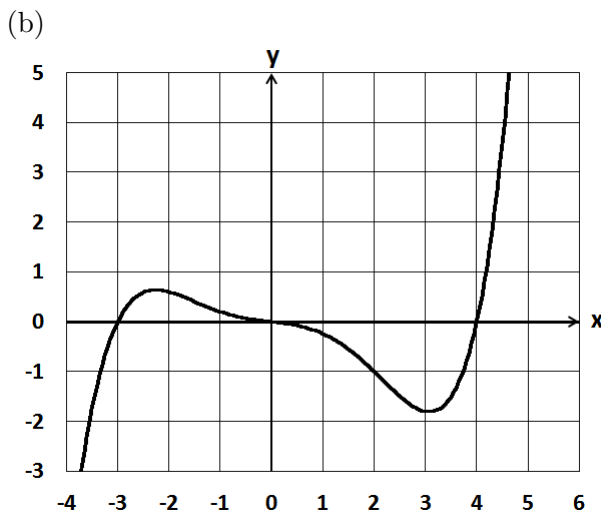
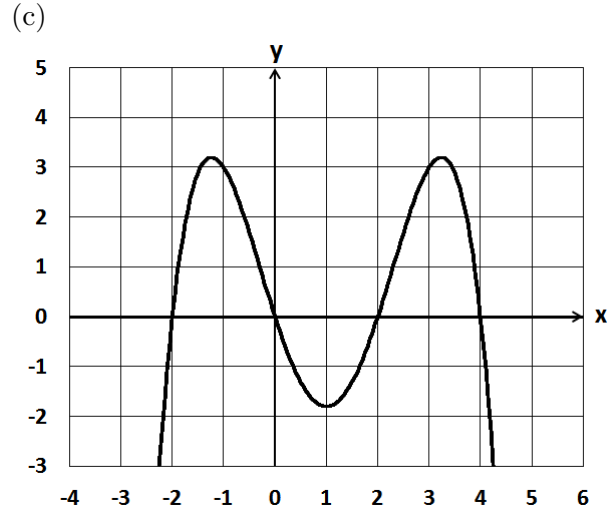
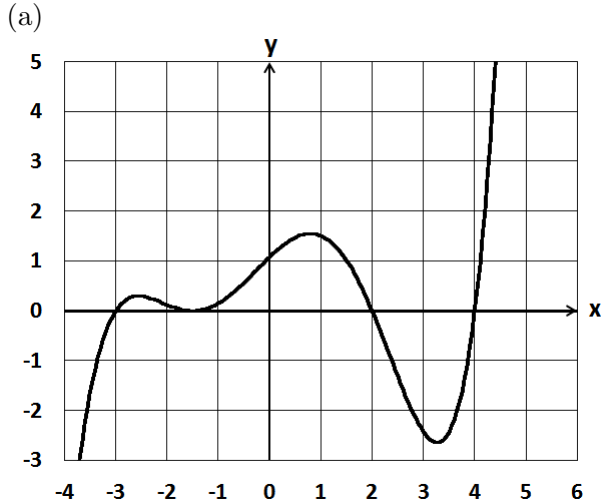


Lista 7 de CM300

1. Em cada item há o esboço do gráfico de uma função polinomial. Responda: (i) Quais são as raízes? (ii) Para quais valores de x a função é crescente? (iii) Para quais valores de x a função é decrescente? (iv) Baseando-se no item (i), apresente uma estimativa (na forma de limitante inferior) para o grau do polinômio. **Obs 1:** nos itens (ii) e (iii), dê sua resposta de forma aproximada quando não for possível identificar precisamente os intervalos. **Obs 2:** No gabarito estão explicitados, a título de curiosidade, os graus dos polinômios.



2. Todas as funções polinomiais abaixo tem n raízes reais, onde n é o grau. Fatore-as.

(a) $f(x) = x^3 - 7x + 6$. Raízes: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ e $x_3 = -3$.

(b) $g(x) = -24 + 50x - 35x^2 + 10x^3 - x^4$. Raízes: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ e $x_4 = 4$.

(c) $h(x) = \frac{x^3}{2} - 2x$. Raízes: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ e $x_3 = -2$.

(d) $u(t) = 2t^4 - 12t^3 + 18t^2$. Raízes: $t_1 = t_2 = 0$, $t_3 = t_4 = 3$.

