Integrais
Resolução dos Exercícios Propostos

Exercício 1: Encontre a integral indefinida das seguintes funções:

a) $f(x)=7x^{\frac{5}{2}}+4$; b) $g(t)=\dfrac{t^5}{2}-\dfrac{4}{t^{-3}}+3t$; c) $h(u)=u^3(-2u+u^{-5})$;

d) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^5}$ e) $h(v)=(-2+v^{-2})^2$ f) $g(s)=\dfrac{1}{s^4}$

Solução:

a) $\int\left(7x^{(5/2)}+4\right)dx=2x^{(7/2)}+4x+C$;

b) $\int\left(\dfrac{t^5}{2}-\dfrac{4}{t^{-3}}+3t\right)dt=\dfrac{1}{12}t^6-t^4+\dfrac{3}{2}t^2+C$;

c) $\int u^3(-2u+u^{-5})\,du=\int(-2u^4+u^{-2})\,du=-\dfrac{2}{5}u^5-\dfrac{1}{u}+C$;

d) $\int\dfrac{x+1}{x^5}dx=\int(x^{-4}+x^{-5})\,dx=-\dfrac{1}{3}x^{-3}-\dfrac{1}{4}x^{-4}+C$;

e) $\int(-2+v^{-2})^2dv=\int(4-4v^{-2}+v^{-4})\,dv=4v+4\,\dfrac{1}{v}-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{v^3}+C$;

f) $\int\dfrac{1}{s^4}ds=-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{s^3}+C$.

Exercício 2: Encontre a integral indefinida das seguintes funções:

a) $f(x)=\dfrac{3\cos x}{7\,\mathrm{sen}^2\,x}$; b) $g(t)=\dfrac{2\cos^2 t+\mathrm{tg}\,t}{\cos t}$; c) $f(x)=\dfrac{\mathrm{sen}^2\,x}{7\cos^2 x}+\dfrac{\cos^2 x}{7\cos^2 x}$.

Solução:

a) $\int\dfrac{3\cos x}{7\,\mathrm{sen}^2\,x}\,dx=\dfrac{3}{7}\int\mathrm{cotg}\,x\ \mathrm{cossec}\,x\,dx$, mas pela tabela de derivação dada no final do Fundamentum nº 27, obtém-se que:

$$\frac{d}{dx}\mathrm{cossec}\,x=-\mathrm{cossec}\,x\ \mathrm{cotg}\,x\ .$$

Assim, $\int\dfrac{3\cos x}{7\,\mathrm{sen}^2\,x}\,dx=-\dfrac{3}{7}\,\mathrm{cossec}\,x+C$.

b) $\int\dfrac{2\cos^2 t+\mathrm{tg}\,t}{\cos t}dt=\int\left(2\cos t+\dfrac{\mathrm{sen}\,t}{\cos^2 t}\right)dt=\int 2\cos t\,dt+\int\dfrac{\mathrm{sen}\,t}{\cos^2 t}dt\ =2\mathrm{sen}\,t+\int\mathrm{tg}\,t\ \mathrm{cotg}\,t\,dt$, mas novamente pela tabela de derivação dada no final do Fundamentum nº 27, obtém-se que:

$$\frac{d}{dx}\sec x=\sec x\ \mathrm{tg}\,x\ ,$$

assim, $\int\dfrac{2\cos^2 t+\mathrm{tg}\,t}{\cos t}dt=2\mathrm{sen}\,t+\sec t+C$.

c) $\int \frac{\text{sen}^2 x}{7\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{7\cos^2 x}\, dx = \frac{1}{7}\int (1+\text{tg}^2 x)\, dx = \frac{1}{7}\int \sec^2 x\, dx$, mas novamente pela tabela de derivação dada no final do fundamentum nº 27, obtém-se que:

$$\frac{d}{dx}\text{tg}\, x = \sec^2 x \ ,$$

assim, $\int \frac{\text{sen}^2 x}{7\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{7\cos^2 x}\, dx = \frac{1}{7}\text{tg}\, x + C.$

Exercício 3: Calcule as seguintes integrais indefinidas, utilizando a técnica de substituição:

a) $\int 2\sqrt{2-3x}\,dx$; b) $\int 3x\sqrt{2x^2-4}\,dx$; c) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$; d) $\int \text{sen}\left(\frac{3x}{2}\right)dx$;

e) $\int 3t\cos(3t^2)\,dt$; f) $\int \cos^2 t\ dt$; g) $\int \frac{\sec^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$; h) $\int \frac{1}{1+9x^2}\ dx$.

Sugestão para resolver o item c: considere $u = 1+x$.

Solução:

a) Fazemos $u = 2-3x$, logo $du = -3dx$, e assim,

$$\int 2\sqrt{2-3x}\ dx = -\frac{2}{3}\int u^{1/2}du = -\frac{4}{9}u^{3/2} + C = -\frac{4}{9}(2-3x)^{3/2} + C \ .$$

b) Fazemos $u = x^2 - 2$, logo $du = 2x\,dx$, e assim,

$$\int 3x\sqrt{2x^2-4}\ dx = \int \frac{3}{2}(2u)^{1/2}du = \frac{3\sqrt{2}}{2}\frac{2}{3}\ u^{3/2} + C = \sqrt{2}\,(x^2-2)^{3/2} + C \ .$$

c) Fazemos, conforme sugestão $u = 1+x$, logo $du = dx$, e assim,

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx = \int \frac{u-1}{u^{1/2}}du = \int \left(\frac{u}{u^{1/2}} - \frac{1}{u^{1/2}}\right) du =$$

$$= \int u^{1/2}\ du - \int u^{-1/2}\ du = \frac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2} + C = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} - 2(1+x)^{1/2} + C \ .$$

d) Fazemos $u = \frac{3}{2}x$, logo $du = \frac{3}{2}dx$, e assim,

$$\int \text{sen}\left(\frac{3x}{2}\right)dx = \int \frac{2}{3}\text{sen}\, u\, du = -\frac{2}{3}\cos u + C = -\frac{2}{3}\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + C \ .$$

e) Fazemos $u = 3t^2$, logo $du = 6t\,dt$, e assim,

$$\int 3t\cos(3t^2)dt = \int \frac{1}{2}\cos u\ du = \frac{1}{2}\text{sen}\, u\ + C = \frac{1}{2}\text{sen}\, 3t^2\ + C \ .$$

f) Fazemos $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$, e assim,

$$\int \cos^2 t\ dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \int \frac{1}{2}dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t\ dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\text{sen}\, 2t + C \ .$$

g) Fazemos $u = \sqrt{x}$, logo $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, e assim,

$$\int \frac{\sec^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = \int 2\sec^2 u\ du = 2\,\text{tg}\, u + C = 2\,\text{tg}(\sqrt{x}) + C \ .$$

h) Fazemos $u = 3x$, logo $du = 3dx$, e assim,

$$\int \frac{1}{1+9x^2}\, dx = \int \frac{1}{3}\frac{1}{1+u^2}\, du = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} u + C = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3x) + C.$$

Exercício 4: Calcule as seguintes integrais, utilizando a técnica de integração por partes.

a) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx$; b) $\int \operatorname{arcsen} x\, dx$; c) $\int (2x+1)\operatorname{sen} x\, dx$;

d) $\int x^3 \operatorname{sen} x\, dx$; e) $\int \operatorname{cossec}^2 x \operatorname{cotg} x\, dx$; f) $\int \operatorname{sen} x \sec^2 x\, dx$.

Solução:

a) Façamos $u = x$ e $dv = \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$, logo $du = dx$ e $v = 2\sqrt{x+1}$, e assim,

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx = \int udv = uv - \int vdu = 2x\sqrt{x+1} - \int 2\sqrt{x+1}\, dx = 2x\sqrt{x+1} - \frac{4}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x+1}\,(x-2) + C.$$

b) Façamos $u = \operatorname{arcsen} x$ e $dv = dx$, logo $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ e $v = x$, e assim,

$\int \operatorname{arcsen} x\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du = x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, fazendo agora $t = 1 - x^2$, temos que $dt = -2x$, e assim, $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}du = u^{1/2} = -(1-x^2)^{1/2}$. Portanto,

$$\int \operatorname{arcsen} x\, dx = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

c) Façamos $u = 2x+1$ e $dv = \operatorname{sen} x\, dx$, logo $du = 2dx$ e $v = -\cos x$, e assim,

$$\int (2x+1)\operatorname{sen} x\, dx = -(2x+1)\cos x + \int 2\cos x\, dx = 2(\operatorname{sen} x - x\cos x) - \cos x + C.$$

d) Segue imediatamente do item c que $\int x \operatorname{sen} x\, dx = \operatorname{sen} x - x\cos x + C$.

Façamos então $u = x^3$ e $dv = \operatorname{sen} x\, dx$, logo $du = 3x^2\, dx$ e $v = -\cos x$. Portanto,

$$\int x^3 \operatorname{sen} x\, dx = -x^3\cos x + 3\int x^2 \cos x\, dx. \qquad (1)$$

Analisando a integral $\int x^2 \cos x\, dx$, observamos que podemos calculá-la também por partes, fazendo agora $u = x^2$ e $dv = \cos x\, dx$, logo $du = 2x\, dx$ e $v = \operatorname{sen} x$, e assim, $\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \operatorname{sen} x - 2\int x \operatorname{sen} x\, dx$ e pela observação acima, concluímos que

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \operatorname{sen} x - 2(\operatorname{sen} x - x\cos x) \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1), obtemos

$$\int x^3 \operatorname{sen} x\, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x + 6x\cos x - 6\operatorname{sen} x + C.$$

e) Façamos $u = \operatorname{cossec} x$ e $dv = \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x\, dx$, logo $du = -\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x\, dx$ e $v = -\operatorname{cossec} x$, e assim, $\int \operatorname{cossec}^2 x \operatorname{cotg} x\, dx = -\operatorname{cossec}^2 x - \int (-\operatorname{cossec} x)(-\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x)dx$. Logo,

$2\int \operatorname{cossec}^2 x \operatorname{cotg} x\, dx = -\operatorname{cossec}^2 x$. Portanto, $\int \operatorname{cossec}^2 x \operatorname{cotg} x\, dx = -\frac{\operatorname{cossec}^2 x}{2} + C$

f) Façamos $u = \operatorname{sen} x$ e $dv = \sec^2 x\, dx$, logo $du = \cos x\, dx$ e $v = \operatorname{tg} x$, e assim,

$$\int \operatorname{sen} x \sec^2 x\, dx = \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x(\cos x\, dx) = \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x + \int \operatorname{sen} x\, dx = \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x + \cos x + C.$$

Exercício 5 (resolução com o uso de calculadora ou microcomputador): Escreva a soma de Riemann das seguintes funções nos intervalos indicados, usando a quantidade n de subintervalos na partição considerada. A seguir utilize uma calculadora ou software para calcular o valor numérico da soma.

a) $f(x) = -x^2 - 1$, $[2,5]$, $n = 7$, $n = 14$, $n = 100$, $n = 1000$;

b) $f(x) = \text{sen}\ x$, $[0,\pi]$, $n = 6$, $n = 10$, $n = 100$, $n = 1000$;

c) $f(x) = \cos x$, $[0,\pi]$, $n = 6$, $n = 10$, $n = 100$, $n = 1000$;

d) $f(x) = \cos x - \text{sen}\ x$, $[0,\pi]$, $n = 6$, $n = 10$, $n = 100$, $n = 1000$.

Solução:

Exercício 6: Calcule, mediante o Teorema Fundamental do Cálculo, as integrais a seguir.

a) $\int_0^{\pi} \cos x\, dx$; b) $\int_0^{\pi} (\cos x - \text{sen}\ x)\, dx$; c) $\int_1^0 (x^3 + 5)\, dx$.

d) $\int_{\pi/2}^{2\pi} x \,\text{sen}\ x\, dx$; e) $\int_0^1 x(2x^2 - 1)^9\ dx$.

