LISTA DE EXERCÍCIOS
TAXAS RELACIONADAS

1. Duas variáveis x e y são funções de uma variável t e estão relacionadas pela equação:

$$y^2 - 3xy + x^2 = 25$$

Se a taxa de variação de x em relação a t é igual a 1 quando $x = 0$ então determine qual a taxa de variação de y em relação a t neste mesmo instante. **RESPOSTA:**$y' = \frac{3}{2}$

2. Uma escada de $6m$ de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada começa a escorregar horizontalmente à taxa constante de $0,6m/s$, com que velocidade o topo da escada percorre a parede quando ele está a $4m$ do solo. **RESPOSTA:**$-\frac{3\sqrt{5}}{10}$ m/s .

3. Às $8h$ o navio A está a $25km$ ao sul do navio B. Se o navio A está navegando para o oeste à $16km/h$ e o navio B está navegando para o sul a $20km/h$ então determine a razão em que a distância entre os navios está variando às $8h30min$. **RESPOSTA:**$-\frac{172}{17}$ Km/h

4. Um tanque tem a forma de um cone circular reto invertido, com $4m$ de altura e raio da base $2m$. Se a água entra no tanque à razão de $0,001m^3/min$, calcule a razão em que o nível de água está subindo quando a altura é $1m$. **RESPOSTA:**$\frac{4}{1000\pi}$ m/min.

5. Um farol giratório completa uma volta a cada 15 segundos. O farol está a $60m$ de P, o ponto mais próximo em uma praia retílinea. Determine a razão em que um raio de luz do farol está se movendo ao longo da praia em um ponto, Q, a $150m$ de P. **RESPOSTA:**3480π m/min.

6. Um painel solar de $3m$ de comprimento equipado com um ajustador hidráulico é colocado de forma inclinada sobre um edifício. À medida que o sol se move o painel é ajustado automaticamente de forma que os raios solares sempre incidam de maneira perpendicular a ele de modo a maximizar a captação de energia. a) determine a relação entre a taxa dy/dt à qual o painel deve ser movido e a taxa $d\theta/dt$ à qual o ângulo de inclinação dos raios aumenta. b) Se , quando $\theta = 30°$, $d\theta/dt = 15graus/h$ determine dy/dt **RESPOSTA:**a)$\frac{dy}{dt} = -3\,\text{sen}\,(\theta)\frac{d\theta}{dt}$ e b) $\frac{dy}{dt} = -\frac{\pi}{8}m/h$

7. Ao ser aquecida uma chapa circular de metal, seu diâmetro varia à razão de $0,01cm/min$. Determine a taxa à qual a área de uma das faces varia quando o diâmetro é $30cm$. **RESPOSTA:**$0,15\pi cm^2/min$.

8. Suponha que uma bola de neve esteja se derretendo , com raio decrescendo à razão constante, passando de $30cm$ para $20cm$ em 45 minutos. Qual a variação do volume quando o raio está com $25cm$. **RESPOSTA:**$-\frac{5000\pi}{9}$ $cm^3/min.$.

9. Uma luz está no alto de um poste de $5m$. Um menino de $1,6m$ se afasta do poste em linha reta à razão de $1,2m/s$. A que taxa se move a ponta de sua sombra quando ele está a $6m$ do poste? A que taxa aumenta o comprimento de sua sombra? **RESPOSTA:**a) $1,764m/s$ b) $0,564m/s$

10. A areia que vaza de um depósito forma uma pilha cônica cuja altura é sempre igual ao raio da base. Se a altura da pilha aumenta à razão de $15cm/min$ determine a taxa à qual a areia está se escoando quando a altura da pilha é $25cm$. **RESPOSTA:**$9375\pi\ cm^3/min$

11. Uma pessoa que solta um papagaio segura a corda a $1,5m$ do solo. A corda é liberada à razão de $0,6m/s$ na medida em que o papagaio se move horizontalmente a uma altura de $33,5m$. Supondo que a corda fique sempre tensa, determine a taxa à qual o papagaio está se movendo no instante em que foram liberados $38m$ de corda. **RESPOSTA:**1,112 m/s

12. Um balão de ar quente sobe verticalmente à medida que uma corda, amarrada à sua base , é liberada à razão de $1m/min$. O carretel que libera a corda está a $6,5m$ da plataforma de embarque dos passageiros. A que taxa o balão está subindo quando tiverem sido liberados $150m$ de corda? **RESPOSTA:**$\frac{dh}{dt} \approx 1$

