Seção 5: Equações Lineares de 1ª Ordem

Definição. Uma EDO de 1ª ordem é dita *linear* se for da forma

$$y' + f(x)\,y = g(x)\,. \tag{1}$$

A EDO linear de 1ª ordem é uma equação do 1º grau em y e em y'. Qualquer dependência mais complicada é exclusivamente na variável independente x.

Justificativa para o nome. Consideremos a transformação que a cada função $y = y(x)$ associa uma nova função $L(y) = y' + f(x)\,y$. Por exemplo, dada a EDO linear $y' + x^2y = e^x$, consideramos a transformação

$$y \longmapsto L(y) = y' + x^2y\,.$$

Temos, $L\big(\operatorname{sen} x\big) = \cos x + x^2 \operatorname{sen} x\,.$ A transformação $y \longmapsto L(y)$ é lnear, isto, é,

$$\begin{array}{rcl} L(y_1 + y_2) & = & L(y_1) + L(y_2) \\ L(cy) & = & cL(y) \end{array}$$

Assim, uma equação diferencial linear é uma equação do tipo $L(y) = g(x)$, onde L é um *operador diferencial linear de 1ª ordem.*

Método de Resolução. Uma EDO linear $y' + f(x)\,y = g(x)$ admite sempre um fator integrante dependendo somente da variável x. De fato, temos

$$\frac{dy}{dx} + f(x)\,y - g(x) = 0\,,$$

que pode ser reescrita como

$$\big(f(x)\,y - g(x)\big)dx + dy = 0\,.$$

Multiplicando por $\mu(x)$, temos

$$\big(f(x)\,y - g(x)\big)\mu(x)\,dx + \mu(x)\,dy = 0\,.$$

A condição necessária para que esta última equação seja exata é que

$$\Big(\big(f(x)\,y - g(x)\big)\mu(x)\Big)_y = \Big(\mu(x)\Big)_x\,,$$

ou seja,

$$f(x)\,\mu(x) = \mu'(x)\,.$$

Separado as variáveis, vamos ter

$$\frac{d\mu}{dx} = f(x)\,\mu(x) \quad , \quad \frac{d\mu}{\mu} = f(x)\,dx \quad , \quad \ln \mu(x) = \int f(x)\,dx\,.$$

Logo, o fator integrante é

$$\boxed{\mu(x) = e^{\int f(x)\,dx}} \tag{2}$$

Note que multiplicando a EDO (1) pelo fator integrante (2), obtemos

$$e^{\int f(x)\,dx}y' + f(x)e^{\int f(x)\,dx}y = e^{\int f(x)\,dx}g(x)\,. \tag{3}$$

Levando em conta que $\left(e^{\int f(x)\,dx}\right)' = e^{\int f(x)\,dx} f(x)$, podemos escrever (3) na forma

$$\left(e^{\int f(x)\,dx} y\right)' = e^{\int f(x)\,dx} g(x)\,.$$

Basta agora integrar os dois lados e encontramos a solução da EDO.

Conclusão: *Multiplicando a EDO linear* (1) *pelo fator integrante* (2)*, obtemos uma nova equação, cujo lado direito é a derivada de um produto.*

NOTA: O método de resolução acima foi deduzido para o caso em que o coeficiente de y' é 1. Se não for, é preciso primeiro dividir por esse coeficiente, para torná-lo igual a 1.

Exemplo 1. Resolver a EDO $y' + 3y = x$.

