Seção 6: Equação de Bernoulli

Definição. Uma **equação de Bernoulli** é uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem da forma

$$y' + f(x)\,y = g(x)\,y^n\,, \tag{1}$$

onde n é um número real (não precisa ser inteiro nem positivo). Vamos sempre considerar $n \neq 0, 1$, pois nestes dois casos (1) seria uma EDO linear, que já sabemos resolver.

Método de resolução. Experimentemos fazer uma mudança de variável do tipo $y = z^p$. Substituindo em (1), temos

$$p\,z^{p-1}z' + f(x)z^p = g(x)\,z^{np}\,,$$

ou seja,

$$p\,z' + f(x)z = g(x)\,z^{np-p+1}\,. \tag{2}$$

A EDO (2) se torna o mais simples possível se $np - p + 1 = 0$, isto é, para

$$p = \frac{1}{1-n}\,.$$

Em outras palavras, para resolver (1), vamos fazer a substituição

$$z = y^{1-n}\,. \tag{3}$$

Conclusão. *A equação de Bernoulli* (1) *se transforma em uma equação linear através da substituição* $z = y^{1-n}$.

De fato, fazendo a substituição $z = y^{1-n}$, calcula-se

$$y = z^{\frac{1}{1-n}}\,, \qquad y' = \frac{1}{1-n}\,z^{\frac{1}{1-n}-1}z'$$

e a equação (1), portanto, se transforma em

$$\frac{1}{1-n}\,z^{\frac{n}{1-n}}\,z' + f(x)\,z^{\frac{1}{1-n}} = g(x)\,z^{\frac{n}{1-n}}$$

ou, multiplicando a equação por $z^{-\frac{n}{1-n}}$,

$$\frac{1}{1-n}\,z' + f(x)\,z = g(x)\,,$$

que é uma EDO linear.

Se o expoente $1-n$ for negativo, é preciso ter cuidado, pois ao fazer a substituição (3), estaremos eliminando a possibilidade de $y = 0$. Com isto perdemos uma solução da EDO (1), pois é fácil ver que se $n > 0$, então $y = 0$ é uma solução da EDO (1).

Não vale a pena memorizar a forma da equação linear que resulta. Basta somente lembrar da substituição $z = y^{1-n}$.

Exemplo 1. Consideremos o crescimento de uma bactéria (que vamos supor esférica, por simplicidade). Para cada instante de tempo t, indiquemos por $M = M(t)$ a massa da bactéria, $V = V(t)$ seu volume, $S = S(t)$ a área da superfície e $r = r(t)$ o raio. Supondo a densidade da bactéria constante igual a ρ, temos $M = \rho V$. Vamos construir um modelo matemático levando em conta que a taxa de crescimento da massa da bactéria é influenciada por dois fatores:

(i) A massa M tende a aumentar, devido à alimentação. Como o alimento entra através da membrana superficial, é razoável supor que este efeito seja diretamente proporcional à área S da superfície da bactéria;

(ii) Existe uma queima da massa da bactéria devida ao metabolismo. Como esta queima é mais ou menos uniforme ao longo de todas as partes da bactéria, é razoável supor que este efeito seja diretamente proporcional à massa M da bactéria.

Consideremos o problema de determinar de que maneira a massa M varia com a passagem do tempo t.

As duas suposições feitas acima implicam que existem duas constantes $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que

$$\frac{dM}{dt} = \alpha S - \beta M\,. \tag{4}$$

Esta equação ainda está envolvendo duas quantidades M e S que dependem do tempo. Para poder resolver a equação é preciso eliminar uma delas. Note que

$$V = \frac{4}{3}\,\pi\, r^3 \qquad \text{e} \qquad S = 4\pi\, r^2\,.$$

Segue daí que $S = 4\pi\left(\dfrac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} = \big(4\pi\big)^{\frac{1}{3}}\big(3V\big)^{\frac{2}{3}}$. Por outro lado, $V = M/\rho$. Substituindo tudo isto na equação (4), encontramos

$$\frac{dM}{dt} = \alpha\,\frac{(4\pi)^{\frac{1}{3}}(3M)^{\frac{2}{3}}}{\rho^{\frac{2}{3}}} - \beta M\,.$$

