Seção 7: Estudo qualitativo das Equações Autônomas

Definição. Uma EDO de $1^{\underline{a}}$ ordem é dita *autônoma* se não envolve explicitamente a variável independente. As EDO autônomas de $1^{\underline{a}}$ ordem são as da forma

$$y' = f(y), \tag{1}$$

onde f é uma função de uma variável.

Observação 1. As equações estudadas nos exemplos de modelos de crescimento populacional da Seção 6,

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N \qquad \text{e} \qquad \frac{dN}{dt} = \big(a - bN\big)N,$$

são autônomas. Na verdade, como as leis da Biologia que regem o crescimento populacional não variam com a passagem do tempo, era mesmo de se esperar que as equações deduzidas a partir delas não envolvessem explicitamente o tempo como variável, ou seja, fossem autônomas. A partir desta observação podemos entender porque as equações autônomas são importantes nas aplicações.

É possível fazer uma análise geométrica das equações autônomas e, mesmo antes de resolvê-las, deduzir o comportamento qualitativo das soluções. As partir daí, podemos fazer um esboço da família de soluções.

Exemplo 1. Consideremos a EDO

$$N' = \big(a - bN\big)N. \tag{2}$$

Esta equação já foi resolvida quando estudamos os modelos de crescimento populacional. Vejamos que mesmo que não a tivéssemos resolvido, terio sido possível descrever qualitativamente suas soluções e fazer um esboço das mesmas.

Nossa equação diferencial é da forma

$$N' = f(N),$$

onde f é a função $f(N) = (a - bN)N$. Começamos fazendo um esboço do gráfico dessa função.

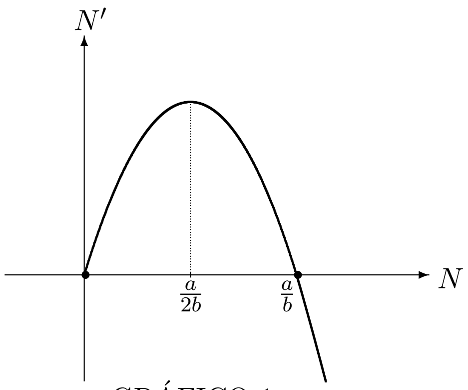

GRÁFICO 1

Analisando o gráfico da função $f(N)$, vamos esboçar o gráfico da família das soluções da equação diferencial (2). Começamos investigando se existem soluções constantes para a EDO (2). Note que uma solução constante de (2) é uma função da forma $N(t) = C$, com $f(C) = f(N(t)) = N'(t) = 0$ (a derivada de uma função constante é 0). Portanto as soluções constantes de (2) correspondem aos zeros da função $f(N)$. No presente exemplo a função $f(N)$ tem dois zeros (imediato do Gráfico 1) e, portanto, a EDO (2) tem duas soluções constantes:

$$N_1(t) = 0 \qquad \text{e} \qquad N_2(t) = \frac{a}{b}\,.$$

Essas soluções constantes são as chamadas *soluções de equilíbrio* de nossa EDO. A partir do gráfico acima, que mostra N' em função de N, vamos construir o esboço do gráfico de N em

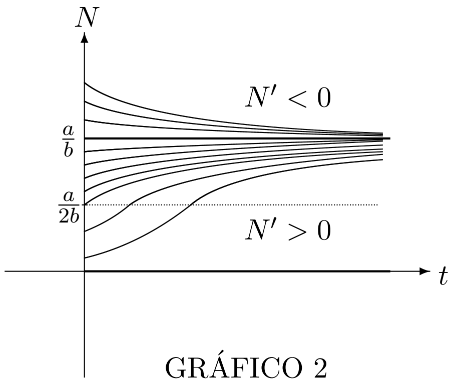

GRÁFICO 2

função de t, que mostra a família das soluções de (2). Analisando o Gráfico 1, vemos que $N' > 0$ para $0 < N < \frac{a}{b}$. Isto nos diz que no Gráfico 2, na faixa $0 < N < \frac{a}{b}$, as soluções $N = N(t)$ são funções crescentes. Da mesma forma, para $N > \frac{a}{b}$, temos $N' < 0$. Portanto, na região $N > \frac{a}{b}$ do Gráfico 2, as soluções $N = N(t)$ são funções decrescentes. No Gráfico 2, fazemos o esboço das soluções da EDO (2) a partir dessas considerações. Note que a solução $N_2(t) = \frac{a}{b}$ corresponde a um ponto de equilíbrio estável: Para a condição inicial $N(0) = \frac{a}{b}$, a solução vai permanecer igual a $N(t) = \frac{a}{b}$ para todos os instantes futuros $t \geq 0$. Variando um pouco a condição inicial para $N(0) = N_0$, com N_0 diferente mas próximo de $\frac{a}{b}$, vamos ter

