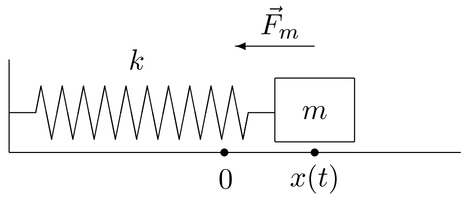
Seção 9: EDO's lineares de 2ª ordem
Equações Homogêneas

Definição. Uma equação diferencial linear de segunda ordem é uma equação da forma

$$y'' + f(x)\,y' + g(x)\,y = r(x), \tag{1}$$

onde $f(x)$, $g(x)$ e $r(x)$ são funções definidas em um intervalo.

Exemplo 1 – Sistema Massa–Mola. Consideremos o sistema mecânico mostrado na figura,



formado por uma massa m presa a uma mola de constante de elasticidade k e que realiza oscilações em torno de uma posição de equilíbrio. Colocamos a coordenada 0 na posição de equilíbrio. Em cada instante t a massa ocupa a posição de abscissa $x = x(t)$. Várias forças agem sobre a massa. Uma delas é a força restauradora elástica F_m, devida à ação da mola. O sentido desta força é contrário ao do deslocamento x e seu módulo é diretamente proporcional ao módulo do deslocamento (Lei de Hooke),

$$F_m = -k\,x \qquad \big(k = \text{const.} > 0\big).$$

Sobre a massa m age também uma força de atrito F_a, cujo sentido é contrário ao da velocidade. A força de atrito com uma superfície sólida obedece a uma lei mais complicada, mas se o conjunto massa–mola está imerso em um fluido viscoso, óleo, por exemplo, se considerarmos o módulo da força de atrito diretamente proporcional à velocidade, temos uma boa aproximação da realidade. Então,

$$F_a = -a\,\frac{dx}{dt}\,, \quad \big(a = \text{const.} > 0\big).$$

Finalmente, pode haver ainda uma força externa $F_e(t)$, variável com o tempo. A força total agindo sobre a massa é

$$F = F_m + F_a + F_e(t) = -k\,x - a\,\frac{dx}{dt} + F_e(t)\,.$$

Por outro lado, pela 2ª lei de Newton, a força é igual à massa vezes a aceleração,

$$F = m\,\frac{d^2x}{dt^2}\,.$$

Igualando estas duas expresões para a força, obtém-se a equação diferencial

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + a\,\frac{dx}{dt} + k\,x = F_e(t)\,, \tag{2}$$

que é uma equação diferencial linear de 2ª ordem com coeficientes constantes, isto é, as funções $f(x)$ e $g(x)$ que aparecem em (1) são constantes.

Nossa intuição nos diz que dados $x(0) = x_0\,,\ x'(0) = v_0$, o PVI

$$\begin{cases} m\,x'' + a\,x' + k\,x = F_e(t) \\ x(0) = x_0\,,\ x'(0) = v_0 \end{cases} \tag{3}$$

tem solução única, ou seja, conhecendo o deslocamento inicial x_0 e a velocidade inicial v_0, é possível prever qual a posição $x(t)$ que será ocupada pela massa em cada instante futuro.

Exemplo 2 – Circuito RLC. Consideremos o circuito mostrado na figura. Sejam $I(t)$ a corrente e $q(t)$ a carga no capacitor em cada instante t. Levando em conta que

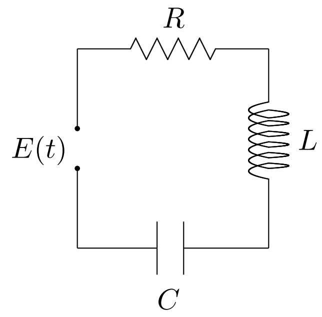
– a queda de potencial entre as duas extremidades da resitência é $RI(t)$,