(e) $\theta(z) = -1 - 2z + 4z^2 + 8z^3$. Raízes: $z_1 = \frac{1}{2}$, $z_2 = z_3 = -\frac{1}{2}$.

(f) $\omega(x) = 3x^5 - \frac{5x^4}{2} - 6x^3 + \frac{5x^2}{2} + 3x$. Raízes: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = -\frac{2}{3}$, $x_4 = 1$, $x_5 = -1$.

3. Em cada item, encontre o conjunto S de soluções da inequação.

- (a) $(2x + 6)(-2x + 4) \geq 0$ (b) $(3x - 1)(2x + 3) < 0$
(c) $-3(x - 2)(2x + 3)(x + 1) \leq 0$ (d) $(x^2 - 5x + 6)(2x - 3) \leq 0$
(e) $4x^4 - 9x^3 - 18x^2 + 29x - 6 > 0$, sabendo que as raízes de
 $4x^4 - 9x^3 - 18x^2 + 29x - 6 = 0$ são $x_1 = \frac{1}{4}$; $x_2 = -2$; $x_3 = 3$ e $x_4 = 1$.
(f) $(x^2 - 6x + 9)(2 - x) < 0$ (g) $\frac{2x - 4}{3x + 5} > 0$
(h) $\frac{3x - 4}{3x - 2} \leq 0$ (i) $\frac{7 - x}{2 - 7x} < 0$
(j) $\frac{-3(2x + 4)(3 - x)}{3x - 1} \geq 0$ (k) $\frac{x}{x^2 - 5x + 4} \leq 0$
(l) $\frac{(x + 1)(x + 2)}{(x + 3)(x + 4)} \leq 0$

4. Derive as funções abaixo.

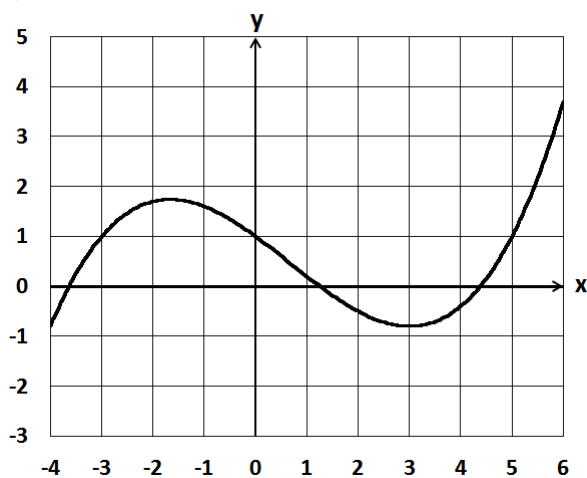
- (a) $f(x) = 9x^4 - 3x^2 + 2$ (b) $g(x) = -5x^5 + x^4 - 3x^3 + x^2 + x$
(c) $h(x) = \frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{4} + 3x + 45$ (d) $\beta(t) = -t^6 + 3t^4 - 8t^2 - 50$
(e) $\alpha(z) = z^{1000} - 900z + 2000$ (f) $z(\alpha) = -\frac{\alpha^8}{8} + 7\alpha^5 - 36\alpha^2$
(g) $\lambda(x) = (2x + 1)(x^2 - 4)$ (h) $v(x) = x^{10} - \frac{x^5}{10} + x^4 - 9x^2 - 2x + 1$
(i) $w(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$ (j) $u(t) = 3t^8 + t^7 + \frac{t^5}{6} - \frac{2t^4}{3} + 3t - 8$

5. Encontre a reta tangente ao gráfico da função no ponto de abscissa \bar{x} dada.

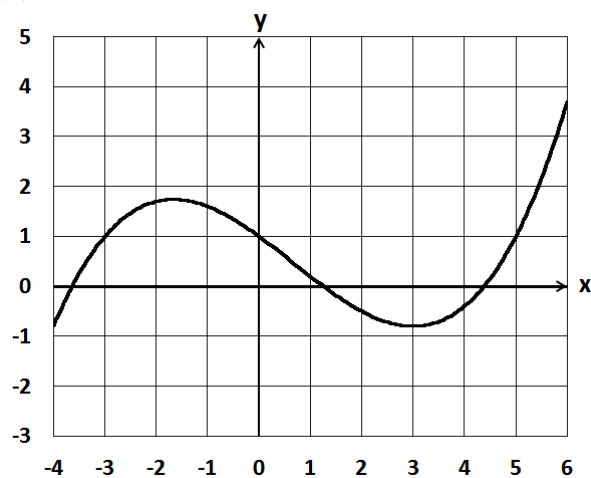
- (a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x + 4$; $\bar{x} = 2$ (b) $g(x) = x^3 - 3x + 2$; $\bar{x} = -1$
(c) $a(x) = x^7 - 2x^5$; $\bar{x} = -1$ (d) $m(x) = x^3 - 3x^2$; $\bar{x} = \frac{1}{2}$
(e) $\mu(x) = x^5$; $\bar{x} = -2$ (f) $\psi(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 20$; $\bar{x} = 3$

