Integrais Impróprias

(Cálculo II – A, MAT 042)

Adriano Pedreira Cattai

http://www.alunospgmat.ufba.br/adrianocattai/

Universidade Federal da Bahia — UFBA

Semestre 2006.2

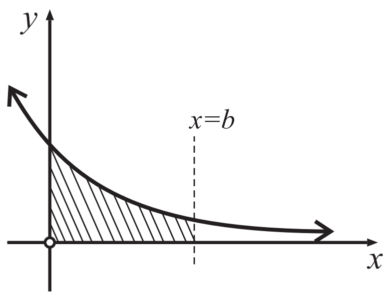
1 Introdução

No Teorema Fundamental do Cálculo (**TFC**), os limites de integração, a e b em $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, são números reais e f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Pode acontecer que, ao aplicarmos estes conceitos, seja preciso ou conveniente considerar os casos em que $a = -\infty$, $b = +\infty$, ou f seja descontínua em um ou mais pontos do intervalo. Nestas condições, é preciso ampliar o conceito de integral e as técnicas de integração, de modo a incluir estes casos adicionais. Estas integrais, em que $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ ou f é descontínua em $[a, b]$, são chamadas *Integrais Impróprias*. Nem sempre uma integral deste tipo representa um número real, isto é, nem sempre uma integral imprópria existe. Quando ela existe, seu valor é calculado levando–se em conta a generalização do conceito de integral definida.

2 Integrais Impróprias com Extremos de Integração Infinitos

***Exemplo* 2.1.** Consideremos o problema de encontrar área da região limitada pela curva $y = e^{-x}$, pelo eixo–y e pela reta $x = b > 0$ como mostra a figura ao lado. Se A unidades de área for a área da região, então

$$A = \int_0^b e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^b = 1 - e^{-b} = 1 - \frac{1}{e^b}$$



Se deixarmos b crescer sem limitações, então

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{e^b}\right) = 1. \tag{1}$$

De (1) segue que, não importa quão grande seja o valor de b, a área da região será sempre menor do que 1 unidade de área.

A equação (1) estabelece que se $b > 0$, para todo $\varepsilon > 0$ existe um $N > 0$ tal que

$$\text{se} \quad b > N \quad \text{então} \quad \left|\int_0^b e^{-x}dx - 1\right| < \varepsilon.$$

Em lugar de (1) escrevemos $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$. Em geral temos as seguintes definições:

2.1 ***Definição*** **(Integrais Impróprias).**

(i) Se f for contínua para todo $x \geq a$, então

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

se esse limite existir.

(ii) Se f for contínua para todo $x \leq b$, então

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

se esse limite existir.

(iii) Se f for contínua para todos os valores de x e c for um número real qualquer, então

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$$

se esses limites existirem.

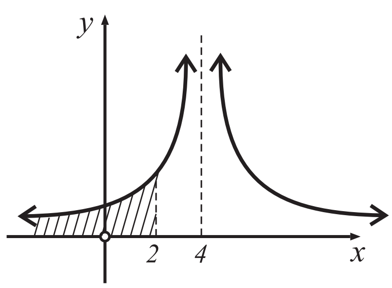
Pode–se mostrar, que se o limite existir, o segundo membro da equação no item (**iii**) da definição acima, independe da escolha de c. É comum tomar $c = 0$.

Na definição acima, se o limite existir, diremos que a integral imprópria é *convergente*, caso contrário, diremos que é *divergente*.

Exemplo **2.2.** Calcule a integral, se ela convergir: $\displaystyle\int_{-\infty}^{2}\frac{dx}{(4-x)^2}$.

Resolução:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{2}\frac{dx}{(4-x)^2} &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^2\frac{dx}{(4-x)^2} = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{4-x}\bigg|_a^2\right)\\ &= \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4-a}\right)=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$



***Exemplo* 2.3.** Estude a convergência da integral: $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx.$

Resolução: $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b xe^{-x}dx.$

Para calcular essa integral, usaremos integração por partes com $u = x$, $dv = e^{-x}dx$, $du = dx$ e $v = -e^{-x}$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx &= \lim_{b\to+\infty}\left(-xe^{-x}-e^{-x}\Big|_0^b\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(-be^{-b}-e^{-b}+1\right)\\ &= -\lim_{b\to+\infty}\frac{b}{e^b}-0+1.\end{aligned}$$

Como $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\frac{b}{e^b}$ é uma forma indterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$, aplicando a regra de L'Hospital temos que

$$\lim_{b\to+\infty}\frac{b}{e^b} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^b} = 0$$

e portanto,

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = -0-0+1 = 1.$$

Questão 1. Estude a convergência das integrais a seguir

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x}dx$ **(c)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xdx$ **(e)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x}dx$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ **(d)** $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ **(f)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^n dx$

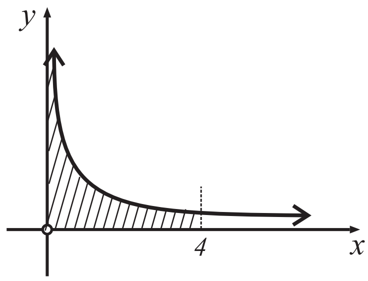
3 Outras Integrais Impróprias

***Exemplo* 3.1.** Suponha que queremos obter a área da região do plano limitada pela curva cuja equação é $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, pelo eixo–x, pelo eixo–y e pela reta $x = 4$. Conforme ilustra a figura abaixo.