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \frac{a}{b}\,,$$

ou seja, $N(t)$ tende a voltar à posição de equilíbrio. Podemos ser mais específicos quanto ao comportamento das soluções na faixa $0 < N < \frac{a}{b}$. Note que como mostra o Gráfico 1, N' é máximo quando $N = \frac{a}{2b}$. Portanto as soluções têm máxima declividade quando $N = \frac{a}{2b}$. Concluímos daí que as soluções dentro da faixa $0 < N < \frac{a}{b}$ têm ponto de inflexão sobre a reta horizontal $N = \frac{a}{2b}$.

Observação 2. *Se $y_1(t)$ é uma solução da EDO* (1)*, então qualquer translação horizontal $y_2(t) = y_1(t+C)$ também é.* De fato, se $y_1(t)$ é uma solução da EDO (1), então $y_1'(t) = f(y_1(t))$. Segue que $y_2'(t) = y_1'(t+C) = f(y_1(t+C)) = f(y_2(t))$.

Aplicando essa observação à equação (2) temos que, se conhecermos o gráfico de uma solução com gráfico contido na faixa $0 < N < \frac{a}{b}$, as demais soluções com gráfico contido na faixa são obtidas por translação horizontal do desta solução conhecida. O mesmo se aplica às soluções na região $N > \frac{a}{b}$.

Exemplo 2. Fazer uma esboço do gráfico das soluções da EDO

$$y' = (y+1)(y-1)y^2 \tag{3}$$

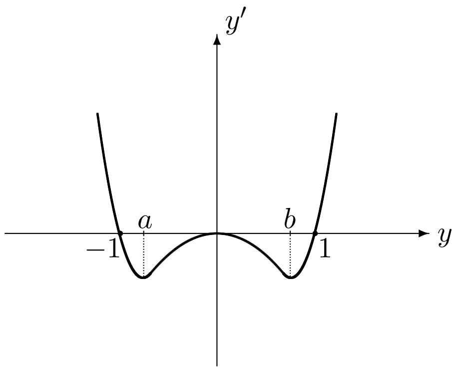

GRÁFICO 3

Começamos traçando o gráfico (Gráfico 3) da função

$$f(y) = (y+1)(y-1)y^2.$$

A função $f(y)$ tem três zeros. Portanto a EDO (3) tem três soluções de equilíbrio,

$$y_1(t) = -1, \quad y_2(t) = 1 \quad \text{e} \quad y_3(t) = 0.$$

A seguir, examinamos do comportamento das soluções em cada uma das faixas nas quais as retas soluções de equilíbrio dividem o plano.

A região $y > 1$ no gráfico 4, acima da solução de equilíbrio $y(t) = 1$, no gráfico 3 corresponde à parte do eixo horizontal à direita de $y = 1$. Portanto, na região $y > 1$ vamos ter $f(y) > 0$, ou seja, $y' > 0$ e as soluções $y(t)$ serão funções crescentes. Pelo mesmo tipo de raciocínio, na faixa $0 < y < 1$ e também na faixa $-1 < y < 0$, temos $y' = f(y) < 0$ e as soluções $y(t)$ são funções decrescentes.

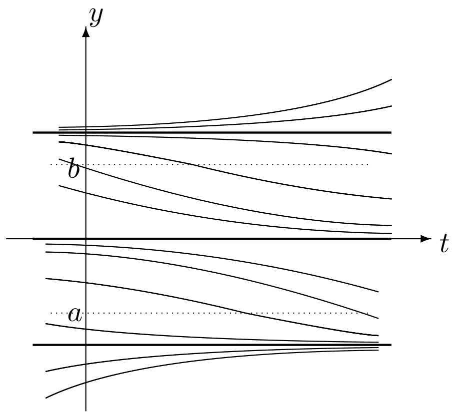

GRÁFICO 4

Na região $y < -1$, temos $y' = f(y) > 0$ e as soluções $y(t)$ são funções crescentes.

Esse comportamento está descrito no gráfica 4, ao lado.