– a queda de potencial entre as duas extremidades do indutor é $LI'(t)$,

– a queda de potencial entre as duas extremidades do capacitor é $\frac{1}{C}q(t)$,

podemos escrever

$$L\,I' + R\,I + \frac{1}{C}\,q = E(t). \tag{4}$$



a equação (4) ainda não é uma EDO, pois contém duas funções, $I(t)$ e $q(t)$. Existem duas formas de obter uma EDO. Uma delas é usando que $I = \dfrac{dq}{dt}$,

$$L\,q'' + R\,q' + \frac{1}{C}\,q = E(t). \tag{5}$$

Outra maneira e derivando a primeira equação,

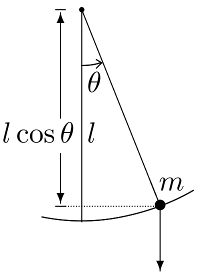
$$L\,I'' + R\,I' + \frac{1}{C}\,I = E'(t). \tag{6}$$

Matematicamente, o sitema massa–mola e o circuito RLC são governados pela mesma equação diferencial, (2) e (5) são a mesma equação, com as correpondências

$$\begin{aligned} m &\longleftrightarrow L \\ a &\longleftrightarrow R \\ k &\longleftrightarrow \frac{1}{C} \end{aligned}$$

Esta observação é muito importante. É ela que permite simular uma oscilação mecânica em um circuito elétrico.

Exemplo 3 – Pêndulo. Consideremos uma massa m oscilando em um plano vertical, presa por um fio ou por uma haste de peso desprezível, como mostra a figura. Temos



$\theta' = \dfrac{d\theta}{dt}$ = velocidade angular, $\quad l\theta'$ = velocidade

Energia cinética $K = \dfrac{1}{2}m\big(l\theta'\big)^2$, $\quad$ Energia potencial $U = \big(l - l\cos\theta\big)mg$

Pelo Princípio da conservação da energia, $U + K =$ const.

Derivando em relação a t, obtemos

$$ml^2\theta'\theta'' + mlg\theta' \operatorname{sen}\theta = 0,$$

ou seja,

$$\theta'' + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0\,. \tag{7}$$

Esta última é a equação do pêndulo. A equação (7) é uma equação não linear. No entanto, para oscilações de pequena amplitude, $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ é uma boa aproximação. Temos a aproximação linear

$$\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0\,. \tag{8}$$

Observação. Operador diferencial $L(y) = y'' + f(x)y' + g(x)y$.
Por exemplo, para $L(y) = y'' - 3y' + 2y$, temos

$$\begin{aligned}
L(x^2) &= 2 - 6x + 2x^2 \\
L(\cos x) &= \cos x + 3\operatorname{sen} x \\
L(x^2 + \cos x) &= 2 - 6x + 2x^2 + \cos x + 3\operatorname{sen} x
\end{aligned}$$

Em geral, para $L(y) = y'' + f(x)y' + g(x)y$, temos

$$L\big(y_1 + y_2\big) = L\big(y_1\big) + L\big(y_2\big) \quad , \qquad L\big(cy\big) = c\,L\big(y\big)\,.$$

Esta é a razão do nome linear. Resolver a equação diferencial (1) é encontrar as funções que satisfazem

$$L(y) = r(x).$$

Teorema de Existência e Unicidade. *Dadas 3 funções contínuas $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ definidas no intervalo aberto I, dado x_0 um ponto de I e dados a e b reais, existe uma e somente uma solução do PVI*

$$\begin{cases} y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x) \\ y(x_0) = a\,,\; y'(x_0) = b \end{cases}$$

Além disto a solução está definida em todo o intervalo I.

Uma demonstração do teorema acima só é possível em um curso mais avançado. No entanto, podemos compreender intuitivamente sua validade, devido à interpretação no caso particular da EDO (3), onde interpretamos a existência e unicidade de solução em termos da possibilidade de prever a posição do corpo em qualquer instante futuro, conhecidas sua posição e velocidade iniciais.