Vemos que a equação diferencial que governa o crescimento da bactéria e do tipo

$$\frac{dM}{dt} = \lambda\, M^{\frac{2}{3}} - \beta M\,, \tag{5}$$

onde $\lambda = \dfrac{\alpha\, 3^{\frac{2}{3}}(4\pi)^{\frac{1}{3}}}{\rho^{\frac{2}{3}}}$ e β são constantes positivas. A equação (5) é uma equação de Bernoulli, com $n = \dfrac{2}{3}$. Fazendo a subtituição $z = M^{1-n} = M^{\frac{1}{3}}$, temos $M = z^3$ e $M' = 3z^2\, z'$, que transforma (5) em

$$3z^2\, z' = \lambda\, z^2 - \beta z^3\,,$$

que é equivalente à equação linear

$$z' + \frac{\beta}{3}\, z = \frac{\lambda}{3}\,. \tag{6}$$

Um fator integrante para a equção (6) é $\mu = e^{\int \frac{\beta}{3}\, dt} = e^{\frac{\beta t}{3}}$. Multiplicando (6) por este fator integrante, encontramos

$$e^{\frac{\beta t}{3}} z' + \frac{\beta}{3}\, e^{\frac{\beta t}{3}} z = \frac{\lambda}{3}\, e^{\frac{\beta t}{3}}\,.$$

O lado esquerdo desta última EDO é a derivada de um produto, Assim,

$$\left(e^{\frac{\beta t}{3}} z\right)' = \frac{\lambda}{3}\, e^{\frac{\beta t}{3}}\,.$$

Por integração temos

$$e^{\frac{\beta t}{3}} z = \frac{\lambda}{3}\int e^{\frac{\beta t}{3}}\, dt\,.$$

Calculando a integral, encontramos

$$e^{\frac{\beta t}{3}} z = \frac{\lambda}{\beta} e^{\frac{\beta t}{3}} + C\,,$$

ou seja,

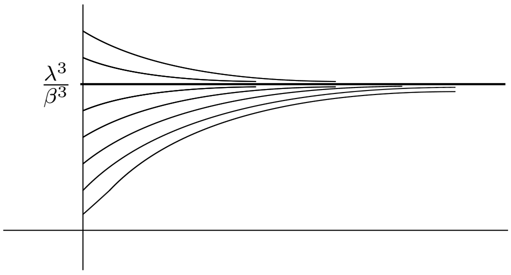
$$z = \frac{\lambda}{\beta} + C e^{-\frac{\beta t}{3}}$$

e, finalmente,

$$M(t) = \left(\frac{\lambda}{\beta} + C\, e^{-\frac{\beta\, t}{3}} \right)^3 .$$

Observação: A constante C depende da condição inicial. Existe um tamanho limite para a célula, que não depende do tamanho inicial, isto é, qualquer que seja C,

$$\lim_{t \to +\infty} M(t) = \frac{\lambda^3}{\beta^3} = M_{\text{eq}}\ .$$



Condições iniciais $M(0) < M_{\text{eq}}$ é que fazem sentido em nosso problema. Elas correspondem a valores $C < 0$ da constante. Neste caso, a solução $M(t)$ é uma função crescente, pois a exponencial é decrescente.
Uma condição inicial $M(0) > M_{\text{eq}}$ é matematicamente possível. Teríamos $C > 0$ e a solução $M(t)$ seria decrescente.
A função constante $M(t) = M_{\text{eq}}$ é a solução que corresponde a $C = 0$. É a solução de equilíbrio. Trata-se de um ponto de equilíbrio estável: tomando uma condição incial $M(0)$ próxima do valor de equilíbrio M_{eq}, a solução que se obtém tende a voltar ao valor de equilíbrio, embora sem atingi-lo num tempo finito.