Um fator integrante para a equação diferencial acima é

$$\mu = e^{\int 3\,dx} = e^{3x}\,.$$

Observe que na integral acima não somamos uma constante de integração, o que é o mesmo que escolher a constante de integração como sendo 0. Isto, aqui, é legítimo, pois estamos querendo descobrir **um** fator integrante e não o fator integrante mais geral possível.
Multiplicando a equação diferencial pelo fator integrante $\mu = e^{3x}$, temos

$$e^{3x} y' + 3e^{3x} y = xe^{3x}\,. \tag{4}$$

Como vimos acima, o lado esquerdo de (4) deve ser a derivada de um produto. Para descobrir quais são os fatores deste produto, notamos que o termo $e^{3x}y'$ deve ser o primeiro vezes a derivada do segundo. Portanto o primeiro é e^{3x}. Conluímos que

$$\left(e^{3x} y\right)' = xe^{3x}\,.$$

Por integração, encontramos

$$e^{3x} y = \int xe^{3x}\,dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C\,.$$

A solução geral é $y = \frac{x}{3} - \frac{1}{9} + C\,e^{-3x}$.

Exemplo 2. Resolver a EDO $(x-2)y' + (x-1)y = e^{-2x}$.

Como o coeficiente de y' não é 1, começamos dividindo por este coeficiente,

$$y' + \frac{x-1}{x-2}\,y = \frac{e^{-2x}}{x-2}\,. \tag{5}$$

Um fator integrante para a equação (5) é

$$\mu = e^{\int \frac{x-1}{x-2}\,dx}\,.$$

Calculamos a integral

$$\int \frac{x-1}{x-2}\,dx = \int \frac{(x-2)+1}{x-2}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x-2}\right) dx = x + \ln(x-2)\,.$$

Conforme explicado no exemplo 1, na integral acima a constante de integração foi escolhida como sendo 0, pois estamos querendo descobrir **um** fator integrante e não o fator integrante mais geral possível.

Encontramos $\mu = \big(x-2\big)e^x$. Multiplicando (5) por este fator, temos

$$\big(x-2\big)e^x y' + \big(x-1\big)e^x y = e^{-x}\,. \tag{6}$$

Como vimos acima, o lado esquerdo de (6) deve ser a derivada de um produto. Para descobrir quais são os fatores deste produto, notamos que o termo $\big(x-2\big)e^x y'$ deve ser o primeiro vezes a derivada do segundo. Conluimos que

$$\Big(\big(x-2\big)e^x y\Big)' = e^{-x}$$

e, por integração,

$$\big(x-2\big)e^x y = -e^{-x} + C.$$

A solução geral é $y = -\dfrac{e^{-2x}}{x-2} + \dfrac{C\,e^{-x}}{x-2}$.

Problema. No instante $t_0 = 0$ o ar em um recinto de $10800\,\mathrm{m}^3$ contém 0,12% de CO_2. Neste instante começa a ser bombeado para o interior do recinto ar com 0,04% de CO_2 à razão de $150\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$. Supondo que o ar dentro do recinto mistura-se instantaneamente, encontre a concentração de CO_2 $10\,\mathrm{min}$ mais tarde.

Solução:

Seja $Q(t)$ o volume que é ocupado pelo CO_2 no instante t. Consideremos o intervalo de tempo entre os instantes t e $t+\Delta t$. Queremos determinar a variação ΔQ ocorrida neste intervalo de tempo. O volume de ar que entra (sai) do tanque durante este intervalo é

$$\Delta V = 150\Delta t$$

No volume $\Delta V = 150\Delta t$ que entra, a quantidade de CO_2 é

$$\frac{0.04\times 150\Delta t}{100} = 0.06\Delta t$$

Por uma regra de 3, no volume $\Delta V = 150\Delta t$ que sai, a quantidade de CO_2 é aproximadamente

$$\frac{Q150\Delta t}{10800} = \frac{Q\Delta t}{72}$$

A igualdade é aproximada, pois, ao longo do intervalo de tempo, Q não permanece constante. Portanto

$$\Delta Q \simeq 0.06\Delta t - \frac{Q\Delta t}{72}$$

Quanto menor o intervalo de tempo melhor vai ser a aproximação. O erro desaparece no limite para $\Delta t \longrightarrow 0$. Para não obter uma igualdade trivial $0=0$, primeiro dividimos por Δt,