Se for possível ter um número que represente a medida da área dessa região, ele será obtido pela integral

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx.$$

Entretanto, o integrando é descontínuo no extremo inferior zero. Além disso, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, assim dizemos que o integrando tem uma descontinuidade infinita no extremo inferior.



Essa integral é imprópria e sua existência pode ser determinada da seguinte forma:

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0^+}\left(2\sqrt{x}\Big|_t^4\right) = \lim_{t\to 0^+}(4-2\sqrt{t}) = 4,$$

logo 4 será a medida da área da região dada.

Mais geralmente temos as seguintes definições:

3.1 ***Definição.***

(iv) Se f for contínua para todos os x do intervalo semi–aberto à esquerda $(a, b]$, e se $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$$

se esse limite existir.

(v) Se f for contínua para todos os x do intervalo semi–aberto à direita $[a, b)$, e se $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$$

se esse limite existir.

(vi) Se f for contínua para todos os valores de x no intervalo $[a, b]$ exceto c, onde $a < c < b$ e se $\lim\limits_{x\to c}|f(x)| = +\infty$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)dx + \lim_{s\to c^+}\int_s^b f(x)dx$$

se esses limites existirem.

***Exemplo* 3.2.** Calcule a integral, se ela for convergente: $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Resolução: O integrando tem uma descontinuidade infinita em 1, ou seja, $\lim_{x\to 1} \dfrac{dx}{(x-1)^2} = +\infty$. Portanto, pela definição que acabamos de estabelecer, temos

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} &= \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{s\to 1^+}\int_s^2 \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{t\to 1^-}\left(-\frac{1}{x-1}\Big|_0^t\right) + \lim_{s\to 1^+}\left(-\frac{1}{x-1}\Big|_s^2\right) \\ &= \lim_{t\to 1^-}\left(-\frac{1}{t-1} - 1\right) + \lim_{s\to 1^+}\left(\frac{1}{s-1} - 1\right)\end{aligned}$$

Como nenhum desses limites existe, a integral imprópria é divergente.

3.2 ***Observação.*** Se no exemplo anterior não estivéssemos notado a descontinuidade do integrando em 1, teríamos

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1}\Big|_0^2 = -\frac{1}{1} + \frac{1}{-1} = -2.$$

Esse resultado é obviamente incorreto, um vez que $\dfrac{1}{(x-1)^2}$ nunca é negativo, e então a integral de 0 a 2 nunca poderia ser um número negativo.

Exemplo **3.3.** Calcule a integral, se ela convergir: $\displaystyle\int_0^1 x\cdot \ln(x)dx$.

Resolução: O integrando tem uma descontinuidade no extremo inferior. Portanto, escrevemos

$$\int_0^1 x\cdot\ln(x)dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 x\cdot\ln(x)dx.$$

Para calcular essa integral, usaremos integração por partes com $u = \ln x$, $dv = xdx$, $du = \frac{1}{x}dx$ e $v = \frac{x^2}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\cdot\ln(x)dx &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 x\cdot\ln(x)dx = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{2}x^2\cdot\ln(x) - \frac{1}{4}x\Big|_t^1\right) \\ &= \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{2}\ln(1) - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t^2\cdot\ln(t) + \frac{1}{4}t^2\right) \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+} t^2\cdot\ln(t)\end{aligned}$$

Note que $\lim_{t\to 0^+} t^2\cdot\ln(t)$ é uma indeterminação do tipo $0\times(-\infty)$. Para calcular esse limite, escrevemos

$$t^2\cdot\ln(t) = \frac{\ln(t)}{\frac{1}{t^2}},$$

e portanto, aplicando a regra de L'Hospital temos,

$$\lim_{t\to 0^+} t^2\cdot\ln(t) = \lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(t)}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{t}}{-\frac{2}{t^3}} = \lim_{t\to 0^+}\left(-\frac{t^2}{2}\right) = 0.$$

Logo,

$$\int_0^1 x\cdot\ln(x)dx = -\frac{1}{4}.$$

Texto composto em LaTeX 2ε, APC, 15 de setembro de 2006