Exemplo 2. Resolver a equação diferencial

$$y' = xy + xy^3. \tag{7}$$

Esta EDO é uma equação de Bernoulli com $n = 3$. Fazemos a mudaça de variável

$$z = y^{1-3} = y^{-2}\ ,$$

isto é,

$$y = z^{-\frac{1}{2}}\ , \qquad y' = -\frac{1}{2}\, z^{-\frac{3}{2}}\, z'\,. \tag{8}$$

Note que com esta mudaça de variável, eliminamos a possibilidade de y se anular. Precisamos então verificar separadamente se $y = 0$ é uma solução da EDO (7). Verifica-se que é.
Substituindo (8) em (7), tem-se

$$-\frac{1}{2}\, z^{-\frac{3}{2}}\, z' = x\, z^{-\frac{1}{2}} + x\, z^{-\frac{3}{2}}\,,$$

isto é,

$$z' + 2xz = -2x\,.$$

Esta é uma EDO linear e um fator integrante para ela é

$$\mu = e^{\int 2x\, dx} = e^{x^2}\,.$$

Multiplicando por este fator integrante, temos

$$e^{x^2}z' + 2xe^{x^2}z = -2xe^{x^2}\,,$$

ou, equivalentemente,

$$\left(e^{x^2}z\right)' = -2xe^{x^2}\,,$$

cuja solução é

$$e^{x^2}z = \int -2xe^{x^2}\,dx = -e^{x^2} + C\,.$$

Segue que

$$z = -1 + C\,e^{x^2}\,.$$

Fazendo a substituição inversa, obtemos que a solução geral de (7) é

$$y = \left(-1 + C\,e^{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Observe que a solução particular $y = 0$ de (7) não está incluída na solução geral para nenhum valor de C. Portanto, a solução de (7) é

$$y = \left(-1 + C\,e^{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\,, \qquad y = 0\,.$$

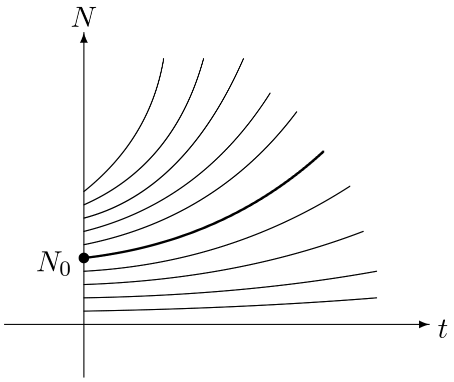
Aplicação: Modelos de Crescimento Populacional

Como uma aplicação das idéias desolvolvidas até este ponto, vamos estudar alguns modelos simples de crescimento populacional.

Crescimento Exponencial. É o modelo mais simples, que já foi estudado na primeira aula, em que se supõe que a taxa de crescimento de uma população em um dado instante é diretamente proporcional ao número de indivíduos neste instante. Em símbolos, designando por $N = N(t)$ o número de indivíduos no instante t,

$$\frac{dN}{dt} = \lambda\,N, \tag{9}$$

onde $\lambda > 0$ é uma constante que só depende da espécie de bactérias que se está observando



(depende do tempo que cada célula leva para se dividir). Na primeira seção, resolvemos a equação (9) por separação de variáveis, econtrando a solução geral $N = Ce^{\lambda t}$. Se for conhecida a população N_0 no instante inicial $t = 0$, isto é, se tivermos uma condição inicial $N(0) = N_0$, determinamos $C = N_0$,

$$N = N(t) = N_0 e^{\lambda t}.$$

Conclui-se que, segundo este modelo, a população cresce exponencialmente.

Crescimento Logístico. O modelo anterior, de crescimento exponencial, descreve bem a evolução de uma população até um certo estágio. Quando o número de indivíduos cresce, começa haver competição entre os indivíduos, pelo alimento, por exemplo. Isto ocasiona uma diminuição na taxa de crescimento, que é preciso levar em conta, para obter um modelo que descreva mais fielmente a realidade. A taxa de crecimento será do tipo

$$\frac{dN}{dt} = \varphi(N)\, N,$$

onde $\varphi(N)$ agora não é mais constante, mas varia com N, diminuindo quando N cresce, podendo inclusive tornar-se negativo se N for muito grande. A funçõ mais simples com estas propriedades é $\varphi(N) = a - bN$, com $a > 0$ e $b > 0$ constantes, cujo gráfico é uma reta. Obtemos assim a euqação diferencial

$$\frac{dN}{dt} = \big(a - bN\big)N, \tag{10}$$

conhecida como *equação logística*. Vamos supor que $0 < b \ll a$, de modo que, enquanto a população N não for muito grande, a taxa de crescimento será aproximadamente $N' \simeq aN$, e o modelo anterior dará uma boa aproximação. Para valores muito gandes de N, o termo bN se faz sentir e a taxa de crescimento fica menor.