Solução:

a) $$\int_0^{\pi} \cos x\, dx = \text{sen}\, x \Big|_0^{\pi} = \text{sen}\, \pi - \text{sen}\, 0 = 0.$$

b) $$\int_0^{\pi} (\cos x - \text{sen}\ x)\, dx = \text{sen}\, x + \cos x \Big|_0^{\pi} = \text{sen}\, \pi + \cos \pi - \text{sen}\, 0 - \cos 0 = -2.$$

c) $$\int_1^0 (x^3 + 5)\, dx = \frac{1}{4}x^4 + 5x \Big|_1^0 = -\frac{1}{4} - 5 = -\frac{21}{4}.$$

d) No item d do exercício 4, vimos que $\int x\,\text{sen} x\, dx = \text{sen}\, x - x\cos x + C$, assim,

$$\int_{\pi/2}^{2\pi} x\,\text{sen}\ x\, dx = \text{sen}\, x - x\cos x \Big|_{\pi/2}^{2\pi} = \text{sen}\, 2\pi - 2\pi\cos 2\pi - \text{sen}\, \pi/2 + \frac{\pi}{2}\cos \pi/2 = -(1 + 2\pi).$$

e) Fazendo $u = 2x^2 - 1$, segue que: se $x = 0$, $u = -1$, se $x = 1$, $u = 1$ e $du = 4x\, dx$ e, assim,

$$\int_0^1 x(2x^2 - 1)^9\ dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^1 u^9 du = \frac{1}{40}u^{10} \Big|_{-1}^1 = 0.$$

Exercício 7: Nos itens a seguir expresse a área das regiões limitadas pelas curvas dadas. Faça isso de duas maneiras, com integrações na variável x e com integrações na variável y. Escolha uma das maneiras e calcule a área.

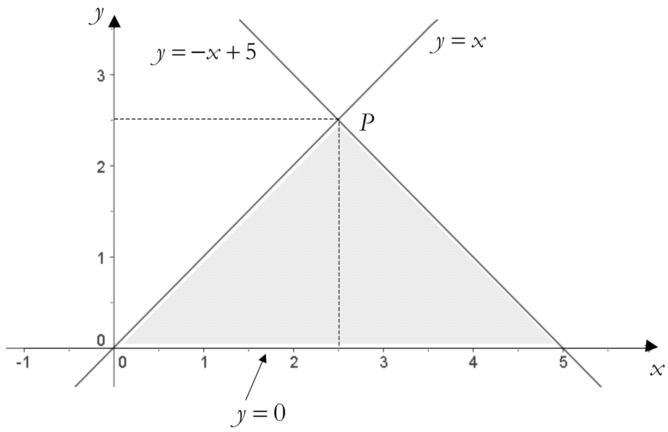
a) $y = 0$, $y = x$ e $y = -x + 5$.

b) $x + y = 3$, $y = \frac{1}{2}x$ e $y = 2x$.

c) $y = x^2 + 1$, $y = x - 2$, $x = 0$ e $x = 5$.

Solução:

a)



Para se encontrar as coordenadas do ponto P devemos ter $x=-x+5$, ou seja $x=\frac{5}{2}$ e assim, $y=\frac{5}{2}$.

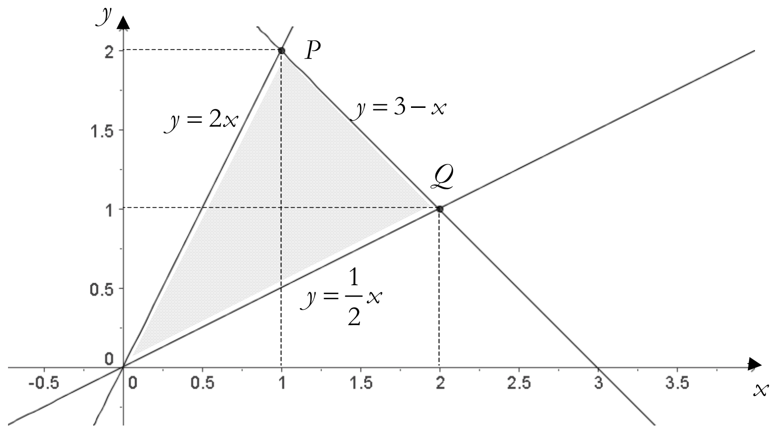
Integração na variável x:

$$A(R_x)=\int_0^{5/2} x\,dx+\int_{5/2}^{5}(-x+5)\,dx=\frac{1}{2}x^2\,\Big|_0^{5/2}+\left(-\frac{1}{2}x^2+5x\right)\Bigg|_{5/2}^{5}=\frac{25}{8}-\frac{25}{2}+25-\left(-\frac{25}{8}+\frac{25}{2}\right)=\frac{25}{4}\text{ u.a.}$$

Integração na variável y:

$$A(R_y)=\int_0^{5/2}[(5-y)-y]\,dy=\int_0^{5/2}(5-2y)\,dy=5y-y^2\,\Big|_0^{5/2}=\frac{25}{2}-\frac{25}{4}=\frac{25}{4}\text{ u.a.}$$

b)



Para se encontrar as coordenadas do ponto P devemos ter $2x=3-x$, ou seja $x=1$ e assim, $y=2$.

Para se encontrar as coordenadas do ponto Q devemos ter $\frac{1}{2}x=3-x$, ou seja $x=2$ e assim, $y=1$.

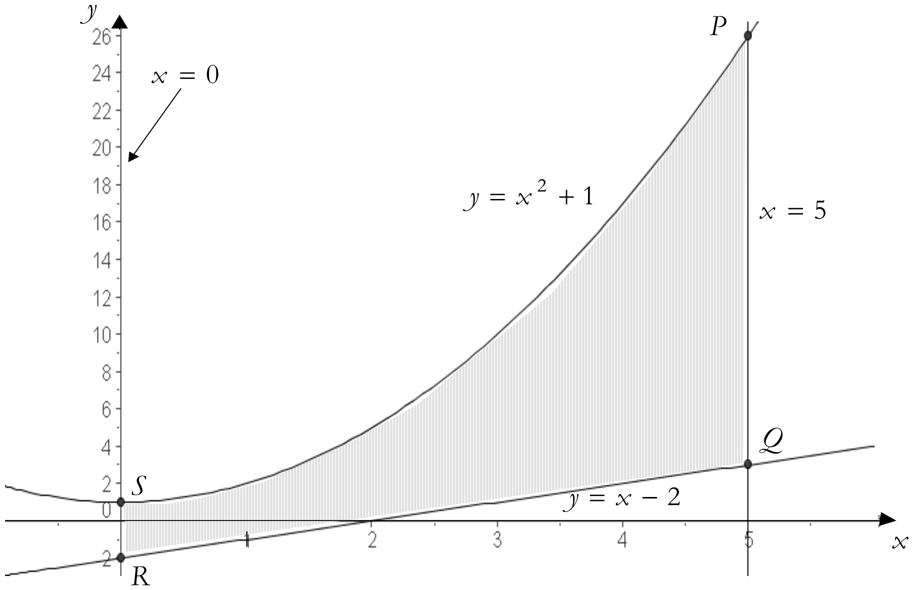
Integração na variável x:

$$A(R_x)=\int_0^1\left(2x-\frac{1}{2}x\right)dx+\int_1^2\left(3-x-\frac{1}{2}x\right)dx=\frac{3}{4}x^2\,\Big|_0^1+\left(3x-\frac{3}{4}x^2\right)\Big|_1^2=\frac{3}{2}\text{ u.a.}$$

Integração na variável y:

$$A(R_y)=\int_0^1 (2y-\frac{1}{2}y)\,dy+\int_1^2 (3-y-\frac{1}{2}y)\,dy=\frac{3}{4}y^2\,\Big|_0^1+(3y-\frac{3}{4}y^2)\Big|_1^2=\frac{3}{2}\text{ u.a.}$$

c)



O ponto P tem coordenada $x=5$ e como $y=x^2+1$, temos que $y=26$.
O ponto Q tem coordenada $x=5$ e como $y=x-2$, temos que $y=3$.
O ponto R tem coordenada $x=0$ e como $y=x-2$, temos que $y=-2$.
O ponto S tem coordenada $x=0$ e como $y=x^2+1$, temos que $y=1$.

Integração na variável x:

$$A(R_x)=\int_0^5 (x^2+1-x+2)\,dx=\int_0^5 (x^2-x+3)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x\right)\Bigg|_0^5=\frac{125}{3}-\frac{25}{2}+15=\frac{265}{6}\text{ u.a.}$$

Integração na variável y:

$$A(R_y)=\int_{-2}^1 (y+2)\,dy+\int_1^3 (y+2-\sqrt{y-1}\,)\,dy+\int_3^{26} (5-\sqrt{y-1}\,)\,dy=$$

$$=\left(\frac{y^2}{2}+2y\right)\Bigg|_{-2}^1+\left(\frac{y^2}{2}+2y-\frac{2}{3}\sqrt{(y-1)^3}\right)\Bigg|_1^3+\left(5y-\frac{2}{3}\sqrt{(y-1)^3}\right)\Bigg|_3^{26}=$$

$$=\frac{1}{2}+2-2+4+\frac{9}{2}+6-\frac{2}{3}\sqrt{2^3}-\frac{1}{2}-2+130-\frac{2}{3}\sqrt{25^3}-15+\frac{2}{3}\sqrt{2^3}=\frac{265}{6}\text{ u.a.}$$

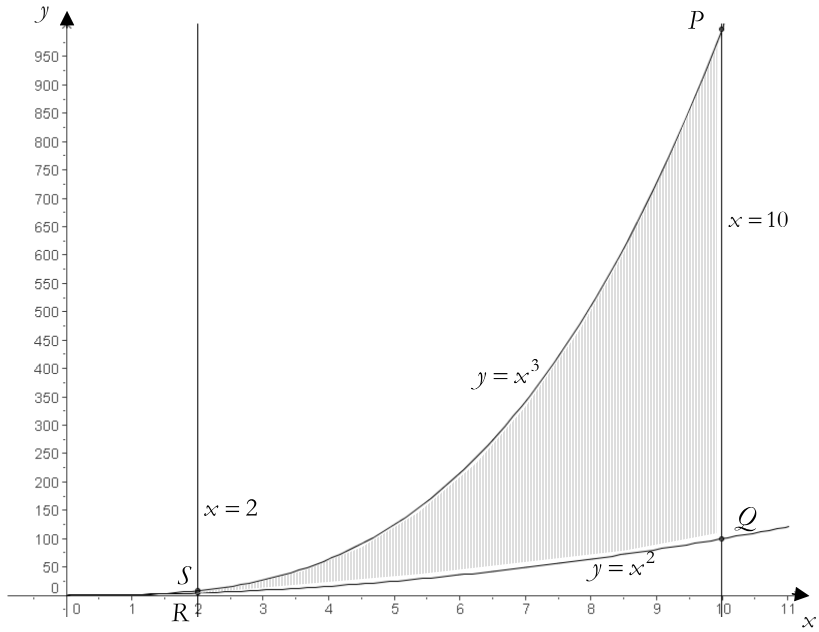
Exercício 8: Nos itens a seguir, apenas expresse, mediante integrais definidas, a área da região limitada pelas curvas dadas. Não é necessário calcular a(s) integral(is).

a) $y=x^2$, $y=x^3$, $x=2$ e $x=10$.

b) $y=\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x}-2$, $y=-x$ e $y=x-10$.

Solução:

a)



O ponto P tem coordenada $x = 10$ e como $y = x^3$, temos que $y = 1000$.

O ponto Q tem coordenada $x = 10$ e como $y = x^2$, temos que $y = 100$.

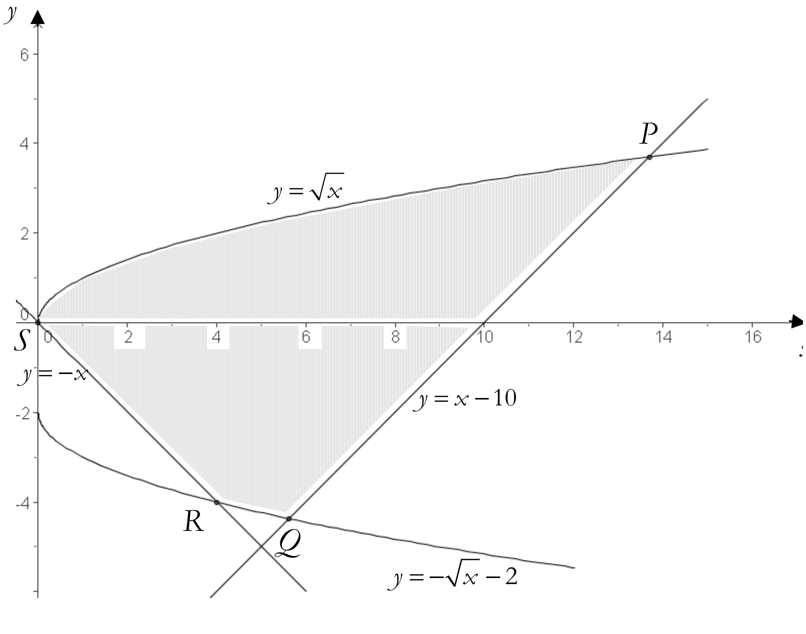
O ponto R tem coordenada $x = 2$ e como $y = x^2$, temos que $y = 4$.