Note que, pela Observação 2 acima, bastaria desenharmos quatro soluções da EDO (3), uma contida em cada uma das quatro regiões determinadas pelas soluções de equilíbrio. As demais soluções podem ser obtidas a partir dessas por translação horizontal.

Classificação dos pontos de equilíbrio. Ainda no Exemplo 2, temos que existem 3 pontos de equilíbrio.

– O ponto de equilíbrio $y(t) = -1$ é dito um *ponto de equilíbrio estável.* A razão desta nomenclatura é a seguinte. Se a condição inicial for $y(0) = -1$, a solução vai permanescer constante $y(t) = -1$. Se nos afastarmos um pouco da posição de equilíbrio, isto é, se dermos uma condição incial $y(0) \neq -1$ levemente diferente de -1, o Gráfico 4 nos mostra que a solução $y(t) \longrightarrow -1$ volta a se aproximar da posição de equilíbrio.

– O ponto de equilíbrio $y(t) = 1$ é dito um *ponto de equilíbrio instável.* A razão do nome é que se dermos uma condição incial $y(0) \neq 1$ levemente diferente de 1, o Gráfico 4 nos mostra que a solução $y(t)$ tende a se afastar mais ainda da posição de equilíbrio, quando $t \longrightarrow \infty$.

– O ponto de equilíbrio $y(t) = 0$ é dito um *ponto de equilíbrio semi-instável.* A razão do nome é que se afastarmos a condição incial $y(0) < 0$ para a esquerda do valor de equilíbrio $y = 0$, a solução $y(t)$ tende a se afastar mais ainda da posição de equilíbrio (comportamento instável), mas se afastarmos a condição incial $y(0) > 0$ para a direita do valor de equilíbrio $y = 0$, a solução $y(t)$ tende a voltar para a posição de equilíbrio (comportamento esstável) $y(t) \longrightarrow 0$.

Há algo mais que podemos dizer. Observando o Gráfico 3, notamos que a função $f(y)$ tem um ponto de mínimo local a no intervalo $(-1, 0)$ e um ponto de mínimo local b no intervalo $(0, 1)$. Na verdade, como neste exemplo temos explicitamente a expressão de $f(y)$, pesquisando os zeros da derivada da função, podemos encontrar facilmente que $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, mas esta informação não é relevante aqui. Vamos examinar primeiro as soluções na faixa $0 < y < 1$. Já vimos que elas são decrescentes, pois $y' = \frac{dy}{dt} < 0$. Mas y' é mais negativo quando $y = b$. Ou seja, a declividade é mínima quando a solução $y(t)$ corta a reta horizontal $y = b$, que está desenhada pontilhada no Gráfico 4. Sobre essa reta horizontal estão localizados os pontos de inflexão das soluções. Para se convencer disto, comece lembrando que um ponto de inflexão de uma curva plana é um ponto onde ela troca de concavidade. A concavidade de uma função é para cima se a derivada é crescente e para baixo se a derivada é decrescente.

A concavidade é para cima se a segunda derivada $\dfrac{d^2y}{dt^2} > 0$ é positiva e para baixo se $\dfrac{d^2y}{dt^2} < 0$. A fim de aplicar este fato, levamos em conta que, pela regra da cadeia,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy'}{dt} = \frac{d\,f(y)}{dt} = f'(y)\frac{dy}{dt} = f'(y)y' = f'(y)f(y).$$

Na faixa $0 < y < 1$, por exemplo, temos:

– Para $0 < y < b$, $f(y)$ é decrescente como função de y, sendo $f'(y) < 0$ e, além disto, $f(y) < 0$. Temos, então, $f'(y)f(y) > 0$. Portanto, no trecho em que uma solução estiver na faixa $0 < y(t) < b$, a concavidade será para cima.

– Pelo mesmo argumento, na faixa $b < y < 1$ temos $f(y)$ crescente como função de y e $f'(y) > 0$. Além disto, $f(y) < 0$, de modo que $f'(y)f(y) < 0$. Portanto, no trecho em que uma solução estiver na faixa $b < y(t) < 1$, a concavidade será para baixo.

Segue que as soluções, de fato, trocam de concavidade quando cruzam a reta $y = b$. Estas conclusões a respeito da concavidade já estão mostradas no Gráfico 4.

Nas demais faixas pode ser feita a mesma discussão sobre a concavidade. Deixamos a cargo do leitor.