Seção 8: EDO's de 2ª ordem redutíveis à 1ª ordem

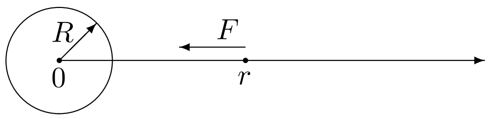
Caso 1: Equações Autônomas

Definição. Uma EDO's de 2ª ordem é dita *autônoma* se não envolve explicitamente a variável independente, isto é, se for da forma $F(y, y', y'') = 0$.

Como motivação para o método de resolução vamos estudar o seguinte exemplo.

Exemplo 1: Velocidade de escape

Um corpo de massa m é lançado para cima a partir da superfície da Terra. Vamos investigar o problema de determinar se existe um valor v_e tal que se a velocidade inicial v_0 for $v_0 \geq v_e$, então o corpo escapa da atração gravitacional da Terra. Desprezamos o efeito da resitência do ar. Pela lei da gravitação universal, a força de gravidade agindo sobre o corpo vale



$$F = -\frac{GMm}{r^2},$$

onde G é a constante universal de gravitação, M é a massa da Terra, $R \approx 6.4 \cdot 10^6 m = 6400\, km$ é o raio da Terra e r é a distância do corpo até o centro da terra. Pela 2ª lei de Newton,

$$F = ma\ , \qquad \text{onde } \ a = \frac{d^2r}{dt^2} \ \text{ é a aceleração.}$$

Igualando as duas expressões para força obtemos a equação diferencial

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}\,. \tag{1}$$

A EDO (1) é uma equação diferencial autônoma de 2ª ordem.
No instante inicial $t_0 = 0$, sobre a superfície da Terra, sabemos experimentalmente que a aceleração vale

$$\frac{d^2r}{dt^2}(0) = -g \approx -10\, m/s^2\,.$$

Na equação (1) procuramos $r = r(t)$ como função do tempo. Para resolvê-la mudamos o ponto de visto. Passamos a procurar a velocidade v como função da posição r. Isto faz sentido porque a cada altura r corresponde uma velocidade v, a velocidade com que o corpo atinge a altura r. Faz sentido então pensarmos em $v = v(r)$. Fazendo isto e usando a regra da cadeia, temos

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\,\frac{dr}{dt} = v\,\frac{dv}{dr}\,.$$

Substituindo na EDO (1), obtemos

$$v\,\frac{dv}{dr} = -\frac{GM}{r^2}\,. \tag{2}$$

Note que a EDO autônoma de 2ª ordem (1) se reduziu à EDO de 1ª ordem (2).
A EDO (2) pode ser resolvida por separação de variáveis

$$\int v\, dv = -GM \int \frac{dr}{r^2}\,,$$

cuja solução geral é

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{r} + C\,.$$

Usando a condição inicial $v(R) = v_0$, obtemos $C = \dfrac{GM}{R} - \dfrac{v_0^2}{2}$. Substituindo na solução geral,

$$GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) = \frac{1}{2}\left(v^2 - v_0^2\right),$$

ou ainda,

$$v^2 = \left(v_0^2 - \frac{2GM}{R}\right) + \frac{2GM}{r}\,. \tag{3}$$

1) Se v_0 for suficientemente pequeno, mais precisamente, se $v_0^2 - \dfrac{2GM}{R} < 0$, r não pode crescer indefinidamente, pois, neste caso, $\dfrac{2GM}{r} \longrightarrow 0$ e teríamos $\lim\limits_{r\to\infty} v^2 = v_0^2 - \dfrac{2GM}{R} < 0$, que é uma contradição. Portanto, se $v_0^2 < \dfrac{2GM}{R}$, então o corpo atinge uma altura máxima $r_{\max}$. Fazendo $v = 0$, encontra-se

$$\frac{1}{r_{\max}} - \frac{1}{R} = -\frac{v_0^2}{2GM}\,, \quad \frac{1}{r_{\max}} = \frac{1}{R} - \frac{v_0^2}{2GM} = \frac{2GM - v_0^2 R}{2GMR}$$

$$r_{\max} = \frac{2GMR}{2GM - v_0^2 R}\,.$$

Conclusão: Se a velocidade inicial for $v_0 < \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$, então o corpo atinge uma altura máxima $r_{\max}$ e depois cai.