13. Da beira de um rochedo $60m$ acima de um lago um menino deixa cair um pedra e, depois de $2s$ deixa cair outra pedra da mesma posição. Discuta a taxa na qual a distância entre as pedras varia durante o próximo segundo (Admita que a distância percorrida em t segundos por um objeto em queda livre é $4,9t^2m$). **RESPOSTA:**19,6 m/s

14. Um míssel é lançado verticalmente para cima de um ponto que está a $8km$ de uma estação de rastreamento, e à mesma altura desta. Durante os primeiros 20 segundo de vôo, seu ângulo de elevação θ varia à razão constante de 2 graus por segundo. Determine a velocidade do míssel quando o ângulo de elevação for 30 graus. **RESPOSTA:**$\frac{32\pi}{270}Km/s$

15. Um avião está a uma velocidade constante de $580Km/h$ e subindo a um ângulo de 45 graus . No momento em que ele está a uma altura de $3,2km$, passa diretamente sobre um torre de controle no solo. Ache a taxa de variação da distância do avião à torre um minuto mais tarde. (Despreze a altura da torre). **RESPOSTA:**569,65 Km/h

16. Um meliante foge sobre uma muralha reta a uma velocidade de 4 m/s. Um holofote localizado a 20 metros de distância da muralha, e mesma altura que esta, focaliza o homem em fuga. A que taxa o holofote está girando quando o gatuno se encontra a 15 metros do ponto da muralha que está mais próximo do holofote? **RESPOSTA:**$\frac{16}{125}$ rad/s

DICAS DE RESOLUÇÃO

1. $y = y(t)$ e $x = x(t)$ deixe $'$ representar a derivada destas funções em relação a variável independente t. Derive ambos os lado da expressão inicial em relação a variável t. Você obterá uma nova relação envolvendo: x, y, x', y'. $y'(t)$ para o valor de t que fornece $x(t) = 0$ é a quantidade procurada. Para este mesmo valor de t tem-se $x'(t) = 1$. O valor de y quando $x = 0$ pode ser facilmente encontrada da relação inicial e vale: $y = \pm 5$ O valor exato de y não importará aqui, somente o fato de que $y \neq 0$ será importante. Agora é só substituir estes valores na expressão obtida após a derivação, encontrando $y(2y' - 3) = 0$ e consequentemente $y' = \frac{3}{2}$, visto que $y \neq 0$.

2. Totalmente análogo ao exemplo feito em classe.

3. Totalmente análogo ao exemplo feito em classe.

4. Totalmente análogo ao exemplo feito em classe.

5. Como uma volta completa corresponde a 2π rad, segue segue $\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{15}\ rad/s$. Da geometria do problema obtém-se a relação $x(t) = 60 \operatorname{tg} \theta$. Onde $x(t)$ representa a distância ao ponto P, na praia, imediatamente em frente ao farol. Assim, quando $x = 150$ temos que a distância do farol até o ponto Q vale, por pitágoras $\sqrt{150^2 + 60^2}$ logo $\sec^2(\theta) = \frac{150^2+60^2}{60^2}$. Derivando-se a relação obtida entre x e θ obtém-se $\frac{dx}{dt} = 60 \sec^2(\theta) \frac{d\theta}{dt}$ e substituindo-se os valores acima encontrados obtém-se $\frac{dx}{dt} = 58\pi\ m/s = 3480\pi\ m/min$.

6. a) Chamando de ϕ o ângulo que o painel faz com a horizontal temos que $\operatorname{sen}(\phi) = \frac{y}{3}$ e ainda $\phi = \frac{\pi}{2} - \theta$, onde θ é o ângulo que os raios solares fazem com o plano sobre o qual se apóia o painel. b) Derivando-se a relação encontrada para y obtém-se $\frac{dy}{dt} = 3\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)(-\frac{d\theta}{dt}) = -3 \operatorname{sen}(\theta) \frac{d\theta}{dt}$. Substituindo-se os valores dados, após transformá-los em radianos,obtemos:$\frac{dy}{dt} = -\frac{\pi}{8}$

7. Escreva a relação entre a área de um círculo e seu diâmetro. Como a área e o diâmetro são funções do tempo, derive a expressão encontrada em relação a t. Esta nova expressão relaciona as taxas A' e d' e envolvem também d. Substituindo os valores de $d = 30$ e $d' = 0,01\ cm/min$ fornecidos pelo problema obtém-se $A' = 0,15\pi\ cm^2/min$.