O ponto S tem coordenada $x = 2$ e como $y = x^3$, temos que $y = 8$.

Integração na variável x: $A(R_x) = \int_2^{10} (x^3 - x^2)\, dx$.

Integração na variável y: $A(R_y) = \int_4^8 (\sqrt{y} - 2)\, dy + \int_8^{100} (\sqrt{y} - \sqrt[3]{y})\, dy + \int_{100}^{1000} (10 - \sqrt[3]{y}\,)\, dy$.

b)



Para se encontrar as coordenadas do ponto P devemos ter $\sqrt{x} = x - 10$, ou seja $x = \dfrac{21+\sqrt{41}}{2}$ e assim, $y = \dfrac{1+\sqrt{41}}{2}$.

Para se encontrar as coordenadas do ponto Q devemos ter $-\sqrt{x} - 2 = x - 10$, ou seja $x = \dfrac{17-\sqrt{33}}{2}$ e assim, $y = -\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}$.

Para se encontrar as coordenadas do ponto R devemos ter $-\sqrt{x} - 2 = -x$, ou seja $x = 4$ e assim, $y = -4$.

O ponto S é a origem.

Assim, temos

Integração na variável x:

$$A(R_x) = \int_0^4 (\sqrt{x} - (-x))\,dx + \int_4^{(17-\sqrt{33})/2} (\sqrt{x} - (-\sqrt{x} - 2))\,dx + \int_{(17-\sqrt{33})/2}^{(21+\sqrt{41})/2} (\sqrt{x} - (x - 10))\,dx =$$

$$= \int_0^4 (\sqrt{x} + x)\,dx + \int_4^{(17-\sqrt{33})/2} (2\sqrt{x} + 2))\,dx + \int_{(17-\sqrt{33})/2}^{(21+\sqrt{41})/2} (\sqrt{x} - x - 10)\,dx.$$

Integração na variável y:

$$A(R_y) = \int_{-\left(3+\sqrt{33}/2\right)}^{-4} (y - 10 - (y+2)^2)\,dy + \int_{-4}^{0} (y + 10 + y)\,dy + \int_0^{(1+\sqrt{41})/2} (y + 10 - y^2)\,dy =$$

$$= \int_{-\left(3+\sqrt{33}/2\right)}^{-4} (-y^2 - 3y + 6)\,dy + \int_{-4}^{0} (2y + 10)\,dy + \int_0^{(1+\sqrt{41})/2} (-y^2 + y + 10)\,dy.$$

Exercício 9: Encontre o domínio e as derivadas de primeira e de segunda ordem das seguintes funções:

a) $f(x) = \ln(3x^2 - 4x)$; b) $g(x) = \ln\sqrt{x}$;

c) $h(x) = \ln\left|x^2 - 2\right|$; d) $j(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$.

Solução:

a) $Dom\, f = (-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{4}{3}, +\infty\right)$.

$$f'(x) = \frac{6x-4}{3x^2-4x} \quad \text{e} \quad f''(x) = \frac{6(3x^2-4x) - (6x-4)^2}{(3x^2-4x)^2}.$$

b) $g(x) = \ln x^{1/2} = \dfrac{1}{2}\ln x$, assim, $Dom\, g = (0, +\infty)$.

$$g'(x) = \frac{1}{2x} \quad \text{e} \quad g''(x) = -\frac{1}{2x^2}.$$

c) $Dom\, h = \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

$$h'(x) = \frac{2x}{x^2-2} \quad \text{e} \quad h''(x) = \frac{2(x^2-2) - 2x \cdot 2x}{(x^2-2)^2} = -\frac{2(x^2+2)}{(x^2-2)^2}.$$

d) $Dom\, j = (0, +\infty)$.

$$j'(x)=\frac{\cos(\ln x)}{x} \quad \text{e} \quad j''(x)=\frac{-\operatorname{sen}(\ln x)\frac{1}{x}x-\cos(\ln x)}{x^2}=-\frac{\operatorname{sen}(\ln x)+\cos(\ln x)}{x^2}.$$

Exercício 10: Calcule as integrais dadas a seguir.

a) $\int\left(\frac{-2x+1}{6x}+\frac{1}{3x}\right)dx$; b) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx$; c) $\int \operatorname{tg} x\,dx$;

d) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{cotg} x\,dx$; e) $\int \ln x\,dx$.

Solução:

a) $\int\left(\frac{-2x+1}{6x}+\frac{1}{3x}\right)dx=\int\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{6x}+\frac{1}{3x}\right)dx=\int -\frac{1}{3}+\frac{1}{2x}\,dx=-\frac{x}{3}+\frac{\ln|x|}{2}+C$.

b) Fazendo $u=\ln x$, temos que $du=\frac{1}{x}dx$ e, assim, $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx=\frac{\ln^2 x}{2}=\frac{\ln^2 2}{2}$.

c) Fazendo $u=\cos x$, temos que $du=-\operatorname{sen} x\,dx$ e, assim,

$$\int \operatorname{tg} x\,dx=\int\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}dx=-\int\frac{du}{u}=-\ln|u|+C=-\ln|\cos x|=\ln|\sec x|+C .$$

d) Fazendo $u=\operatorname{sen} x$, temos que: $du=\cos x\,dx$, e além disso, se $x=\frac{\pi}{4}$, então $u=\frac{\sqrt{2}}{2}$; se $x=\frac{\pi}{2}$, então $u=1$. Assim,

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\operatorname{cotg} x\,dx=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx=\int_{\sqrt{2}/2}^{1}\frac{du}{u}=\left(\ln u\right)\Big|_{\sqrt{2}/2}^{1}=\ln 1-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\ln 2}{2} .$$

e) Integrando por partes, tomemos $u=\ln x$ e $dv=dx$, logo, $du=\frac{1}{x}dx$ e $v=x$. Assim,

$$\int \ln x\,dx=x\ln x-\int x\frac{1}{x}dx=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C .$$

Exercício 11: Encontre a derivada das seguintes funções:

a) $y=\ln\left(\frac{x^x}{\operatorname{sen} x}\right)$; b) $y=(x^2-1)^{10}\ln\sqrt{3x+2}$; c) $y=\cos(\ln x^2)$;

d) $y=(2x^2-3x-7)(5x-4)$; e) $y=(2x^2-3x-7)^{21}(5x-4)^{15}$.

Solução:

a) Como $y=\ln x^x-\ln(\operatorname{sen} x)=x\ln x-\ln(\operatorname{sen} x)$, temos:

$$y'=\ln x+1-\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}=\ln x-\operatorname{cotg} x+1 .$$

b) Como $y=\frac{1}{2}(x^2-1)^{10}\ln(3x+2)$, temos: $y'=\frac{1}{2}10(x^2-1)^9 2x\ln(3x+2)+\frac{1}{2}(x^2-1)^{10}\frac{3}{3x+2}=$

$$=10x(x^2-1)^9\ln(3x+2)+\frac{3}{2}\frac{(x^2-1)^{10}}{3x+2} .$$

c) Como $y=\cos(2\ln x)$, temos: $y'=-\operatorname{sen}(2\ln x)\frac{2}{x}=-\frac{2\operatorname{sen}(\ln x^2)}{x}$.

d) $y'=(4x-3)(5x-4)+5(2x^2-3x-7)$.

e) Temos que: $\ln|y| = \ln\left|(2x^2-3x-7)^{21}(5x-4)^{15}\right| = 21\ln\left|2x^2-3x-7\right| + 15\ln|5x-4|$. Derivando em relação a x, segue que: $\dfrac{y'}{y} = 21\dfrac{4x-3}{2x^2-3x-7} + 15\dfrac{5}{5x-4}$ e, assim,

$$y' = (2x^2-3x-7)^{21}(5x-4)^{15}\left[21\frac{4x-3}{2x^2-3x-7} + 15\frac{5}{5x-4}\right].$$

Exercício 12: Calcule as derivadas das seguintes funções.

a) $f(x) = \text{sen}(e^x)$; b) $g(x) = e^{\sqrt{x}} + \sqrt{2e^x}$;

c) $h(x) = \ln(\text{cotg}\, e^x)$; d) $j(x) = e^{2x}\,\text{sen}(2e^x)$.

Solução:

a) $f'(x) = e^x \cos(e^x)$.

b) $g'(x) = e^{\sqrt{x}}\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{e^x}{\sqrt{e^x}}$.

c) Como $h(x) = \ln(\dfrac{\cos e^x}{\text{sen}\, e^x}) = \ln\left(\cos e^x\right) - \ln\left(\text{sen}\, e^x\right)$, temos:

$$h'(x) = \frac{-\text{sen}\, e^x}{\cos e^x}e^x - \frac{\cos e^x}{\text{sen}\, e^x}e^x = -(\text{tg}\, e^x + \text{cotg}\, e^x)e^x.$$

d) $j'(x) = e^{2x}\cdot 2\cdot \text{sen}(2e^x) + e^{2x}\cos(2e^x)\cdot 2e^x = 2e^{2x}[\text{sen}(2e^x) + e^x\cos(2e^x)]$.

Exercício 13: Dadas as equações a seguir, encontre y' derivando-as implicitamente em relação a x.

a) $x^2 + 2xy + e^{xy} = 7$; b) $e^x \,\text{sen}\, y = e^{xy}$.

Solução:

a) $2x + 2y + 2xy' + e^{xy}(y + xy') = 0$, logo, $2xy' + xe^{xy}y' = -(ye^{xy} + 2x + 2y)$ e, assim,

$$y' = -\frac{ye^{xy} + 2x + 2y}{x(2+e^{xy})}, \text{ quando } x \neq 0.$$

b) $e^x \,\text{sen}\, y + e^x \cos y \cdot y' = e^{xy}(xy' + y)$, logo, $y'(e^x\cos y - x\,e^{xy}) = y\,e^{xy} - e^x\,\text{sen}\, y$ e, assim,

$$y' = \frac{y\,e^{xy} - e^x\,\text{sen}\, y}{e^x\cos y - x\,e^{xy}}, \text{ quando } e^x\cos y - x\,e^{xy} \neq 0$$

Exercício 14: Calcular as seguintes integrais:

a) $\int e^{5x}dx$; b) $\int(2x + 5e^{2x})dx$; c) $\int 2e^x\,\text{sen}(e^x)\,dx$;

d) $\int \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx$; e) $\int e^{\ln(x^2)}dx$.

Solução:

a) Fazendo a substituição de variável $\begin{cases} u = 5x \\ du = 5dx \end{cases}$, obtemos

$$\int e^{5x}dx = \int \frac{1}{5}e^{5x}\,5\,dx = \frac{1}{5}\int e^u du = \frac{1}{5}\int e^u + C = \frac{1}{5}e^{5x} + C.$$

b)

$$\int (2x+5e^{2x})dx = \int 2x dx + \int 5e^{2x}dx = x^2 + 5\int \frac{1}{2}e^{2x}\,2dx =$$

$$= x^2 + \frac{5}{2}\int e^u du = x^2 + \frac{5}{2}e^u + C = x^2 + \frac{5}{2}e^{2x} + C$$

c) Fazendo a substituição de variáveis $\begin{cases} u = e^x \\ du = e^x dx \end{cases}$ obtemos

$$\int 2e^x \operatorname{sen}(e^x)dx = 2\int \operatorname{sen}(e^x)(e^x dx) = 2\int \operatorname{sen} u du = -2\cos u + C = -2\cos(e^x) + C$$

d) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx$

$$\begin{cases} u = e^x + e^{-x} \\ du = (e^x - e^{-x})dx \end{cases}$$

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln|e^x + e^{-x}| + C.$$

Exercício 15: A magnitude *R* de um terremoto é medida em uma escala, chamada escala Richter, dada pela fórmula $R = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, onde *I* é a intensidade do terremoto e I_0 é uma intensidade padrão mínima. Se um terremoto atinge a magnitude de 6,1 na escala Richter, quantas vezes a intensidade do terremoto é maior que a intensidade padrão?

Solução: Temos $R = \log\frac{I}{I_0}$ e, assim,

$$6{,}1 = \log\frac{I}{I_0} \Rightarrow 10^{6,1} = 10^{\log\frac{I}{I_0}} = \frac{I}{I_0} \Rightarrow I = I_0 10^{6,1}$$

Portanto, a intensidade do terremoto é de $10^{6,1} \approx 1.258.925$ vezes maior que a intensidade padrão.