2) Se $v_0 = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$, então (3) toma a forma

$$v^2 = \frac{2GM}{r}$$

e daí segue que r cresce indefinidamente, com $\lim\limits_{r\to\infty} v(r) = 0$.

Conclusão: Se $v_0 = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$, então o corpo escapa à atração gravitacional da Terra e chega nos pontos infinitamente distantes com velocidade tendendo a 0.

3) Se $v_0 > \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$, o corpo escapa da atração gravitacional da Terra e chega no infinito com velocidade positiva

$$v_\infty = \lim_{r\to\infty} v(r) = \sqrt{v_0^2 - \frac{2GM}{R}} > 0\,.$$

Conclusão: A conclusão final é que realmente existe uma velocidade de escape

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}\,.$$

Para calcular v_e, não precisamos do valor de M e de G, só precisamos saber o valor do produto GM. A equação (1), nos diz que na superfície da Terra, $g = \dfrac{GM}{R^2}$ e, portanto.

$$v_e = \sqrt{2gR} \approx \sqrt{2\cdot 10\cdot 6.4\cdot 10^6} = 10^3\sqrt{128} \approx 10^3\sqrt{121} = 11\,km/s = 39\,600\,km/h\,.$$

OBSERVAÇÃO. O método empregado no problema da velocidade de escape se baseou em considerar $v = \dfrac{dr}{dt}$ como função de r. Em geral, dada uma equação autônoma $F(y, y', y'') = 0$, introduzimos a variável $p = y'$ e pensamos em p como função de y, $p = p(y)$.

Exemplo 2. $y'' - 2yy' = 0$.

Introduzimos a variável $p = y'$ e pensamos $p = p(y)$. Pela regra da cadeia,

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\,\frac{dp}{dy}\,.$$

Substituindo na EDO, obtemos $p\,\dfrac{dp}{dy} - 2yp = 0\,$. Segue que

$$p = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dp}{dy} - 2y = 0\,.$$

1) Se $p = 0\,$, então $y' = 0\,$, logo $y = C$ é uma família de soluções.

2) Na equação $\dfrac{dp}{dy} - 2y = 0\,$, separando as variáveis, temos

$$\int dp = \int 2y\,dy\ , \qquad \text{e} \qquad p = y^2 + C\,.$$

Fazendo a substituição inversa,

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + C\ , \quad \frac{dy}{y^2 + C} = dx\ , \quad \int \frac{dy}{y^2 + C} = \int dx$$

Caso 1: $C > 0$. Neste caso, podemos dizer que $C = K^2$ com $K > 0$.
Temos

$$x = \int \frac{dy}{y^2 + K^2} = \frac{1}{K}\int \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{K}\right)^2}\, d\Big(\frac{y}{K}\Big) = \frac{1}{K}\,\arctan\Big(\frac{y}{K}\Big) + L\,.$$

Podemos isolar y. Basta notar que

$$Kx + D = \arctan\Big(\frac{y}{K}\Big)\ , \quad \frac{y}{K} = \tan\big(Kx + D\big).$$

Assim, temos a família de soluções

$$y = C_1 \tan\big(C_1 x + C_2\big).$$

Caso 2: $C = 0$. Neste caso

$$x = \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} + C$$

e temos a família de soluções

$$y = \frac{1}{C - x}\,.$$

Caso 3: $C < 0$. Neste caso, $C = -K^2$ com $K > 0$.

Temos

$$x = \int \frac{dy}{y^2 - K^2} = \int \frac{dy}{\big(y - K\big)\big(y + K\big)}\,.$$

Decompondo em frações parciais, encontramos

$$\frac{1}{\big(y-K\big)\big(y+K\big)} = \frac{1}{2K}\left(\frac{1}{y-K} - \frac{1}{y+K}\right).$$

Portanto,

$$x = \frac{1}{2K}\Big(\ln|y-K| - \ln|y+k|\Big) + L\,.$$

Assim, temos a família de soluções

$$Kx + D = \ln\left|\frac{y-K}{y+K}\right|^{\frac{1}{2}}\,.$$

Se quisermos, aplicando a função exponencial dos dois lados, e fazendo algumas operações algébricas simples, podemos isolar y, mas não vamos fazer isto aqui.