6. Abaixo temos esboços do gráfico da função $f(x) = \frac{x^3}{20} - \frac{x^2}{10} - \frac{3x}{4} + 1$. Calcule a reta tangente ao gráfico nos pontos x_0 dados e trace essa reta junto com o gráfico de f .

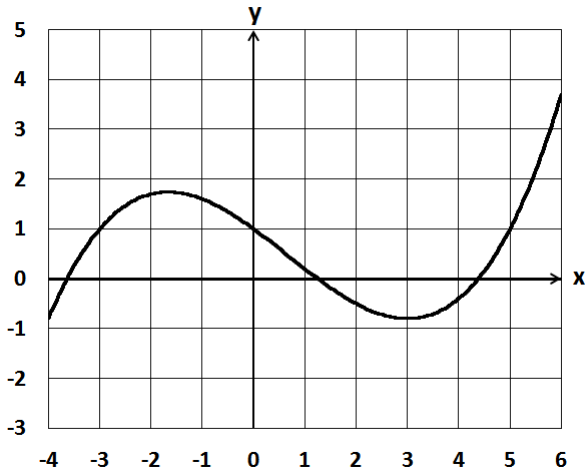
(a) $x_0 = -3$



(b) $x_0 = 0$



(c) $x_0 = 3$



7. Diga em quais intervalos cada uma das funções é (i) crescente (ii) decrescente.

(a) $a(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 8$

(b) $b(x) = -x^3 + 2x^2$

(c) $c(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 - 4t$

8. Derive as funções abaixo.

(a) $z(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$

(b) $y(x) = 3x^{-4} - 4x^{-3}$

(c) $w(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$

(d) $v(x) = \sqrt[3]{x} + 3\sqrt[4]{x} - x^{-4}$

(e) $u(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{x^2}{3}$

(f) $t(x) = -\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} + 3x^5$

(g) $s(x) = x^{\frac{3}{7}} - 4x^{-\frac{1}{8}} + \frac{x^{-9}}{3} + 3x^9$

(h) $r(x) = \frac{x^{-80}}{10} + x^{-\frac{4}{9}} - \frac{2}{x}$

(i) $q(x) = 8\sqrt[4]{x^3} - 20x^{\frac{4}{5}}$

(j) $p(x) = 8x^{-8} - 7x^{-7} + 6x^{-6}$

(k) $o(x) = x^{1,75}$

(l) $n(x) = -3x^{-4} + \frac{x^{\frac{14}{11}}}{7}$

9. Encontre a reta tangente ao gráfico da função no ponto de abscissa \bar{x} dada.

(a) $f(x) = \sqrt{x}$; $\bar{x} = 4$

(b) $g(x) = \frac{1}{x^3}$; $\bar{x} = -1$

(c) $a(x) = 2x^{\frac{1}{3}}$; $\bar{x} = 8$

(d) $m(x) = \frac{1}{x} + 1$; $\bar{x} = -2$

(e) $m(x) = \frac{1}{x} + 1$; $\bar{x} = -\frac{1}{2}$

(f) $\psi(x) = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$; $\bar{x} = 1$

10. A posição relativa p em metros de um corpo em relação a um referencial no tempo t em segundos, para $t \in [0; 5]$, é dada por $p(t) = -\frac{t^3}{3} + t^2$.

(a) Qual é a expressão da função $v(t)$ que dá a velocidade do corpo em relação ao referencial?

(b) Calcule a velocidade do corpo em relação ao referencial nos instantes (i) $t = 1$ (ii) $t = 4$ (iii) $t = 3$ (iv) $t = \frac{1}{2}$.