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} \simeq 0.06 - \frac{Q}{72}$$

Fazendo $\Delta t \longrightarrow 0$, obtemos a EDO

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{72}Q = 0.06\,.$$

O problema nos dá uma condição inicial

$$Q(0) = \frac{0.12 \times 10800}{100} = 12.96\,.$$

Devemos resolver o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{1}{72}\,Q = 0.06 \\ Q(0) = 12.96 \end{cases}$$

Multiplicando nossa EDO linear pelo fator integante $\mu = e^{\int \frac{1}{72}dt} = e^{\frac{t}{72}}$, obtemos

$$e^{\frac{t}{72}}\,\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{72}\,e^{\frac{t}{72}}\,Q = 0.06\,e^{\frac{t}{72}}\,,$$

i.e.

$$\left(e^{\frac{t}{72}}Q\right)' = 0.06\,e^{\frac{t}{72}}\ .$$

Integrando, eoncontramos

$$e^{\frac{t}{72}}Q = \int 0.06\,e^{\frac{t}{72}}\,dt = 0.06 \cdot 72\,e^{\frac{t}{72}} + C\ .$$

Portanto a solução geral da EDO é

$$Q = 4.32 + Ce^{-\frac{t}{72}}\ .$$

Utilizando a condição inicial $Q(0) = 12.96$, determinamos C. De fato, para $t = 0$,

$$12.96 = 4.32 + C\,.$$

Logo a expressão de Q em um instante qualquer é

$$Q = Q(t) = 4.32 + 8.64e^{-\frac{t}{72}}\ .$$

Após 10 min, i.e, no instante $t = 10$, $Q(10) = 4.32 + 8.64e^{-\frac{10}{72}}$. A concentração vai ser de $\dfrac{4.32 + 8.64e^{-\frac{10}{72}}}{10800} \times 100 \approx 0.1096$ por cento.

Aplicação. Queda de um corpo em um meio que ofereça resistência.

Suponhamos um corpo de massa m que cai em um meio (ar, água, óleo) que oferece resistência. Consideremos como sendo positiva o sentido para baixo. A velocidade v é positiva. Sobre o corpo que cai ajem duas forças, o seu peso mg, que é positivo, e a resistência do meio F_r, que tem sentido oposto ao da velocidade e é, portanto, negativa. Da 2ª lei de Newton, temos

$$m\frac{dv}{dt} = gm + F_r$$

é negativa. Para velocidades não muito grandes, obtemos uma boa descrição do movimento, se considerarmos o modelo em que F_r é diretamente proporcional à velocidade, isto e, a EDO

$$m\frac{dv}{dt} = gm - k\,v\ , \qquad (k > 0 \text{ constante})\,.$$

Neste caso a EDO é linear. Em outros problemas envolvendo velocidades mais altas, como movimento de projéteis, pode-se ter uma descrição melhor considerando a velocidade diretamente proporcional, por exemplo, ao quadrado da velocidade, i.e.

$$m\frac{dv}{dt} = gm - k\,v^2\ , \qquad (k > 0 \text{ constante})\,.$$

Vamos aqui considerar o modelo linear.

Exemplo. Um paraquedista pula de grande altura. Depois de 10 seg abre seu paraquedas. Ache a velocidade depois de 15 seg. Ache também a velocidade terminal, sendo dados:

– A massa do paraquedas+paraquedista é 80 kg.

– A resistência do ar com o paraquedas fechado vale $\dfrac{1}{2}\,v$ e com o paraquedas aberto vale $10\,v$. Vamos aqui considerar o modelo linear.

