = y + x + x^{-1} \\ \frac{\partial F}{\partial y} = x + 1 \end{cases} \quad (21)$$

Da primeira equação de (21) segue que

$$F(x, y) = xy + \frac{x^2}{2} + \ln x + \varphi(y),$$

onde $\varphi(y)$ depende apenas de y . Derivando em relação a y ,

$$F_y(x, y) = x + \varphi'(y).$$

Comparando com a segunda equação do sistema (21), obtemos $\varphi'(y) = 1$ e $\varphi(y) = y + K$, onde K é constante. Como estamos interessados apenas em encontrar uma $F(x, y)$

satisfazendo (21) e não a mais geral possível, podemos escolher $\varphi(y) = y$. Logo a solução geral da EDO (19) é

$$xy + \frac{x^2}{2} + \ln x + y = C.$$

Exemplo 7. Consideremos a equação diferencial

$$y \cos x + (y + 2)(\operatorname{sen} x) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (22)$$

(Obs. Esta EDO é separável, mas vamos resolvê-la usando um fator integrante). Reescrevemos (22) como

$$y(\cos x) dx + (y + 2)(\operatorname{sen} x) dy = 0. \quad (23)$$

Começamos procurando um fator integrante $\mu = \mu(x)$, dependendo só de x . Multiplicando (23) por $\mu(x)$, encontramos

$$y(\cos x)\mu(x) dx + (y + 2)(\operatorname{sen} x)\mu(x) dy = 0. \quad (24)$$

Aplicando a condição de Euler, necessária para que seja exata, temos

$$(y(\cos x)\mu(x))_y = ((y + 2)(\operatorname{sen} x)\mu(x))_x$$

e, portanto,

$$(\cos x)\mu(x) = (y + 2)(\mu(x) \cos x + \mu'(x) \operatorname{sen} x) \quad (25)$$

É impossível eliminar y da condição (25). Segue que não existe nenhuma função $\mu = \mu(x)$, dependendo só de x que satisfaça (24). De fato, se existisse, de (25), viria

$$y + 2 = \frac{\mu(x) \cos x}{\mu(x) \cos x + \mu'(x) \operatorname{sen} x}$$

e isto é impossível, pois o lado esquerdo depende só de y , enquanto que o lado direito depende só de x . Note que aqui x e y são variáveis independentes. Quando resolvemos uma EDO procuramos y como função de x , mas por enquanto estamos somente examinando os coeficientes da equação e, portanto, x e y são independentes uma da outra. A conclusão é que (22) não admite fator integrante dependendo só de x .

Passamos agora a procurar um fator integrante dependendo só de y . Multiplicando (23) por $\mu(y)$, encontramos

$$y(\cos x)\mu(y) dx + (y + 2)(\operatorname{sen} x)\mu(y) dy = 0. \quad (26)$$

Para que (26) seja exata, é necessário que

$$(y(\cos x)\mu(y))_y = ((y + 2)(\operatorname{sen} x)\mu(y))_x.$$

Assim, devemos ter

$$(\mu(y) + y\mu'(y))\cos x = (y + 2)\mu(y)\cos x.$$

Aqui x pode ser eliminado, resultando a EDO $y\mu'(y) = (y + 1)\mu(y)$ para determinar y . Por separação de variáveis, temos

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \left(1 + \frac{1}{y}\right) dy \quad \text{e} \quad \ln \mu = y + \ln y = \ln(y e^y).$$

O fator integrante é $\mu = \mu(y) = ye^y$. Multiplicando (24) por $\mu(y) = ye^y$ ou, equivalentemente, substituindo $\mu = \mu(y) = ye^y$ em (24), encontramos a equação exata

$$y^2 e^y (\cos x) dx + (y + 2)y e^y (\sin x) dy = 0.$$

Precisamos encontrar uma função $F(x, y)$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = y^2 e^y (\cos x) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = (y + 2)y e^y (\sin x) \end{cases} \quad (27)$$

Da primeira equação de (27) segue que

$$F(x, y) = y^2 e^y (\sin x) + \varphi(y),$$

onde $\varphi(y)$ depende apenas de y . Derivando em relação a y ,

$$F_y(x, y) = (y + 2)y e^y (\sin x) + \varphi'(y).$$

Comparando com a segunda equação do sistema (27), obtemos $\varphi'(y) = 0$ e, $\varphi(y)$ é constante. Como estamos interessados apenas em encontrar uma $F(x, y)$ satisfazendo (27) e não a mais geral possível, podemos escolher $\varphi(y) = 0$. Logo a solução geral da EDO (22) é

$$y^2 e^y (\sin x) = C.$$

Fator integrante da forma $\mu = x^a y^b$ (leitura opcional)

Dentre muitas possibilidades, vamos considerar um caso de fator integrante envolvendo duas variáveis. O objetivo é apenas o de ilustrar.

Exemplo 8. Consideremos a equação diferencial

$$(-4x^2 y - 2x y^2) dx + (2x^3 - 3x y) dy = 0. \quad (28)$$

Multiplicando a EDO por $\mu = x^a y^b$, obtemos

$$(-4x^{a+2} y^{b+1} - 2x^{a+1} y^{b+2}) dx + (2x^{a+3} y^b - 3x^{a+1} y^{b+1}) dy = 0.$$

A condição para que esta equação seja exata é

$$-4(b + 1)x^{a+2} y^b - 2(b + 2)x^{a+1} y^{b+1} = 2(a + 3)x^{a+2} y^b - 3(a + 1)x^a y^{b+1}.$$

A seguir igualamos os coeficientes dos termos semelhantes de igualdade acima. Um termo que apareça só de um lado, consideramos que parece também do outro, mas com coeficiente 0. Obtemos

$$\begin{cases} -4(b+1) = 2(a+3) \\ -2(b+2) = 0 \\ -3(a+1) = 0 \end{cases}$$

Este sistema tem solução $a = -1$, $b = -2$, que nos dá o fator integrante $\mu = x^{-1}y^{-2}$. Precisamos verificar separadamente se $y = 0$ é uma solução de (28), pois, se for, ela poderá ser perdida ao multiplicarmos a equação por μ . É fácil ver que é.

Multiplicando (28) por $\mu = x^{-1}y^{-2}$, obtemos

$$(-4xy^{-1} - 2)dx + (2x^2y^{-2} - 3y^{-1})dy = 0,$$

que deve ser exata.

Precisamos encontrar $F(x, y)$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = -4xy^{-1} - 2 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2y^{-2} - 3y^{-1} \end{cases}$$

Segue da primeira equação que

$$F(x, y) = -2x^2y^{-1} - 2x + \varphi(y).$$

Derivando em relação a y , temos

$$F_y(x, y) = 2x^2y^{-2} + \varphi'(y).$$

Logo $\varphi'(y) = -3y^{-1}$, isto é, $\varphi(y) = -3 \ln y$. Logo $F(x, y) = -2x^2y^{-1} - 2x - 3 \ln y$ e a solução da EDO (28) é

$$2x^2y^{-1} + 2x + 3 \ln y = C, \quad y = 0.$$