8. Escreva a relação entre o volume da esfera e seu raio. Como o volume e o raio são funções do tempo, derive a expressão encontrada em relação a t. Esta nova expressão relaciona as taxas V' e r' e envolve também r. O valor de $r' = -\frac{10}{45}$ pode ser obtido da informação que diz que tal taxa de variação é constante e igual a $\frac{10}{45}$ cm/min. Note que o sinal de menos -"vem do fato de que o raio está decrescendo com o tempo. Substituindo então os valores de r e r' fornecidos pelo problema obtém-se o valor procurado para V'.

9. a) Chame de $x(t)$ a posição do garoto e $s(t)$ o comprimento de sua sombra. Isto nos leva diretamente a $\frac{dx}{dt} = 1,2\ m/s$ e, por semelhança de triângulos obtemos a relação $0,32 = \frac{1,6}{5} = \frac{s}{x+s}$. Derivando-se tal expressão em relação a t obtemos: $\frac{ds}{dt} = (\frac{1,6}{3,4})(1,2) = 0,564\ m/s$. b) Se chamarmos de $y(t)$ a posição da ponta da sombra do menino então $y(t) = x(t) + s(t)$ o que nos leva a $y'(t) = x'(t) + s'(t)$ e portanto, segue do ítem a) que $y'(t) = 1,764\ m/s$.

10. Da expressão para o volume do cone circular reto obtemos que $V = \frac{\pi}{3}h^3$. Derivando-se em relação a t obtém-se uma relação entre as taxas destas funções. A substituição direta dos valores de h e h' fornecidos pelo problema nos leva direto ao resultado de $9375\pi\ cm^2/min$.

11. Descontando-se a altura de onde a linha é solta até o chão , obtemos,por pitágoras a expressão: $l^2 = 32^2 + x^2$ onde l representa o comprimento da linha e x a distância do garoto que solta a pipa até o ponto no solo exatamente sob a pipa. Derivando-se tal expressão obtemos uma relação entre as respectivas taxas e que ainda inclui x e l. Dos dados do problema segue que devemos agora tomar $l = 38$ e $x = \sqrt{420} = 20,49$ (tal valor de x foi novamente obtido fazendo-se uso do teorema de Pitágoras. Assim obtemos $x' = \frac{57}{10\sqrt{105}} \approx 1,112\ m/s$.

12. Novamente fazemos uso do teorema de Pitágoras obtendo a relação: $h^2 + (6,5)^2 = l^2$ onde l é o comprimento da corda e h a altura do balão. O valor de $h = 149,86$ quando $l = 150$ também é obtido por Pitágoras. Assim, deerivando-se a relação acima e substituindo o s valores de l, l' e h, obtemos $h' \approx 1$.

13. Se $d_i(t)$ representa a distância percorrida pela i-ésima pedra então temos $d_1(t) = 4,9t^2$ e $d_1(t) = 4,9(t-2)^2$, $\forall t \geq 0$. Assim, a distância entre as pedras é dada por $d(t) = d_1(t) - d_2(t) = (19,6)t - 19,6$. De onde se obtem diretamente que $d'(t) = 19,6$.

14. Da geometria do problema obtemos a relação $h(t) = 8\,\mathrm{tg}\,(\theta)$, ondee h representa a altura do míssel. Derivando-se tal expressão e usando os valores dados no problema obtemos $h' = \frac{32\pi}{270}\ Km/s$. Lembre-se de transformar o valor dos ângulos para radianos: $\frac{d\theta}{dt} = 2\ graus/rad = \frac{\pi}{90}\ rad/s$.

15. Este é complicado. Valendo-se da lei dos cossenos obtemos a seguinte expressão: $d^2(t) = (3,2)^2 + l^2(t) - 2(3,2)l(t)\frac{\sqrt{2}}{2}$ onde d representa a distância do avião à torre de controle no instante t e $l(t)$ a distância percorrida pelo avião em linha reta formando um ângulo de elevação de 45^o (isto de cara nos fornece que $l'(t) = 580$). Derivando-se esta expressão obtém-se: $d' = \frac{1}{d_0}(l_0 - (1,6)\sqrt{2})l'$ onde d_0 e l_0 representam os valores de d e l respectivamente para t igual a 1 min. após o avião ter passado sobre a torre de controle. Tais valores são obtidos fazendo-se uso da lei dos cossenos novamente. Obs: Neste problema, os arredondamentos de contas são tantos que talvez você não chegue examente ao valor fornecido como resposta. Qualquer valor próximo de 570 será uma boa aproximação.

16. É a mesma questão feita em sala; Exemplo 5 pag. 256