A EDO (10) é separável, mas também é de Bernoulli e, justamente, é mais fácil resolvê-la como tal. De fato,

$$N' = aN - bN^2$$

é de Bernoulli com $n = 2$. Seguindo o método expoxto acima, fazemos a mudança de variável

$$z = N^{1-2} = N^{-1}\,, \qquad N = z^{-1}\,, \qquad N' = -z^{-2}z'.$$

Substituindo na EDO, temos

$$-z^{-2}z' = az{-1} - bz^{-2}.$$

Multiplicando por z^2, obtemos a equação linear

$$z' + az = b\,,$$

cujo fator integrante é $\mu = e^{\int a\,dt} = e^{at}$. Então,

$$e^{at}z' + ae^{at}z = be^{at}\,, \qquad \big(e^{at}z\big)' = be^{at}\,, \qquad e^{at}z = b\int e^{at}\,dt = \frac{b}{a}\,e^{at} + C$$

e, portanto,

$$z = \frac{b}{a} + Ce^{-at}.$$

Finalmente, a solução geral de (10) é

$$N = \frac{1}{\frac{b}{a} + Ce^{-at}}\,.$$

Note que $N = 0$ é uma solução de (10), que não está incluída na solução geral para nenhumvalor de C, e que foi perdida no momento em que se fez a mudança de variável $z = N^{-1}$, que exclui a possibilidade de $N = 0$. Mas, na presente situação, a solução $N = 0$ não é relevante.

Se tivernos uma condição inicial $N(0) = N_0$, podemos determinar C de $\dfrac{1}{N_0} = \dfrac{b}{a} + C$ e encontramos

$$N = N(t) = \frac{1}{\frac{b}{a} + \big(\frac{1}{N_0} - \frac{b}{a}\big)e^{-at}}\,.$$

Observamos que o modelo prevê que para t grande, independente da população inicial $N(0)$, $N(t)$ vai se aproximar sempre de um mesmo valor

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \frac{a}{b} \,.$$

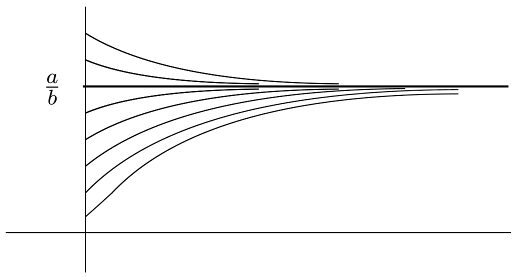
Para valores pequenos de t, escrevendo

$$N(t) = \frac{e^{at}}{\frac{1}{N_0} + \frac{b}{a}\big(1 - e^{at}\big)} \,,$$

como $1 - e^{at} \approx 0$, temos

$$N(t) \approx N_0 e^{at} \,, \qquad \text{para } \; t \; \text{ pequeno,}$$

concordando com o modelo anterior.



A solução constante $N(t) = \dfrac{a}{b}$ coresponde a um ponto de equilíbrio estável. Se a condição inicial for $N_0 = \dfrac{a}{b}$, $N(t)$ permanecerá constante igual a esse valor em todos os instantes futuros. Tomando uma condição inicial um pouco diferente desse valor, $N(t)$ tende a voltar ao valor de equilíbrio. Já a solução constante $N(t) = 0$ é um ponto de equilíbrio instável. Se mudarmos um pouco a condição incial, $N(t)$ tenderá a se afastar ainda mais de 0 quando $t \longrightarrow \infty$.

Este modelo foi proposto em 1838 pelo matemático belga Verhulst para a população humana. Em 1930 foi comprovado que descreve razoavelmente bem a população de drozófilas.