Em resumo, as soluções da equação diferencial são todas as funções de uma das formas

$$y = C_1\tan\big(C_1x + C_2\big)\ , \quad \ln\left|\frac{y-C_1}{y+C_1}\right|^{\frac{1}{2}} = C_1x + C_2\ , \quad y = \frac{1}{C-x} \quad \text{e} \quad y = C\,.$$

Note que a equação diferencial do exemplo 2 não é linear, pois contém o termo em yy', que é de grau 2. Vamos ver que para equações lineares a estrutura do conjunto das soluções nunca é tão complicada.

Exemplo 3. Resolva o problema de valor inicial

$$y'' = \frac{2y\big(y'\big)^2}{1+y^2}\ , \qquad y(0) = 0\ , \qquad y'(0) = 2\,. \tag{4}$$

Introduzimos a variável $p = y'$ e pensamos $p = p(y)$. Pela regra da cadeia,

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\,\frac{dy}{dx} = p\,\frac{dp}{dy}\,.$$

Substituindo na EDO, obtemos $p\,\dfrac{dp}{dy} = \dfrac{2yp^2}{1+y^2}$. A possibilidade de que $p = 0$ pode ser descartada por causa da condição inicial $y'(0) = 2$. Separando as variáveis e integrando, temos

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{2y}{1+y^2}\,dy$$

e, portanto,

$$\ln p = \ln\big(1+y^2\big) + \ln C_1\,,$$

ou seja,

$$p = C_1\big(1+y^2\big)\,.$$

Segue das condições iniciais que quando $y = 0$ vamos ter $p = 2$. Substituindo acima, determinamos $C_1 = 2$. Então,

$$\frac{dy}{dx} = 2\big(1+y^2\big)\ , \qquad \int \frac{dy}{1+y^2} = 2\int dx\ , \qquad \arctan y = 2x + C_2\ , \qquad y = \tan\big(2x + C_2\big)\,.$$

Mas a condição inicial $y(0) = 0$ implica que $\tan C_2 = 0$. Logo, a solução do PVI (4) é

$$y = \tan\big(2x\big)\,.$$

OBS. O exemplo acima mostra que quando temos um PVI, podemos ir determinando as constantes à medida que elas forem aparecendo. Em alguns casos, isto pode ser uma simplificação considerável, evitando ter de considerar vários casos, como precisou ser feito no exemplo 2.

Caso 2: Equações do tipo $F(x, y', y'') = 0$ (não envolvendo y)

Exemplo 4. Resolva a equação diferencial $x\,y'' - y' = x^2 - 2$.

Seja $z = y'$. Vamos primeiro encontrar a função $z = z(x)$ e, em seguida integrar para obter y. Substituindo $y' = z$ e $y'' = \dfrac{dz}{dx}$ na EDO, temos

$$x\frac{dz}{dx} - z = x^2 - 2\,.$$

Esta é uma equação linear de 1ª ordem. Para resolvê-la dividimos por x, obtendo

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = x - \frac{2}{x}\,,$$

cujo fator integrante é $\mu = e^{\int -\frac{1}{x}\,dx} = e^{-\ln x} = x^{-1}$. Multiplicando a equação pelo fator integrante, temos

$$\frac{1}{x}\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x^2} = 1 - \frac{2}{x^2}\,,$$

que é equivalente a

$$\frac{d}{dx}\big(x^{-1}z\big) = 1 - \frac{2}{x^2}\,.$$

Por integração, temos

$$x^{-1}z = \int \big(1 - 2x^{-2}\big)dx = x + 2x^{-1} + C_1.$$

Multiplicndo por x,

$$z = x^2 + 2 + C_1 x\,.$$

Lembrando que $y' = z$ e integrando novamente, temos

$$y = \frac{x^3}{3} + 2cx + C_1 x^2 + C_2\,.$$