Exercício 16: Uma contagem inicial numa cultura de bactérias revela a existência de 600.000 indivíduos. Após 3 horas o número de indivíduos passa para 1.800.000. Sabendo-se que a taxa de crescimento dessa espécie de bactérias é proporcional ao número de indivíduos presentes, determine uma expressão que forneça o número de indivíduos a cada instante *t* e calcule o número de bactérias depois de 5 horas.

Solução: Temos

$$t = 0 \text{ horas} \rightarrow 600.000$$
$$t = 3 \text{ horas} \rightarrow 1.800.000$$

A taxa de crescimento é proporcional ao número de indivíduos presentes. $\eta(t) = Me^{kt}$.

$$\eta(0) = Me^{k.0} = M \Rightarrow M = 600.000$$

$$\eta(3) = 600.000e^{k.3} = 1.800.000 \Rightarrow e^{k.3} = 3 \Rightarrow 3k = \ln 3$$

Então, $\eta(t) = 600.000e^{(\frac{1}{3}\ln 3)t} \Rightarrow \eta(5) = 600.000e^{(\frac{1}{3}\ln 3)5} \approx 3.744.150$.

Exercício 17: Se acondicionarmos 50 mg de um material radioativo numa caixa de chumbo e soubermos que a meia vida desse material é de 200 anos, após quanto tempo haverá 5 mg do material dentro da caixa?

Solução: Temos $50mg$ em $t = 0$ anos, média de vida $= 200$ anos e $5mg$ em T anos. Assim,

$$0 \to 50mg$$
$$200 \to \frac{1}{2}50mg$$
$$400 \to \frac{1}{2^2}50mg$$
$$600 \to \frac{1}{2^3}50mg$$
$$t \to \frac{1}{2^{\frac{t}{200}}}50$$

A lei que rege o decaimento radioativo é $q(t) = 50.2^{-t/200}$.

$$5 = 50.2^{-T/200} \Rightarrow \frac{1}{10} = 2^{-T/200} \Rightarrow \log_2 10^{-1} = \log_2 2^{-T/200} \Rightarrow$$
$$-\log_2 10^1 = \frac{-T}{200}\log_2 22 \Rightarrow T = 200\log_2 10 = 200\frac{\ln 10}{\ln 2} \approx 200(3,32198095) \approx 664,3.$$

Portanto, haverá $5mg$ após aproximadamente $664,3$ anos.

Exercício 18: Com o auxílio da Tabela de Integrais Imediatas e o uso das técnicas de integração, calcule as seguintes integrais:

a) $\int \text{tg}^2 u\, du$; b) $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$; c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; d) $\int \cos x \,\text{sen}^5 x\, dx$;

e) $\int x\sqrt[3]{3+2x^2}\, dx$; f) $\int e^x\left(2e^x+3\right)^3 dx$; g) $\int \frac{\text{sen}(\ln x)}{x}dx$; h) $\int \frac{\text{tg}(\ln x)}{x}dx$;

i) $\int \sqrt{x}\ln x\, dx$; j) $\int \text{arctg}\, x\, dx$; k) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; l) $\int x^2 e^{2x^3} dx$.

Solução:

a) Temos $\int \text{tg}^2 x dx = \int \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}dx$. Fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{cases} u = \sec^2 x \\ dv = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\,\text{sen}\, x\cos x \\ v = \int \sec^2 x dx = \text{tg}\, x \end{cases}$$

obtemos

$$\int \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}dx = \text{sen}^2 x\,\text{tg}\, x - \int(2\,\text{sen}\, x\cos x)\,\text{tg}\, x dx = \text{sen}^2 x\,\text{tg}\, x - \int(2\,\text{sen}\, x\cos x)\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}dx =$$
$$= \text{sen}^2 x\,\text{tg}\, x - \int 2\,\text{sen}^2 x dx = \text{sen}^2 x\,\text{tg}\, x - 2\int[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x]dx =$$
$$= \text{sen}^2 x\,\text{tg}\, x - x + \frac{\text{sen}\, 2x}{2}$$

Verificação:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^2 x \operatorname{tg} x - x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}) = 2\operatorname{sen} x \cos x \operatorname{tg} x - 1 + \cos 2x =$$

$$= 2\operatorname{sen}^2 x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - 1 + \cos 2x =$$

$$= \operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - 1 =$$

$$= \operatorname{tg}^2 x$$

b) Fazendo a substituição de variáveis $\begin{cases} u = 1 + e^x \\ du = e^x dx \end{cases}$ obtemos

$$I = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|1 + e^x| + C .$$

c) Fazendo a substituição de variáveis $\begin{cases} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \end{cases}$ obtemos

$$I = \int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx = \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{u^{\frac{-1}{2}+\frac{2}{2}}}{\frac{-1}{2}+\frac{2}{2}} + C = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{u} + C = 2\sqrt{\ln x} + C .$$

d) Fazendo a substituição de variáveis $\begin{cases} u = \operatorname{sen} x \\ du = \cos x dx \end{cases}$ obtemos

$$I = \int u^5 du = \frac{1}{6} u^6 + C = \frac{1}{6} \operatorname{sen}^6 x + C .$$

e) Fazendo a substituição de variáveis $\begin{cases} u = 3 + 2x^2 \\ du = 4x dx \end{cases}$ obtemos

$$I = \int x\sqrt[3]{3 + 2x^2} dx = \frac{1}{4}\int u^{\frac{3}{2}} du = \frac{1}{4}\frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{1}{4}\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{1}{4}.\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + C = \frac{1}{10}u^{\frac{5}{2}} + C = \frac{1}{10}(3 + 2x^2)^{\frac{5}{2}} + C$$

f) Fazendo a substituição de variáveis $\begin{cases} u = 2e^x + 3 \\ du = 2e^x dx \end{cases}$ obtemos

$$I = \int e^x (2e^x + 3)^3 dx = \frac{1}{2}\int u^3 du = \frac{1}{2}\frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{8}(2e^x + 3)^4 + C .$$

g) Fazendo a substituição de variáveis $\begin{cases} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \end{cases}$ obtemos

$$I = \int \frac{\operatorname{sen}(\ln x) dx}{x} = \int \operatorname{sen} u du = -\cos u + C = -\cos(\ln x) + C .$$

h) Fazendo a substituição de variáveis $\begin{cases} u = \ln x \\ du = \dfrac{1}{x} dx \end{cases}$ obtemos

$$I = \int \frac{\operatorname{tg}(\ln x)}{x} dx = \int \operatorname{tg} u du = \ln|\sec u| + C = \ln|\sec(\ln x)| + C .$$

i) Fazendo a substituição de variáveis $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x} dx \\ v = \dfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \end{cases}$ obtemos

$$I = \int \sqrt{x} \ln x dx = uv - \int v du = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \int \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{2}{3} \int x^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{2}{3} \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} (\ln x - \frac{2}{3}) + C$$

j) Fazendo a substituição de variáveis $\begin{cases} u = arc \operatorname{tg} x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{1+x^2} dx \\ v = x \end{cases}$ obtemos

$$I = \int arc \operatorname{tg} x dx = x arc \operatorname{tg} x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx = x arc \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{w} dw =$$

$$= x arc \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \ln|w| + C = x arc \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C$$

k) Fazendo a substituição de variáveis $\begin{cases} u = \sqrt{x} \\ du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} dx \end{cases}$ obtemos

$$I = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int e^u du = 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x}} + C .$$

l) Fazendo a substituição de variáveis $\begin{cases} u = 2x^3 \\ du = 6x^2 dx \end{cases}$ obtemos

$$I = \int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{6} \int e^u du = + C = \frac{1}{6} e^u + C = \frac{1}{6} e^{2x^3} + C .$$

Exercício 19: Prove a fórmula 14 da Tabela de Integrais, isto é, calcule $\int \sec x \, dx$. S*ugestão:* multiplique e divida $\sec x$ por $(\sec x + \operatorname{tg} x)$.

Solução: Temos $\int \sec x \, dx = \int \dfrac{\sec x (\sec x + \operatorname{tg} x)}{\sec x + \operatorname{tg} x} dx = \int \dfrac{\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x)}{\sec x + \operatorname{tg} x} dx$. Fazendo a substituição de variáveis $\begin{cases} u = \sec x + \operatorname{tg} x \\ du = (\sec x \operatorname{tg} x + \sec^2 x) dx = (\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x) dx \end{cases}$ obtemos

$$\int \frac{\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x)}{\sec x + \operatorname{tg} x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

Exercício 20: Calcule as seguintes integrais indefinidas:

a) $\int \frac{x-3}{x^2 - x - 6} dx$; b) $\int \frac{x^2 - 3x + 5}{x^3 - 5x^2} dx$; c) $\int \frac{x^2 - 3x + 5}{x^3 + 3x^2 + x} dx$ (sinal trocado no denominador);

d) $\int \frac{x^3 + 12x^2 - 20x + 5}{(x-1)(x-3)^3} dx$; e) $\int \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2} dx$.

Solução:

a) Temos $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$ e assim

$$\frac{x-3}{x^2 - x - 6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-3)}{(x-3)(x+2)}.$$

Logo,

$$x - 3 = A(x+2) + B(x-3) = (A+B)x + 2A - 3B$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 2A - 3B = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}.$$

Portanto, $I = \int \frac{x-3}{x^2 - x - 6} dx = \int \frac{1}{x+2} dx = \ln|x+2| + C$.

b) Temos $x^3 - 5x^2 = x^2(x-5)$ e assim

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{x^3 - 5x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-5} = \frac{Ax(x-5) + B(x-5) + Cx^2}{x^2(x-5)}.$$

Logo,

$$x^2 - 3x + 5 = (A+C)x^2 + Bx + (-5A - 5B)$$

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ B = -3 \\ -5A - 5B = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -3 \\ C = -1 \end{cases}.$$

Portanto,

$$I = \int \frac{x^2 - 3x + 5}{x^3 - 5x^2} dx = \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{-3}{x^2} x + \int \frac{-1}{x-5} dx = 2\ln x + \frac{3}{x} - \ln|x-5| + C.$$

c) Temos $3x^3 + x^2 + x = x(3x^2 + x + 1)$. Como $\Delta = 1 - 4.3.1 = -11 < 0$ consideramos

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{3x^3 + x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{3x^2 + x + 1}.$$

Logo,

$$x^2 - 3x + 5 = A(3x^2 + x + 1) + (Bx + C)x = (3A + B)x^2 + (A + C)x + A$$

$$\begin{cases} 3A + B = 1 \\ A + C = -3 \\ A = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 5 \\ B = -14 \\ C = -8 \end{cases}.$$

Portanto,

$$I = \int \frac{x^2 - 3x + 5}{3x^3 + x^2 + x} dx = \int \frac{5}{x} dx + \int \frac{-14x - 8}{3x^2 + x + 1} dx = 5\int \frac{1}{x} dx - 14\int \frac{x}{3x^2 + x + 1} dx - 8\int \frac{1}{3x^2 + x + 1} dx \,.$$

Como $\int \frac{1}{3x^2 + x + 1} dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{6}\right)^2 + \frac{11}{36}} dx = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{11/6}} arc\,\mathrm{tg}(\frac{x}{\frac{\sqrt{11}}{6}}) + C$

e fazendo a mudança de variáveis $\begin{cases} u = 3x^2 + x + 1 \\ du = (6x+1)dx \end{cases}$, lembrando que

$$\frac{x}{3x^2 + x + 1} = \frac{1}{6}\frac{6x+1}{3x^2 + x + 1} - \frac{1}{6}\frac{1}{3x^2 + x + 1},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{3x^2 + x + 1} dx &= \frac{1}{6}\int \frac{6x+1}{3x^2 + x + 1} dx - \frac{1}{6}\int \frac{1}{3x^2 + x + 1} dx \\ &= \frac{1}{6}\int \frac{1}{u} du - \frac{1}{6}\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{11/6}} arc\,\mathrm{tg}(\frac{x}{\sqrt{11/6}}) + C \\ &= \frac{1}{6}\ln|u| - \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{11}} arc\,\mathrm{tg}(\frac{x}{\sqrt{11/6}}) + C \\ &= \frac{1}{6}\ln|3x^2 + x + 1| - \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{11}} arc\,\mathrm{tg}(\frac{x}{\sqrt{11/6}}) + C. \end{aligned}$$

d) Temos $\frac{x^3 + 12x^2 - 20x + 5}{(x-1)(x-3)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} + \frac{D}{(x-3)^3}$.