Equações Lineares Homogêneas

Definição. Uma EDO (1) é dita homogênea se $r(x) = 0$, isto é, se for da forma

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0.$$

Exemplo. Vimos no exemplos 1 e 2 acima, que oscilações mecânicas e elétricas são descritas por equações lineares. O caso de oscilações livres, isto é, com força externa nula, corresponde ao caso em de EDO's lineares homogêneas. Se houver força externa, ou seja, força externa nõ nula, a EDO linear que governa o fenômeno será não homogênea:

$$\text{oscilações livres} \longleftrightarrow \text{equações lineares homogêneas}$$
$$\text{oscilações forçadas} \longleftrightarrow \text{equações não homogêneas.}$$

Observação. Toda EDOLH admite $y = 0$ como solução. Por esta razão $y = 0$ é chamada de *solução trivial.*

Teorema 1 (Princípio de Superposição). *Se y_1 e y_2 são duas soluções de uma EDOLH, então qualquer combinação linear $C_1y_1 + C_2y_2$ também é solução.*

Demonstração: Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ duas soluções de uma EDO linear homogênea $L(y) = 0$. Então,

$$L(y_1) = 0 \qquad \text{e} \qquad L(y_2) = 0.$$

Da linearidade, segue que

$$L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1L(y_1) + C_2L(y_2) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

Logo, a combinação linear $C_1y_1 + C_2y_2$ também é solução.

Observação. Uma situação particular do Princípio de Superposição é a seguinte: se y_1 é uma solução de uma EDOL homogênea, então qualquer múltiplo Cy_1 também é.

Exemplo. O presente exemplo ilustra o método usado, na prática, para resolver um PVI envolvendo uma EDOLH.

(a) Verifique que $y_1 = e^{2t}$ e $y_2 = e^{3t}$ são soluções da EDOLH $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Basta substituir na EDO, fazer os cálculos e verificar que são de fato soluções.

(b) A partir destas duas soluções, usando o Princípio de Superposição, podemos construir toda uma família de soluções

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}\,.$$

(c) Resolver o PVI

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 0 \\ y(0) = 2\,,\ y'(0) = -3 \end{cases}$$

Tome a família de soluções $y = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$, construída no item (b). A idéia é determinar valores para as constantes C_1 e C_2 de modo a satisfazer as condições iniciais. Substituindo $y = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$ e $y' = 2C_1e^{2t} + 3C_2e^{3t}$ nas condições iniciais, obtemos

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ 2C_1 + 3C_2 = -3 \end{cases}$$

Encontra-se $C_1 = 9$ e $C_2 = -7$. Logo, a solução do PVI é

$$y = 9e^{2t} - 7e^{3t}.$$

(d) PERGUNTA (opcional numa primeira leitura, mas de importância fundamental para quem se preocupa com a coerência lógica da teoria): Toda solução da EDO $y'' - 5y' + 6y = 0$ é da forma $y = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$?

Seja y_p uma solução da EDO. Sejam a e b definidos por $a = y_p(0)$ e $b = y_p'(0)$. Formulemos o PVI

$$(\star)\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 0 \\ y(0) = a\,,\ y'(0) = b \end{cases}$$

Vamos procurar se existem valores para C_1 e C_2 para os quais as condições iniciais se cumpram com $y = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$. Como no item (c), investigamos o sistema

$$(\star\star)\begin{cases} C_1 + C_2 = a \\ 2C_1 + 3C_2 = b \end{cases}$$

O sistema linear $(\star\star)$ é possível e determinado, pois seu determinante é não nulo. De fato, resolvendo encontra-se $C_1 = 3a - b$ e $C_2 = b - 2a$. Portanto $y = (3a - b)e^{2t} + (b - 2a)e^{3t}$ e y_p são ambas soluções do PVI $(\star)$. Mas pelo Teorema de Existência e Unicidade enunciado acima, a solução deste PVI é única. Logo, $y_p = (3a - b)e^{2t} + (b - 2a)e^{3t}$, provando que toda solução y_p da EDO $y'' - 5y' + 6y = 0$ é da forma $y = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$.

Observação. Tomar combinação linear de duas funções y_1 e y_2 é supérfluo se uma delas for um múltiplo da outra. Por exemplo, se $y_2 = \lambda y_1$, então a combinação linear $y = C_1y_1 + C_2y_2$ é igual a $y = \big(C_1 + \lambda C_2\big)y_1$, ou seja é da forma $y = C\,y_1$, e y_2 é totalmente supérflua. Não ganharíamos nada tomando combinação linear das duas funções. Daria no mesmo tomar os múltiplos de uma só delas. Por esta razão damos a definição abaixo.