11. A quantidade de água Q despejada em um pequeno reservatório em litros entre os instantes $T = \frac{1}{2} \text{ min}$ e $T = t \text{ min}$, para $t \in \left[\frac{1}{2}; 10\right]$, é dada por $Q(t) = 30\sqrt{t}$.

(a) Qual é a expressão da função $V(t)$ que dá a vazão da fonte de água que está enchendo o reservatório?

(b) Calcule a vazão desta fonte nos instantes (i) $t = 1$ (ii) $t = 4$ (iii) $t = 9$ (iv) $t = \frac{9}{4}$.

Respostas:

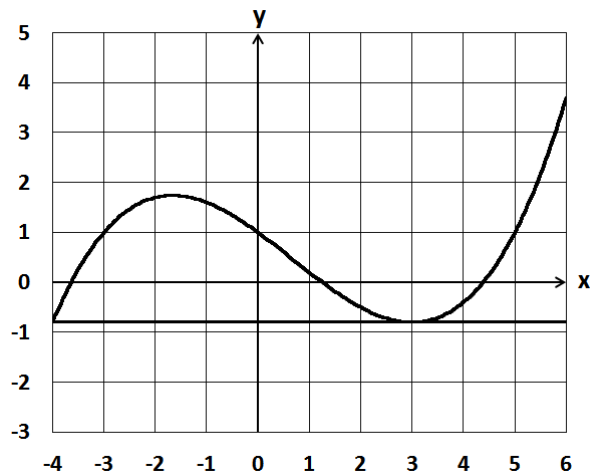
1. (a) (i) Raízes: $-3; -1, 5; 2$ e 4 .
(ii) Crescente para $x \in]-\infty; -2, 6[\cup]-1, 5; 0, 7[\cup]3, 3; \infty[$.
(iii) Decrescente para $x \in]-\infty; -2, 6; -1, 5[\cup]0, 7; 3, 3[$.
(iv) Como há 4 raízes diferentes, o grau do polinômio é pelo menos 4. (obs: o grau deste polinômio é 5, uma vez que $-1, 5$ é raiz dupla.)
- (b) (i) Raízes: $-3; 0$ e 4 .
(ii) Crescente para $x \in]-\infty; -2, 4[\cup]3; \infty[$.
(iii) Decrescente para $x \in]-\infty; -2, 4; 3[$.
(iv) O grau é pelo menos 3 (obs: o grau deste polinômio é 5. Há 5 raízes: as 3 reais do item (i) e mais 2 complexas)
- (c) (i) Raízes: $-2; 0; 2$ e 4 .
(ii) Crescente para $x \in]-\infty; -1, 2[\cup]1; 3, 2[$.
(iii) Decrescente para $x \in]-\infty; -1, 2; 1[\cup]3, 2; \infty[$.
(iv) O grau é pelo menos 4. (obs: de fato, este é um polinômio de grau 4)
2. (a) $f(x) = (x + 3)(x - 1)(x - 2)$.
(b) $g(x) = -(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$.
(c) $h(x) = \frac{x}{2}(x + 2)(x - 2)$.
(d) $u(t) = 2t^2(t - 3)^2$.
- (e) $\theta(z) = 8 \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 \left(z - \frac{1}{2}\right)$.
(f) $\omega(x) = 3x(x + 1)(x - 1) \left(x - \frac{3}{2}\right) \left(x + \frac{2}{3}\right)$.
3. (a) $S =]-3; 2[$
(b) $S = \left]-\frac{3}{2}; \frac{1}{3}\right[$
(c) $S = \left]-\frac{3}{2}; -1\right] \cup]2; \infty[$
(d) $S = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right] \cup]2; 3[$
- (e) $S =]-\infty; -2[\cup \left]\frac{1}{4}; 1\right[\cup]3; \infty[$
(f) $S =]2; 3[\cup]3; \infty[$
(g) $S =]-\infty; -3[\cup]2; \infty[$
(h) $S = \left]\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right]$
- (i) $S = \left]\frac{2}{7}; 7\right[$
(j) $S = \left]-2; \frac{1}{3}\right[\cup]3; \infty[$
(k) $S =]-\infty; 0[\cup]1; 4[$
(l) $S =]-4; -3[\cup]-2; -1[$
4. (a) $f'(x) = 36x^3 - 6x$
(b) $g'(x) = -25x^4 + 4x^3 - 9x^2 + 2x + 1$
(c) $h'(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} + 3$
(d) $\beta'(t) = -6t^5 + 12t^3 - 16t$
(e) $\alpha'(z) = 1000z^{999} - 900$
- (f) $z'(\alpha) = -\alpha^7 + 35\alpha^4 - 72\alpha$
(g) $\lambda'(x) = 6x^2 + 2x - 8$
(h) $v'(x) = 10x^9 - \frac{x^4}{2} + 4x^3 - 18x - 2$
(i) $w'(x) = x^3$
(j) $u'(t) = 24t^7 + 7t^6 + \frac{5t^4}{6} - \frac{8t^3}{3} + 3$
5. (a) $y = 22x - 32$
(b) $y = 4$
(c) $y = -3x - 2$
(d) $y = -\frac{9x}{4} + \frac{1}{2}$
(e) $y = 80x + 128$
- (f) $y = 12x - 16$