Logo,

$$\begin{aligned} x^3 + 12x^2 - 20x + 5 &= A(x-3)^3 + B(x-1)(x-3)^3 + C(x-1)(x-3) + D(x-1) = \\ &= (A+B)x^3 + (-9A - 7B + C)x^2 + (27A + 15B - 4C + D)x + (-27A - 9B + 3C - D) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -9A - 7B + C = 12 \\ 27A + 15B - 4C + D = -20 \\ -27A - 9B + 3C - D = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{3}{4} \\ C = \frac{78}{4} \\ D = 40 \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^3 + 12x^2 - 20x + 5}{(x-1)(x-3)^3} dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1} dx + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x-3} + \frac{78}{4}\int \frac{1}{(x-3)^2} dx + 40\int \frac{1}{(x-3)^3} dx = \\ &= \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{3}{4}\ln|x-3| - \frac{78}{4}\frac{1}{x-3} + \frac{40}{-2}\frac{1}{(x-3)^2} = \\ &= \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{3}{4}\ln|x-3| - \frac{39}{2(x-3)} - \frac{20}{(x-3)^2}. \end{aligned}$$

e) Temos $\dfrac{x^2-1}{x^4-x^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x+1}+\dfrac{D}{x-1}$.

Logo,

$$x^2-1=Ax(x^2-1)+B(x^2-1)+Cx^2(x-1)+Dx^2(x+1)=$$
$$=(A+B+C)x^3+(B-C+D)x^2-Ax-B$$
$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ B-C+D=1 \\ -A=0 \\ -B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=1 \\ C=0 \\ D=0 \end{cases}.$$

Portanto,

$$I=\int \frac{x^2-1}{x^4-x^2}dx=\int \frac{1}{x^2}dx=\frac{-1}{x}+C\ .$$

Exercício 21: Resolva as seguintes integrais indefinidas.

a) $\int \cos^4 x\ dx$; b) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x\, dx$; c) $\int \operatorname{cotg}^3 x\, dx$;

d) $\int \operatorname{cossec}^3 x\ dx$; e) $\int \operatorname{tg}^4 x \sec^3 x\ dx$.

Solução:

a)

$$\int \cos^4 dx=\int (\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{2})^2 dx=\int (\frac{1}{4}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{1}{4}\cos^2 2x)dx=$$
$$=\frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{2}\int \cos 2xdx+\frac{1}{4}\int (\frac{1}{2}+\frac{\cos 4x}{2})dx=\frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{2}\int \cos 2xdx+\frac{1}{8}\int xdx+\frac{1}{8}\int \cos 4xdx=$$
$$=\frac{3}{8}\int dx+\frac{1}{2}\int \cos 2xdx+\frac{1}{8}\int \cos 4xdx=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{16}\operatorname{sen} 4x+C$$

b)

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 xdx=\int \operatorname{sen}^3 x\cos^2 x(\cos xdx)=$$
$$=\int \operatorname{sen}^3 x(1-\operatorname{sen}^2 x)(\cos xdx)=\int \operatorname{sen}^3 x-\operatorname{sen}^5 x)(\cos xdx)$$

Fazendo a mudança de variáveis $u=\operatorname{sen} x \Rightarrow du=\cos xdx$ obtemos

$$\int \operatorname{sen}^3 x-\operatorname{sen}^5 x)(\cos xdx)=\int (u^3-u^5)du=\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x-\frac{1}{6}\operatorname{sen}^6 x+C\ .$$

c)

$$\int \operatorname{cotg}^3 xdx=\int \operatorname{cotg} x\operatorname{cotg}^2 dx=\int \operatorname{cotg} x(\operatorname{cossec}^2 x-1)dx=$$
$$=\int \operatorname{cotg} x\operatorname{cossec}^2 x\,dx-\int \operatorname{cotg} xdx.$$

Fazendo a mudança de variáveis $u=\operatorname{cotg} x \Rightarrow du=-\operatorname{cossec}^2 xdx$ obtemos

$$\int \operatorname{cotg} x\operatorname{cossec}^2 xdx-\int \operatorname{cotg} xdx=-\int udu-\int \operatorname{cotg} xdx=$$
$$=-\frac{1}{2}u^2-\ln|\sec x|+C=-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 x-\ln|\sec x|+C.$$

d) $\int \text{cossec}^3 x dx = \int \text{cossec}^2 x (\text{cossec}\, x dx)$

$$\begin{cases} u = \text{cossec}\, x \\ dv = \text{cossec}^2 x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\text{cossec}\, x \,\text{cotg}\, x dx \\ v = -\text{cotg}\, x \end{cases}$$

$$\int v du = \int \text{cossec}\, x \,\text{cotg}^2 x dx = \int \text{cossec}\, x (\text{cossec}^2 x - 1) dx = \int \text{cossec}^3 x dx - \int \text{cossec}\, x dx$$

Então,

$$\begin{aligned} &\int \text{cossec}^3 x dx = -\text{cossec}\, x \,\text{cotg}\, x - \int \text{cossec}^{`3} x dx + \int \text{cossec}\, x dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2\int \text{cossec}^3 x dx = -\text{cossec}\, x \,\text{cotg}\, x + \int \text{cossec}\, x dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int \text{cossec}^3 x dx = -\frac{1}{2}\text{cossec}\, x \,\text{cotg}\, x + \frac{1}{2}\int \text{cossec}\, x dx = \\ &\qquad = -\frac{1}{2}\text{cossec}\, x \,\text{cotg}\, x + \frac{1}{2}\ln|\text{cossec}\, x - \text{cotg}\, x| + C \end{aligned}$$

e) $I = \int \text{tg}^4 x \sec^3 x dx$

$$\text{tg}^4 x = (\text{tg}^2 x)^2 = (\sec^2 x - 1)^2 = \sec^4 x - 2\sec^2 x + 1$$

$$I = \int (\sec^4 x - 2\sec^2 x + 1)\sec^2 x dx = \int \sec^7 x dx - 2\int \sec^5 x dx + \int \sec^3 x dx$$

Para cada integral acima usamos integração por partes com $dv = \sec^2 x dx \Rightarrow v = \text{tg}\, x$.

$$\begin{cases} u = \sec^5 x \\ dv = \sec^2 x \end{cases} dx \Rightarrow \begin{cases} du = 5\sec^4 x \sec x \,\text{tg}\, x dx \\ v = \text{tg}\, x \end{cases}$$

$$\int \sec^7 x dx = \sec^5 x \,\text{tg}\, x - \int \text{tg}\, x (5\sec^4 x \sec x \,\text{tg}\, x dx)$$

$I = \int \sec^3 dx = \int \sec x \sec^2 x \, dx$

$$\begin{cases} u = \sec x \\ dv = \sec^2 x \end{cases} dx \Rightarrow \begin{cases} du = \sec x \,\text{tg}\, x dx \\ v = \text{tg}\, x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \sec x \,\text{tg}\, x - \int \text{tg}\, x \sec x \, dx \\ &= \sec x \,\text{tg}\, x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \sec x \,\text{tg}\, x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx \end{aligned}$$

$$2\int \sec^3 x \, dx = \sec x \,\text{tg}\, x - \int \sec dx = \sec x \,\text{tg}\, x + \ln|\sec x + \text{tg}\, x| + C \Rightarrow$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2}(\sec x \,\text{tg}\, x + \ln|\sec x + \text{tg}\, x|) + C \Rightarrow$$

$$I = \int \sec^5 dx = \int \sec^3 x \sec^2 x \, dx$$

$$\begin{cases} u = \sec^3 x \\ dv = \sec^2 x \end{cases} dx \Rightarrow \begin{cases} du = 3\sec^2 x \sec x \operatorname{tg} x dx \\ v = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \sec^3 x \operatorname{tg} x - 3\int \sec^3 x \operatorname{tg}^2 x \, dx \\ &= \sec^3 x \operatorname{tg} x - 3\int \sec^3 x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \sec^3 x \operatorname{tg} x - 3\int \sec^5 x \, dx + 3\int \sec^3 x \, dx \end{aligned}$$

$$4\int \sec^5 dx = \sec^3 x \operatorname{tg} x + \frac{3}{2}(\sec x \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|) \Rightarrow$$

$$\int \sec^5 dx = \frac{1}{4}\sec^3 x \operatorname{tg} x + \frac{3}{8}(\sec x \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|) + C$$

$$I = \int \sec^7 dx = \int \sec^5 x \sec^2 x \, dx$$

$$\begin{cases} u = \sec^5 x \\ dv = \sec^2 x \end{cases} dx \Rightarrow \begin{cases} du = 5\sec^4 x \sec x \operatorname{tg} x dx \\ v = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \sec^5 x \operatorname{tg} x - 5\int \sec^5 x \operatorname{tg}^2 x \, dx \\ &= \sec^5 x \operatorname{tg} x - 5\int \sec^5 x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \sec^5 x \operatorname{tg} x - 5\int \sec^7 x \, dx + 5\int \sec^5 x \, dx \end{aligned}$$

$$6\int \sec^7 dx = \sec^5 x \operatorname{tg} x + \frac{5}{4}\sec^3 x \operatorname{tg} x + \frac{15}{8}(\sec x \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|) \Rightarrow$$

$$I = \int \sec^7 dx = \frac{1}{6}\sec^5 x \operatorname{tg} x + \frac{5}{24}\sec^3 x \operatorname{tg} x + \frac{15}{48}(\sec x \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|) + C$$

Exercício 22: Calcule as seguintes integrais:

a) $\int \frac{3}{x\sqrt{4-x^2}} dx$; b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{5+x^2}}$; c) $\int \frac{2}{3x^2\sqrt{x^2-36}} dx$;

d) $\int \frac{5x}{\sqrt{x^2-25}} dx$ (corrigido colocando raiz no denominador);e) $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2-49}} dx$;f) $\int \frac{1}{\left(4x^2-4\right)^{3/2}} dx$.

Solução:

a) Fazendo a substituição de variáveis

$$a = 2,\ x = 2\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{x}{2}$$

$$dx = 2\cos\theta \, d\theta,\ \sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2},$$

obtemos

$$I=\int\frac{3}{x\sqrt{4-x^2}}dx=3\int\frac{2\cos\theta}{2\operatorname{sen}\theta 2\cos\theta}d\theta=\frac{3}{2}\int\operatorname{cossec}\theta\, d\theta=$$
$$=\frac{3}{2}\ln|\operatorname{cossec}\theta-\operatorname{cotg}\theta|+C=\frac{3}{2}\ln|\frac{1}{x/2}-\frac{\sqrt{4-x^2}/2}{x/2}|+C=$$
$$=\frac{3}{2}\ln|\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}|+C$$

b) Fazendo a substituição de variáveis

$$a=\sqrt{5},\ x=\sqrt{5}\operatorname{tg}\theta\Rightarrow\operatorname{sen}\theta=\frac{x}{\sqrt{5-x^2}}$$
$$dx=\sqrt{5}\sec^2\theta\, d\theta,\ \sqrt{5+x^2}=\sqrt{5}\sec\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5-x^2}}$$

obtemos

$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{5+x^2}}=\int\frac{\sqrt{5}\sec^2\theta}{\sqrt{5}\operatorname{tg}\theta\sqrt{5}\sec\theta}d\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{1}{\cos\theta}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}d\theta=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\operatorname{cossec}\theta d\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln|\operatorname{cossec}\theta-\operatorname{cotg}\theta|+C=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln|\frac{\sqrt{5-x^2}}{x}-\frac{\sqrt{5}}{x}|+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln|\frac{\sqrt{5-x^2}-\sqrt{5}}{x}|+C$$

c) Fazendo a substituição de variáveis

$$x=6\sec\theta,\ dx=6\sec\theta\operatorname{tg}\theta\, d\theta$$
$$\sqrt{x^2-36}=6\operatorname{tg}\theta,\ \operatorname{sen}\theta=\frac{\sqrt{x^2-36}}{x}$$

Obtemos

$$I=\int\frac{2}{3x^2\sqrt{x^2-36}}dx=\int\frac{12\sec\theta\operatorname{tg}\theta}{3\cdot 36\sec^2\theta\cdot 6\cdot\operatorname{tg}\theta}d\theta=\frac{1}{54}\int\cos\theta\, d\theta=$$
$$=\frac{1}{54}\operatorname{sen}\theta+C\ =\frac{1}{54}\frac{\sqrt{x^2-36}}{x}+C$$

d) Fazendo a substituição de variáveis

$$x=5\sec\theta,\ dx=5\sec\theta\operatorname{tg}\theta\, d\theta$$
$$\sqrt{x^2-25}=5\operatorname{tg}\theta,\ \operatorname{sen}\theta=\frac{\sqrt{x^2-36}}{x}$$

obtemos

$$I=\int\frac{5x}{\sqrt{x^2-25}}dx=25\int\frac{\sec\theta}{5\operatorname{tg}\theta}5\sec\theta\operatorname{tg}\theta d\theta=25\int\sec^2\theta\, d\theta=25\operatorname{tg}\theta+C=$$
$$=25\frac{\sqrt{x^2-25}}{5}+C\ =5\sqrt{x^2-25}+C$$

e) Temos $I=\int \frac{1}{\sqrt{9x^2-49}}\,dx=\int \frac{1}{\sqrt{9(x^2-\frac{49}{9})}}\,dx=\frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-(7/3)^2}}\,dx$.