Solução:

Pela 2ª lei de Newton $80\,\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{1}{2}\,v=800$. Assim os primeiros 10 seg são governados pelo PVI

$$\begin{cases} 80\,\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{1}{2}\,v=800 \\ v(0)=0 \end{cases}$$

Escrevendo a equação como $v'+\dfrac{1}{160}\,v=10$ e multiplicando pelo fator integrante $e^{\int \frac{1}{160}dt}=e^{\frac{t}{160}}$, temos $e^{\frac{t}{160}}v'+\dfrac{1}{160}\,e^{\frac{t}{160}}v=10\,e^{\frac{t}{160}}$, ou seja

$$\left(e^{\frac{t}{160}}v\right)'=10\,e^{\frac{t}{160}} \quad , \quad e^{\frac{t}{160}}v=\int 10\,e^{\frac{t}{160}}\,dt=1600\,e^{\frac{t}{160}}+C\,.$$

A solução geral da EDO é $\boxed{v=1600+Ce^{-\frac{t}{160}}}$. Usando a condição inicial $v(0)=0$, temos $C=-1600$. Logo, nos primeiros 10 seg da queda a velocidade como função do tempo vale

$$v(t)=1600\left(1-e^{-\frac{t}{160}}\right)\,, \qquad \text{para } \ 0\le t\le 10\,. \tag{7}$$

A seguir, para $t>10$, a força de resistência do ar passa a valer $F_r=-10v$. A EDO toma a forma $80\,\dfrac{dv}{dt}+10\,v=800$, para $10<t<+\infty$, e o valor $v(10)=1600\left(1-e^{-\frac{10}{160}}\right)$, calculado da solução no trecho $0<t<10$, passa a ser a condição inicial. Portanto para obter $v(t)$ no intervalo $10<t<+\infty$, devemos resolver o PVI

$$\begin{cases} 80\dfrac{dv}{dt}+10\,v=800\,, \qquad (10<t<+\infty) \\ v(10)=1600\left(1-e^{-\frac{1}{16}}\right) \end{cases}$$

Como acima, $v'+\frac{1}{8}\,v=10$, $\quad \mu=e^{\int \frac{1}{8}\,dt}=e^{\frac{t}{8}}$, $\quad e^{\frac{t}{8}}v'+\frac{1}{8}\,e^{\frac{t}{8}}v=10\,e^{\frac{t}{8}}$, $\quad \left(e^{\frac{t}{8}}v\right)'=10\,e^{\frac{t}{8}}$, $e^{\frac{t}{8}}v=\int 10\,e^{\frac{t}{8}}\,dt$, $\quad e^{\frac{t}{8}}v=80\,e^{\frac{t}{8}}+D\,.$

A solução geral é $v=80+De^{-\frac{t}{8}}$. Utilizando a condição inicial $v(10)=1600\left(1-e^{-\frac{1}{16}}\right)$, temos $1600\left(1-e^{-\frac{1}{16}}\right)=80+De^{-\frac{10}{8}}$ e

$$D=1520\,e^{\frac{10}{8}}-1600\,e^{\frac{19}{16}}\,.$$

Portanto, no segundo trecho da queda, depois de 10 seg, quando abre o paraquedas, a velocidade vale

$$v=80+\left(1520\,e^{\frac{10}{8}}-1600\,e^{\frac{19}{16}}\right)e^{-\frac{t}{8}}\,, \qquad \text{para } \ 10\le t<+\infty\,. \tag{8}$$

Assim o salto do paraquedista é descrito por (7) e (8). Para achar a velocidade depois de 15 seg basta substituir $t = 15$ em (8),

$$v(15) = 80 + \left(1520\, e^{\frac{10}{8}} - 1600\, e^{\frac{19}{16}}\right) e^{-\frac{15}{8}}\,.$$

A velocidade terminal, quando existe, é o limite da velocidade, quando $t \longrightarrow +\infty$. No presente exemplo, como $e^{-\frac{t}{8}} \longrightarrow 0$, existe uma velocidade terminal,

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} \left(80 + \left(1520\, e^{\frac{10}{8}} - 1600\, e^{\frac{19}{16}}\right) e^{-\frac{t}{8}}\right) = 80\,.$$

A velocidade terminal é $v_\infty = 80\,\mathrm{m/seg}$.