(a) $y = \frac{6x}{5} + \frac{23}{5}$

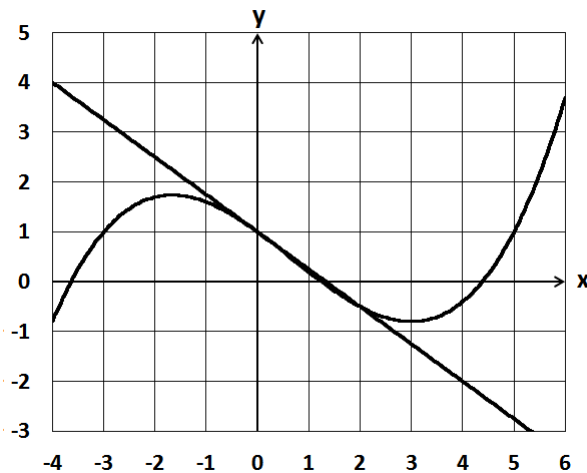
6.



(c) $y = -\frac{4}{5}$



(b) $y = 1 - \frac{3x}{4}$



7. (a) (i) $x \in]-\infty; -4[\cup]2; \infty[$. (ii) $x \in]-4; 2[$.

(b) (i) $x \in]0; \frac{4}{3}[$. (ii) $x \in]-\infty; 0[\cup]\frac{4}{3}; \infty[$.

(c) (i) $t \in]-\infty; 1 - \sqrt{5}[\cup]1 + \sqrt{5}; \infty[$. (ii) $t \in]1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}[$.

8. (a) $z'(x) = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2} - 2x^{-3}$

(b) $y'(x) = -12x^{-5} + 12x^{-4}$

(c) $w'(x) = -x^{-2} - 4x^{-3} - 9x^{-4}$

(d) $v'(x) = \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3} + \frac{3x^{-\frac{3}{4}}}{4} + 4x^{-5}$

(e) $u'(x) = -6x^{-3} + \frac{2x}{3}$

(f) $t'(x) = -\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2} + \frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{3} + 15x^4$

(g) $s'(x) = \frac{3x^{-\frac{4}{7}}}{7} + \frac{x^{-\frac{9}{8}}}{2} - 3x^{-10} + 27x^8$

(h) $r'(x) = -8x^{-81} - \frac{4x^{-\frac{13}{9}}}{9} + 2x^{-2}$

(i) $q'(x) = 6x^{-\frac{1}{4}} - 16x^{-\frac{1}{5}}$

(j) $p'(x) = -64x^{-9} + 49x^{-8} - 36x^{-7}$

(k) $o'(x) = 1,75x^{0,75}$

(l) $n'(x) = 12x^{-5} + \frac{2x^{\frac{3}{11}}}{11}$

9. (a) $y = \frac{x}{4} + 1$

(b) $y = -3x - 4$

(c) $y = \frac{x}{6} + \frac{8}{3}$

(d) $y = -\frac{x}{4}$

(e) $y = -4x - 3$

(f) $y = \frac{x}{6} - \frac{1}{6}$

10. (a) $v(t) = -t^2 + 2t$.

(b) $v(1) = 1m/s$; $v(4) = -8m/s$; $v(3) = -3m/s$; $v\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}m/s$.

11. (a) $V(t) = 15t^{-\frac{1}{2}}$.

(b) $V(1) = 15\ell/min$; $V(4) = \frac{15}{2}\ell/min$; $V(9) = 5\ell/min$; $V\left(\frac{9}{4}\right) = 10\ell/min$.