Fazendo a substituição de variáveis

$$x=\frac{7}{3}\sec\theta,\ dx=\frac{7}{3}\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta$$

$$\sqrt{x^2-\tfrac{49}{9}}=\frac{7}{3}\mathrm{tg}\,\theta,\ \mathrm{sen}\,\theta=\frac{\sqrt{x^2-\frac{49}{9}}}{x},\ \cos\theta=\frac{7/3}{x}$$

Obtemos

$$I=\frac{1}{3}\int \frac{\frac{7}{3}\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta}{\frac{7}{3}\mathrm{tg}\,\theta}d\theta=\frac{1}{3}\int \sec\theta d\theta=\frac{1}{3}\ln|\sec\theta+\mathrm{tg}\,\theta|+C=\frac{1}{3}\ln|\frac{3x}{7}+\frac{\sqrt{x^2-\frac{49}{9}}}{7/3}|+C$$

f) Temos $I=\int \frac{dx}{(4x^2-4)^{3/2}}=\int \frac{dx}{(\sqrt{4})^3(x^2-1)^{3/2}}=\frac{1}{8}\int \frac{dx}{(\sqrt{x^2-1})^3}$.

Fazendo a substituição de variáveis

$$x=\sec\theta,\ dx=\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta,\ \sqrt{x^2-1}=\mathrm{tg}\,\theta$$

obtemos

$$I=\frac{1}{8}\int \frac{1}{\mathrm{tg}^3\,\theta}\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta d\theta=\frac{1}{8}\int \frac{\sec\theta}{\mathrm{tg}^2\,\theta}d\theta=\frac{1}{8}\int \frac{\cos^2\theta}{\mathrm{sen}^2\,\theta}\frac{1}{\cos\theta}d\theta.$$

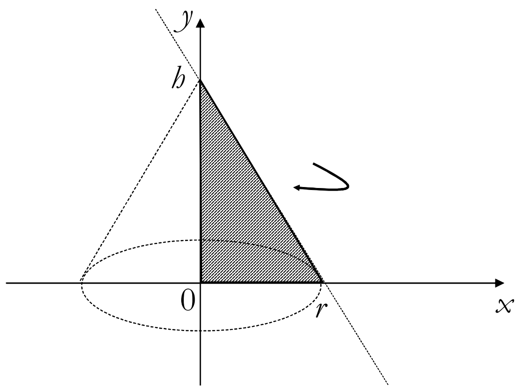
Fazendo a substituição de variáveis $\begin{cases} u=\mathrm{sen}\,\theta \\ du=\cos\theta d\theta \end{cases}$ obtemos

$$I=\frac{1}{8}\int \frac{1}{u^2}du=\frac{1}{8}(\frac{-1}{u})+C=-\frac{1}{8\,\mathrm{sen}\,\theta}+C=-\frac{1}{8\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}}+C=\frac{-x}{8\sqrt{x^2-1}}+C.$$

Exercício 23: Mostre que o volume do cone circular reto de altura h e raio da base r é dado por $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Sugestão: Rotacione um triângulo retângulo adequado, cujos catetos estão sobre os eixos coordenados.

Solução:



$$m=-\frac{h}{r}$$

$$y-h=-\frac{h}{r}x$$

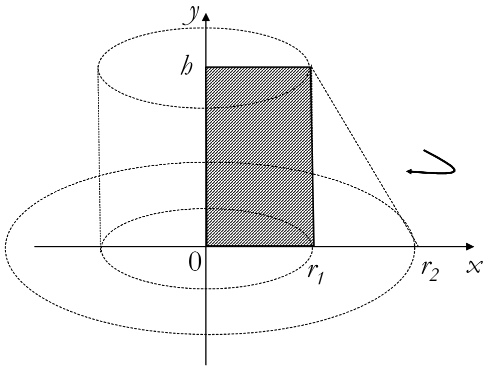
$$y=-\frac{h}{r}x+h$$

$$V=\int_0^r 2\pi[-\frac{h}{r}x+h]xdx=\int_0^r(2\pi\frac{-h}{r}x^2+2\pi hx)dx=2\pi\frac{-h}{r}\frac{x^3}{3}+2\pi h\frac{x^2}{2}\bigg]_0^r=$$

$$=2\pi\frac{-h}{r}\frac{r^3}{3}+2\pi h\frac{r^2}{2}-0=2\pi(-h)\frac{r^2}{3}+2\pi h\frac{r^2}{2}=2\pi\frac{-2hr^2+3hr^2}{6}=2\pi\frac{hr^2}{6}=\frac{1}{3}\pi r^2h.$$

Exercício 24: Encontre a área de um tronco de cone circular reto de altura h e raios r_1 e r_2.

Solução:



$$m=-\frac{h}{r_2-r_1}$$

$$y-0=\frac{-h}{r_2-r}(x-r_2)$$

$$f(x)=\frac{-h}{r_2-r}(x-r_2)$$

$V_1=\pi h r_1^2$ é o volume do cilindro interno.

$$V=\int_{r_1}^{r_2}2\pi x\,f(x)dx=\int_{r_1}^{r_2}2\pi x[\frac{-h}{r_2-r}(x-r_2)]dx=2\pi\int_{r_1}^{r_2}(\frac{-h}{r_2-r_1}x^2+\frac{hr_2}{r_2-r_1}x)dx=$$

$$=2\pi\left[\frac{-h}{r_2-r_1}\frac{x^3}{3}+\frac{hr_2}{r_2-r_1}\frac{x^2}{2}\right]_{r_1}^{r_2}=2\pi\left[\frac{-h}{r_2-r_1}\frac{r_2^3}{3}+\frac{hr_2}{r_2-r_1}\frac{r_2^2}{2}\right]-2\pi\left[\frac{-h}{r_2-r_1}\frac{r_1^3}{3}+\frac{hr_2}{r_2-r_1}\frac{r_1^2}{2}\right]=$$

$$=2\pi\frac{hr_2^3+3hr_2r_1^2-2hr_1^3}{6(r_2-r_1)}.$$

$$=\frac{\pi}{3}\frac{hr_2^3+3hr_2r_1^2-2hr_1^3}{r_2-r_1}$$

O volume é

$$\pi h r_1^2+\frac{\pi}{3}\frac{hr_2^3+3hr_2r_1^2-2hr_1^3}{r_2-r_1}=\frac{(r_2-r_1)\pi hr_1^2+\pi(hr_2^3+3hr_2r_1^2-2hr_1^3)}{3(r_2-r_1)}$$

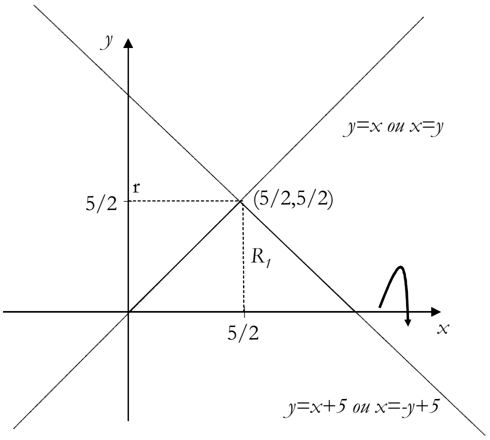
$$=\frac{\pi}{3}\frac{3hr_2r_1^2-3hr_1^3+hr_2^3+3hr_2r_1^2-2hr_1^3)}{r_2-r_1}=\frac{\pi}{3}h\frac{1}{r_2-r_1}[3r_2r_1^2-3r_1^3+r_2^3+3r_2r_1^2-2r_1^3]=$$

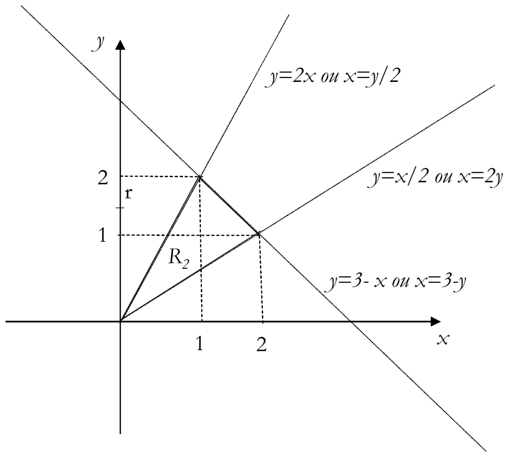
$$=\frac{\pi}{3}h\frac{1}{r_2-r_1}[6r_2r_1^2-5r_1^3+r_2^3].$$

Exercício 25: Considere a região R_1, limitada pelas curvas: $y=0$, $y=x$ e $y=-x+5$ e a região R_2, limitada pelas curvas: $x+y=3$, $y=\frac{1}{2}x$ e $y=2x$. Considere os sólidos S_{1x} e S_{2x} obtidos, respectivamente, pela revolução das regiões R_1 e R_2 ao redor do eixo *Ox*. Considere os sólidos S_{1y} e S_{2y}

obtidos, respectivamente, pela revolução das regiões R_1 e R_2 ao redor do eixo *Oy*. Expresse, mas não calcule, o volume dos sólidos S_{1x}, S_{1y}, S_{2x} e S_{2y} mediante o uso de integrais. Faça isso de duas maneiras, com integrações na variável *x* e na variável *y*.

Solução:





Integração em x

$$V(S_{1x}) = \int_0^{5/2} \pi x^2 dx + \int_{5/2}^{5} \pi (-x+5)^2 dx$$

$$V(S_{1y}) = \int_0^{5/2} \pi x(x) dx + \int_{5/2}^{5} \pi x(-x+5)^2 dx$$

$$V(S_{2x}) = \int_0^{1} \pi [(2x)^2 - (\tfrac{1}{2}x)^2] dx + \int_1^{2} \pi [(3-x)^2 - (\tfrac{1}{2}x)^2] dx$$

$$V(S_{2y}) = \int_0^{1} 2\pi x(2x - \tfrac{1}{2}x) dx + \int_1^{2} 2\pi x(3 - x - \tfrac{1}{2}x) dx\,.$$

Integração em y

$$V(S_{1x}) = \int_0^{5/2} \pi y[(-y+5) - (y)] dy$$

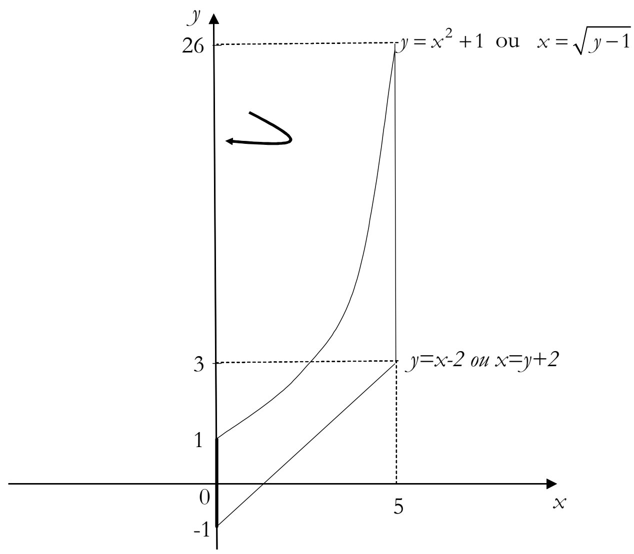
$$V(S_{1y}) = \int_0^{5/2} \pi[(-y+5)^2 - (y)^2] dy$$

$$V(S_{2x}) = \int_0^{1} 2\pi y[(2y) - (\tfrac{1}{2}y)] dy + \int_1^{2} 2\pi y[(3-y) - (\tfrac{1}{2}y)] dy$$

$$V(S_{2y}) = \int_0^{1} 2\pi y[(2y)^2 - (\tfrac{1}{2}y)^2] dy + \int_1^{2} \pi y[(3-y)^2 - (\tfrac{1}{2}y)^2] dy\,.$$

Exercício 26: Considere a região R, limitada pelas curvas: $y = x^2 + 1$, $y = x - 2$, $x = 0$ e $x = 5$. Considere o sólido S obtido pela revolução de R ao redor do eixo Oy. Expresse, mas não calcule, o volume de S mediante o uso de integrais. Faça isso de duas maneiras, com integrações na variável x e na variável y.