Definição. Duas funções y_1 e y_2 são ditas *linearmente independentes* se uma não for um múltiplo da outra. Caso contrário são ditas linearmente dependentes.
Por exemplo, $\{e^t, e^{2t}\}$ são linearmente independentes. $\{t^2 - 2, 6 - 3t^2\}$ são linearmente dependentes.

Definição. Um *sistema fundamental de soluções* para uma EDOLH de 2ª ordem é um par de soluções linearmente independentes.

Exemplo: 1) $\{\cos x, \operatorname{sen} x\}$ é um sistema fundamental de soluções para a EDO $y'' + y = 0$. A partir daí, tomando combinação linear, obtém-se a solução geral

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x$$

2) Consideremos a EDO $y'' - 4y = 0$. Queremos resolver esta equação. Meio caminho andado é saber de que forma procurar a solução. Mais adiante ficará claro que devemos procurar solução em forma de exponencial $y = e^{\lambda x}$. Substituindo na EDO, temos

$$\left(e^{\lambda x}\right)'' - 4e^{\lambda x} = 0,$$

ou seja,

$$\lambda^2e^{\lambda x} - 4e^{\lambda x} = 0.$$

Portanto, a condição para que $y = e^{\lambda x}$ seja solução de nossa EDO é que λ seja raiz da equção algébrica

$$\lambda^2 - 4 = 0.$$

$\{e^{2x}, e^{-2x}\}$ é um sistema fundamental de soluções para a EDO $y'' - 4y = 0$. Note que o sistema fundamental de soluções não é ínico. Por exemplo, um outro sistema fundamental de soluções para a mesma EDO é dado por

$$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \cosh(2x)$$

e

$$y_4 = \frac{y_1 - y_2}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \operatorname{senh}(2x)$$

Suponhamos que se queira resolver um PVI

$$\begin{cases} y'' - 4y = 0 \\ y(0) = a, \quad y'(0) = b \end{cases} \tag{9}$$

Usandos o primeiro sistema fundamental de soluções $\{e^{2x}, e^{-2x}\}$, escrevemos a solução geral como $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$. Substituindo

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} \qquad \text{e} \qquad y' = 2C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-2x}$$

nas condições iniciais $y(0) = a$, $y'(0) = b$, temos

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = a \\ 2C_1 - 2C_2 = b \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos

$$C_1 = \frac{a}{2} + \frac{b}{4} \qquad \text{e} \qquad C_2 = \frac{a}{2} - \frac{b}{4}.$$

Portanto, a solução do PVI (9) é

$$y = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{4}\right)e^{2x} + \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{4}\right)e^{-2x}.$$

Poderíamos ter o usado o segunda sistema fundamental de soluções $\{\cosh(2x), \operatorname{senh}(2x)\}$. A partir da definição das funções hiperbólicas

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

é imediato verificar que

$$\Big(\cosh x\Big)' = \operatorname{senh} x\,, \qquad \Big(\operatorname{senh} x\Big)' = \cosh x\,, \qquad \cosh 0 = 1 \qquad \text{e} \qquad \operatorname{senh} 0 = 0\,.$$

Então, escrevendo a solução na forma $y = C_3 \cosh(2x) + C_4 \operatorname{senh}(2x)$, temos que

$$y(0) = C_3 \qquad \text{e} \qquad y'(0) = 2C_4\,,$$

de onde segue que $C_3 = a$ e $C_4 = \dfrac{b}{2}$. Logo a solução do PVI (9) é

$$y = a\cosh(2x) + \frac{b}{2}\operatorname{senh}(2x).$$

Vemos que para resolver um PVI como (9), o sistema fundamental $\{\cosh(2x), \operatorname{senh}(2x)\}$ é até mais adequado do que o sistema $\{e^{2x}, e^{-2x}\}$.