Solução:

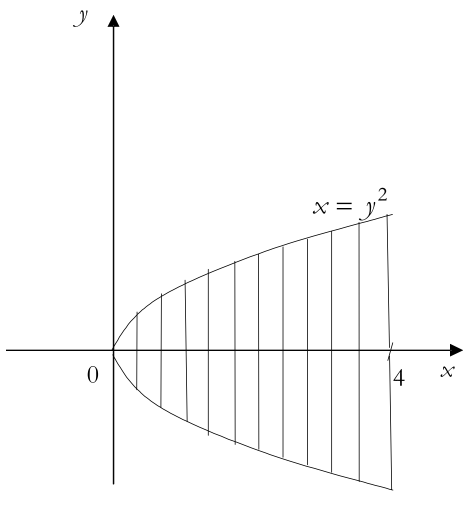


Integração em x : $\int_{0}^{5} 2\pi x[(x^2+1)-(x-2)]dx$

Integração em y : $\int_{-2}^{1} \pi x[(y-2)^2]dy + \int_{1}^{3} \pi[(y+2)^2 - (\sqrt{y-1})^2]dy + \int_{3}^{236} \pi[(5)^2 - (\sqrt{y-1})^2]dy$

Exercício 27: Calcule o volume do sólido S, situado entre os planos perpendiculares ao eixo Ox em $x = 0$ e em $x = 4$, com a base no plano $x\,y$, limitada pela parábola $x = y^2$, sabendo que suas seções transversais são quadrados.

Solução:



A base do sólido S é a região do plano xy limitada pela parábola $x = y^2$ e a reta $x = 4$.

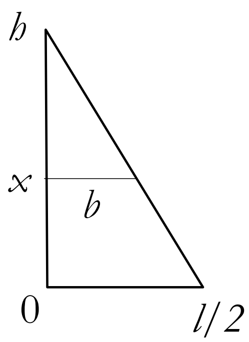
Para cada $x_0 \in [0,4]$ o lado do quadrado tem medida igual a $2\sqrt{x}$. Logo, a área do quadrado é igual a $4x$. $(x > 0!)$.
Então

$$V = \int_0^4 A(x)\,dx = \int_0^4 4x\,dx = 2x^2\Big]_0^4 = 2 \cdot 4^2 - 2 \cdot 0 = 32$$

O volume do sólido é 32 unidades de volume.

Exercício 28: Mostre, mediante o uso da técnica do volume por fatiamento, que o volume da pirâmide de altura h e base quadrada de lado l é dado por $V = \dfrac{1}{3}\, l^2\, h$.

Solução: Se considerarmos o eixo vertical como prolongamento da "altura" da pirâmide e orientado para "cima" podemos descobrir a área $A(x)$ do quadrado obtido como fatiamento da pirâmide pela família de planos paralelos à base da mesma mediante semelhança de triângulos.



$$\frac{h}{e/2} = \frac{h-x}{b} \Rightarrow b = \frac{(h-x)\, e/2}{h} = \frac{e(h-x)}{2h}$$

Na "altura" x, o lado do quadrado é igual a $2b = \dfrac{e(h-x)}{h}$. Então $A(x) = \dfrac{e^2 (h-x)^2}{h^2}$.

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \int_0^h \frac{e^2 (h-x)^2}{h^2}\,dx = \frac{e^2}{h^2}\int_0^h (h-x)^2\,dx$$

$$\int_0^h (h-x)^2\,dx = -\frac{(h-x)^3}{3}\Bigg]_0^h = \left[-\frac{(h-h)^3}{3}\right] - \left[-\frac{(h-0)^3}{3}\right] = \frac{h^3}{3}$$

$$V = \frac{e^2}{h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}e^2 h = \frac{1}{3}(\text{área da base})(\text{altura}).$$

Exercício 29: Encontre o comprimento do arco sobre a curva $y = \sqrt{x^3} + 2$ do ponto $(0, 2)$ ao ponto $(4, 10)$.

Solução: Temos $y = \sqrt{x^3} + 2 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{1/2}$. O comprimento do arco desejado é dado por

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\tfrac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\,dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}x}\,dx$$

Fazendo a mudança de variável $\begin{cases} u = 1+\frac{4}{9}x \\ du = \frac{4}{9}dx \\ x = 0 \Rightarrow u = 1 \\ x = 4 \Rightarrow u = 10 \end{cases}$ obtemos

$$s = \frac{4}{9}\int_1^{10}\sqrt{u}\,du = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(10^{3/2}-1^{3/2}\right) = \frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1) \cong \frac{8}{27}(31{,}62-1) \cong 9{,}07 \text{ unidades}$$

Exercício 30: Encontre o comprimento do arco sobre o gráfico da função $f(x)=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{2x}$ do ponto de abscissa 1 ao ponto de abscissa 3.

Solução: Temos $f(x)=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}x^{-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x^{-2}=\frac{1}{2}(x^2-x^{-2})$. Assim o comprimento do arco desejado é dado por

$$s=\int_1^3\sqrt{1+\left[\tfrac{1}{2}(x^2-x^{-2})\right]^2}\,dx=\int_1^3\sqrt{1+\tfrac{1}{4}(x^4-2+x^{-4})}\,dx=\int_1^3\sqrt{1+\tfrac{x^4}{4}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{x^{-4}}{4}}\,dx=$$

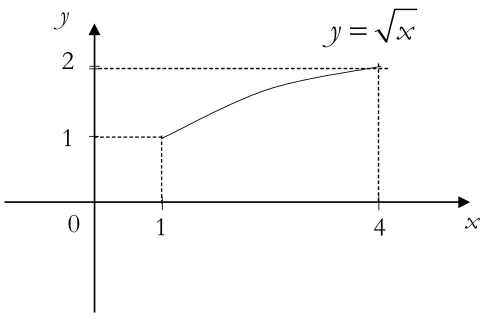
$$=\int_1^3\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{x^4}{4}+\tfrac{x^{-4}}{4}}\,dx=\int_1^3\sqrt{\tfrac{2+x^4+x^{-4}}{4}}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^3\sqrt{2+x^4+x^{-4}}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^3\sqrt{\tfrac{2x^4+x^8+1}{x^4}}\,dx=$$

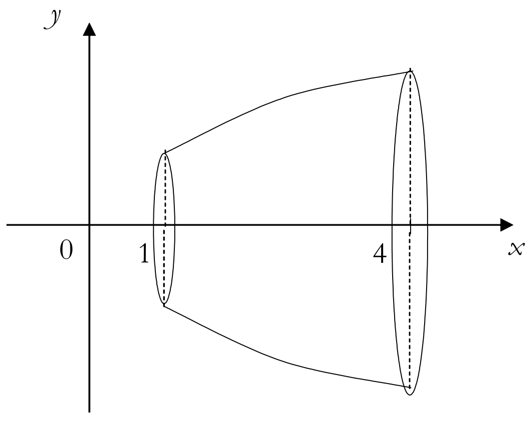
$$=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{\sqrt{2x^4+x^8+1}}{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{\sqrt{(x^4+1)^2}}{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{x^4+1}{x^2}dx=\frac{1}{2}\left[\int_1^3\frac{1}{x^2}dx+\int_1^3x^2dx\right]dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x}\Big]_1^3+\frac{x^3}{3}\Big]_1^3\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}+1+\frac{3^3}{3}-\frac{1}{3}\right]=\frac{1}{2}\frac{28}{3}=\frac{14}{3}\text{ unidades}$$

Exercício 31: Calcule a área da superfície obtida ao rotacionarmos o arco do gráfico de $f(x)=\sqrt{x}$ entre os pontos $(1,1)$ e $(4,2)$ ao redor do eixo *Ox*.

Solução: A curva é parte de uma parábola e, ao ser rotacionada ao redor do eixo Ox, gera o parabolóide, conforme a figura a seguir.





$$A=2\pi\int_1^4\sqrt{x}\sqrt{1+(\tfrac{dy}{dx})^2}\,dx=2\pi\int_1^4\sqrt{x}\sqrt{1+\tfrac{1}{4x}}\,dx=2\pi\int_1^4\sqrt{x+\tfrac{1}{4}}\,dx$$

Fazendo a mudança de variável $\begin{cases} u = x + \frac{1}{4} \\ du = dx \\ x = 1 \Rightarrow u = \frac{5}{4} \\ x = 4 \Rightarrow u = \frac{17}{4} \end{cases}$ temos

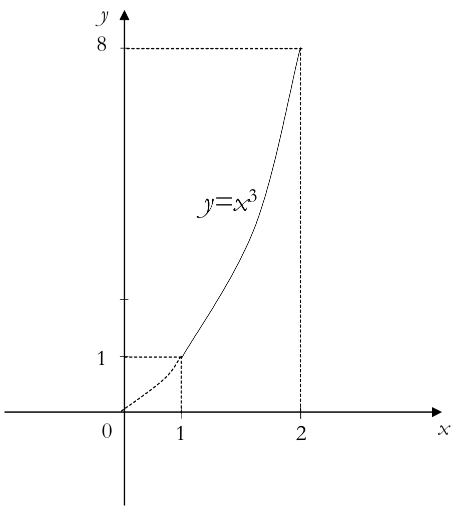
$$A = 2\pi \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{17}{4}} \sqrt{u}\,du = 2\pi \tfrac{2}{3} u^{3/2} \Big]_{\frac{5}{4}}^{\frac{17}{4}} = \tfrac{4\pi}{3}\left((\tfrac{17}{4})^{3/2} - (\tfrac{5}{4})^{3/2} \right) = \tfrac{4\pi}{3}\left(\tfrac{17}{4}\sqrt{\tfrac{17}{4}} - \tfrac{5}{4}\sqrt{\tfrac{5}{4}} \right) =$$

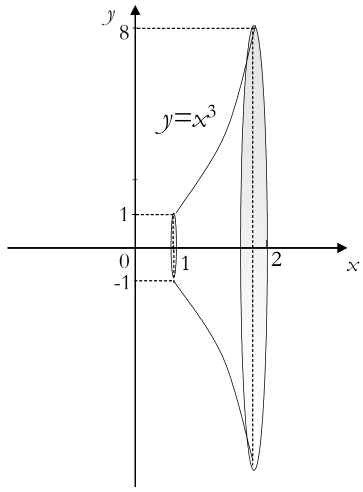
$$= \tfrac{4\pi}{3}\left(\tfrac{17}{8}\sqrt{17} - \tfrac{5}{8}\sqrt{5} \right) = \tfrac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5} \right) \cong 30,8 \text{ unidades quadradas.}$$

Exercício 32: Considere o arco do gráfico de $f(x) = x^3$ entre os pontos $(1,1)$ e $(2,8)$. Calcule a área da superfície obtida ao girarmos esse arco ao redor do eixo *Ox*.

Solução:

A curva e a superfície de revolução estão representados a seguir.





$$A = 2\pi \int_1^2 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2}\,dx = 2\pi \int_1^2 x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\,dx$$

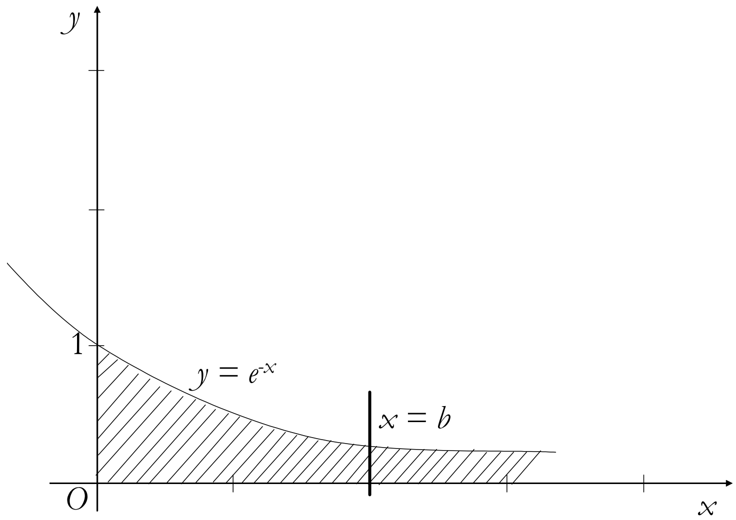
Fazendo a mudança de variável $\begin{cases} u = 1 + 9x^4 \\ du = 36x^3 \\ x = 1 \Rightarrow u = 10 \\ x = 2 \Rightarrow u = 145 \end{cases}$ temos

$$A = 2\pi \int_{10}^{145} \frac{\sqrt{u}}{36}\,du = \tfrac{\pi}{18} \tfrac{2}{3} u^{3/2} \Big]_{10}^{145} = \tfrac{\pi}{27}(145^{3/2} - 10^{3/2}) = \tfrac{\pi}{27}(145\sqrt{145} - 10\sqrt{10}) =$$

$$\cong \tfrac{\pi}{27}(145 \cdot 12,04 - 10 \cdot 3,16) \cong 199,35 \text{ unidades quadradas}$$

Exercício 33: Esboce a região identificada com a integral imprópria do Exemplo 48.

Solução: A integral do exemplo 48 é $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{b} e^{-x}dx = 1$.



Exercício 34: Encontre os valores de k para os quais a integral imprópria $\int_0^{+\infty} e^{kx}dx$ converge e determine o valor da integral.

Solução:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{kx}dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{b} e^{kx}dx = \lim_{b\to\infty}\tfrac{1}{k}e^{kx}\ \tfrac{1}{k}e^{kx}\Big]_0^b = \lim_{b\to\infty}\tfrac{1}{k}(e^{kb}-1)$$

Se $k>0$, $\lim\limits_{b\to\infty}\tfrac{1}{k}(e^{kb}-1) = +\infty$. Logo $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{kx}dx$ é divergente para $k>0$.

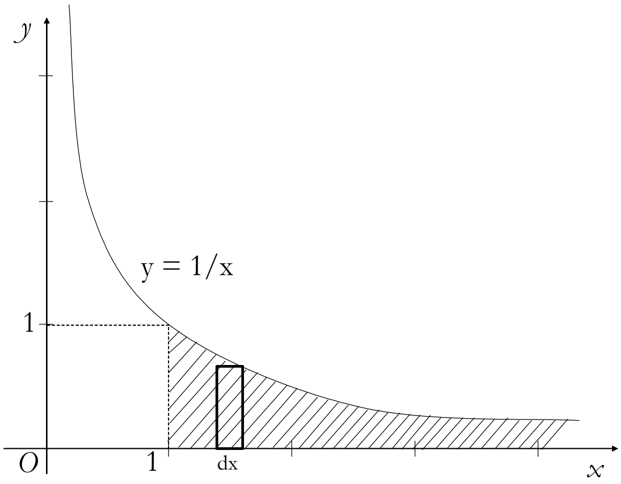
Se $k<0$, $\lim\limits_{b\to\infty}\tfrac{1}{k}(e^{kb}-1) = -\tfrac{1}{k}$. Logo $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{kx}dx$ é divergente para $k>0$.

Se $k=0$, $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{kx}dx = \int\limits_{0}^{+\infty} dx = \lim\limits_{b\to\infty} x\Big]_0^b = \lim\limits_{b\to\infty} b = +\infty$. Logo $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{kx}dx$ é divergente para $k=0$.

Portanto a integral imprópria $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{kx}dx$ é convergente para todo $k<0$.

Exercício 35: Considere a região ilimitada R, acima do eixo Ox e abaixo do gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ situado sobre o intervalo $[1,+\infty)$. Mostre que o volume do sólido ilimitado obtido pela rotação de R em torno do eixo Ox é igual a π unidades cúbicas.

Solução:



Observe que:
. espessura do disco: dx ;
. raio do disco: $\frac{1}{x}$;
. volume do disco: $\pi(\frac{1}{x})^2 \cdot dx$.

Assim, $V = \int\limits_1^{+\infty} \pi \frac{1}{x^2} dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_1^b \pi \frac{1}{x^2} dx = \lim\limits_{b\to\infty} \pi \frac{1}{x}\Big]_1^b = -\pi \lim\limits_{b\to\infty} (\frac{1}{b} - 1) = \pi$.

Exercício 36: Determine se a integral imprópria é convergente ou divergente e, no caso de ser convergente, calcule o valor da integral.

(a) $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x \, dx$; (b) $\int_{-\infty}^0 x 5^{-x^2} \, dx$; (c) $\int_0^{+\infty} x e^{-x} \, dx$;

(d) $\int_1^{+\infty} \ln x \, dx$; (e) $\int_0^4 \frac{dx}{x^2 - 2x - 3}$; (f) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$;

(g) $\int_0^e \ln x \, dx$; (h) $\int_0^{+\infty} \ln x \, dx$.

Solução:

a) $\int\limits_0^{+\infty} \operatorname{sen} x \, dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_0^b \operatorname{sen} x \, dx = \lim\limits_{b\to\infty} -\cos x\Big]_0^b = -\lim\limits_{b\to\infty} (\cos b - \cos 0) = \lim\limits_{b\to\infty} (1 - \cos b)$. Como b assume todos os valores de $n\pi$ e $2n\pi$, então $\cos b$ assume todos os valores de -1 a 1 . Portanto, $\lim\limits_{b\to\infty} \cos b$ não existe. Consequentemente a integral imprópria diverge.

b) $\int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} x5^{-x^2}dx$. Inicialmente vamos resolver a integral $\int_{a}^{0} x5^{-x^2}dx$. Fazendo a mudança de variável $\begin{cases} u=-x^2 \\ du=-2xdx \\ x=a \Rightarrow u=-a^2 \\ x=0 \Rightarrow u=0 \end{cases}$ obtemos

$$\int_{a}^{0} x5^{-x^2}dx = -\tfrac{1}{2}\int_{-a^2}^{0} 5^u du = -\tfrac{1}{2}(\tfrac{5^u}{\ln 5}\Big]_{-a^2}^{0} = -\tfrac{1}{2}(\tfrac{5^0}{\ln 5}-\tfrac{5^{-a^2}}{\ln 5}) = -\tfrac{1}{\ln 25}(1-5^{-a^2}) = \tfrac{1}{\ln 25}(5^{-a^2}-1)$$

Portanto, $\int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}[\tfrac{1}{\ln 25}(5^{-a^2}-1)] = -\tfrac{1}{\ln 25}$

c) xe^{-x} $\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} xe^{-x}dx$. Fazendo a mudança de variável $\begin{cases} u=-x \Rightarrow du=dx \\ dv=e^{-x} \Rightarrow v=-e^{-x} \end{cases}$ obtemos

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} .$$

Portanto,

$$\int_{0}^{b} xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x}\Big]_{0}^{b} = e^{-b}(-b-1)-(0-1) = -be^{-b} - e^{-b} + 1 .$$

Assim,

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}(-be^{-b} - e^{-b} + 1) = \lim_{b\to\infty}\tfrac{-b}{e^b} - \lim_{b\to\infty}\tfrac{1}{e^b} + 1 .$$

Observe que $\lim_{b\to\infty}\tfrac{-b}{e^b}$ é uma indeterminação do tipo $\tfrac{\infty}{\infty}$ e, neste caso, podemos aplicar a regra de L´Hospital, isto é, $\lim_{b\to\infty}\tfrac{-b}{e^b} = \lim_{b\to\infty}\tfrac{-1}{e^b} = 0$. Logo,

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\tfrac{-b}{e^b} - \lim_{b\to\infty}\tfrac{1}{e^b} + 1 = 0 - 0 + 1 = 1 .$$

d) $\int_{1}^{+\infty} \ln x\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b} \ln x\,dx$. Resolvendo a integral por partes temos

$\begin{cases} u=\ln x \Rightarrow du=\tfrac{1}{x}dx \\ dv=dx \Rightarrow v=x \end{cases}$ e $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\tfrac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x$.

Logo,

$$\int_{1}^{b} \ln x\,dx = x\ln x - x\Big]_{1}^{b} = b\ln b - b - (0-1) = b\ln b - b + 1$$

Assim, $\int_{1}^{+\infty} \ln x\,dx = \lim_{b\to\infty}(b\ln b - b + 1) = +\infty$. Portanto a integral diverge.

e) $\int\limits_{-\infty}^{4} \frac{dx}{x^2-2x-3} = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{4} \frac{1}{(x+1)(x-3)}dx$

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}=\frac{1}{(x+1)(x-3)} \Leftrightarrow A(x-3)+B(x+1)=1 \Leftrightarrow (A+B)x-3A+B=1$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -3A+B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{4} \\ B=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{x^2-2x-3}=\int\limits_{0}^{3}\left(\frac{-1/4}{x+1}+\frac{1/4}{x-3}\right)dx+\int\limits_{3}^{4}\left(\frac{-1/4}{x+1}+\frac{1/4}{x-3}\right)dx=\lim_{b\to3^-}\int\limits_{0}^{b}\left(\frac{-1/4}{x+1}+\frac{1/4}{x-3}\right)dx+\lim_{a\to3^+}\int\limits_{a}^{4}\left(\frac{-1/4}{x+1}+\frac{1/4}{x-3}\right)dx=$$

$$=\lim_{b\to3^-}\left(\frac{1}{4}(-\ln|x+1|+\ln|x+3|\Big]_0^b\right)+\lim_{a\to3^+}\left(\frac{1}{4}(-\ln|x+1|+\ln|x+3\Big]_a^4\right)=$$

$$=\lim_{b\to3^-}\left(\frac{1}{4}(-\ln|b+1|+\ln|b+3|-\ln3\right)+\lim_{a\to3^+}\left(\frac{1}{4}(-\ln5+\ln|a+1|-\ln|a-3|\right).$$

Observe que os limites acima não existem, pois $\lim\limits_{b\to3^-}\ln|b-3|=-\infty$ e $\lim\limits_{a\to3^+}\ln|a-3|=-\infty$. Portanto a integral imprópria diverge. Note que, neste caso, bastaria analisar apenas uma das integrais da parcela inicial.

f) $\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_{e}^{b}\frac{dx}{x(\ln x)^2}$. Fazendo a mudança de variável $\begin{cases} u=\ln x \\ du=\frac{1}{x}dx \end{cases}$ obtemos

$$\int\limits_{e}^{b}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\int\limits_{1}^{\ln b}\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{u}\Big]_1^{\ln b}=-\frac{1}{\ln b}+1 .$$

Portanto, $\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\lim\limits_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln b}+1\right)=1$. A integral imprópria converge para 1 .

g) $\int\limits_{0}^{e}\ln x\,dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int\limits_{\varepsilon}^{e}\ln x\,dx$. Mas, pelo ítem d) tem-se que $\int\ln x\,dx=x(\ln x-1)$. Logo,

$$\int\limits_{0}^{e}\ln x\,dx=x(\ln x-1)\Big]_{\varepsilon}^{2}=e(\ln e-1)-\varepsilon(\ln\varepsilon-1)=-\varepsilon\ln\varepsilon+\varepsilon$$

$$\int\limits_{0}^{e}\ln x\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}(-\varepsilon\ln\varepsilon+\varepsilon)=-\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\ln\varepsilon}{1/\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to0^+}\varepsilon .$$

Aplicando a regra de L´Hospital, vem

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\ln\varepsilon}{1/\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1/\varepsilon}{-1/\varepsilon^2}=\lim_{\varepsilon\to0^+}-\varepsilon=0$$

Portanto a integral imprópria converge para zero.

h) $\int_0^{+\infty} \ln x \, dx = \int_0^{e} \ln x \, dx + \int_e^{+\infty} \ln x \, dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^{e} \ln x \, dx + \lim_{b\to +\infty} \int_e^{b} \ln x \, dx$. Vamos calcular inicialmente a integral $\lim_{a\to 0^+} \int_a^{e} \ln x \, dx$.

$$\lim_{a\to 0^+} \int_a^{e} \ln x \, dx = \lim_{a\to 0^+} x \ln x \Big]_a^e = \lim_{a\to 0^+} [e \cdot 0 - a(\ln a - 1)] = -\lim_{a\to 0^+} a \ln a + \lim_{a\to 0^+} \ln a$$

Pela resolução do item g), tem-se que $\lim_{a\to 0^+} a \ln a = 0$. Logo $\lim_{a\to 0^+} \int_a^{e} \ln x \, dx = 0$.

Vamos calcular agora $\lim_{b\to +\infty} \int_e^{b} \ln x \, dx$

$$\lim_{b\to +\infty} \int_e^{b} \ln x \, dx = \lim_{b\to +\infty} x(\ln x - 1)\Big]_e^b = \lim_{b\to +\infty} b(\ln b - 1) - e \cdot 0 = +\infty \, .$$

Portanto, a integral imprópria $\int_0^{+\infty} \ln x \, dx$ diverge.