Lista 4 de CM300

1. Em cada item, calcule quando possível o valor da função nos pontos x dados.

(a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1, \qquad x = 2,\ x = -\frac{1}{2},\ x = \sqrt{3}.$

(b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}, \qquad x = 0,\ x = 2,\ x = -3.$

(c) $h(x) = \frac{1}{x+1}, \qquad x = -\frac{4}{3},\ x = 0,\ x = -1.$

2. Suponha que o valor de mercado de uma determinada empresa entre os anos de 2010 e 2015 é razoavelmente bem modelado pela função $\ell(t) = t^2/10 + 3$, onde ℓ é o preço que a empresa vale em milhões de reais e $t \in [0, 5]$ é o tempo, onde $t = 0$ representa 1^o de janeiro de 2010, $t = 1$ representa 1^o de janeiro de 2011 e assim por diante. Calcule de acordo com o modelo:

(a) o valor aproximado da empresa em 1^o de janeiro de 2010.
(b) o valor aproximado da empresa em 1^o de janeiro de 2014.
(c) o valor aproximado da empresa em 1^o de julho de 2012. (dica: como em julho estamos na metade do ano, faça $t = 2,5$, sendo 2 para chegar em 2012 e $0,5$ pra chegar em julho.)

3. Após uma muda ser plantada em uma horta, seu peso (massa) variou aproximadamente de acordo com a função $p(t) = 100 + 3 \cdot 4^t$, onde p é o peso da planta em gramas e $t \in [0, 3]$ é o tempo decorrido, onde $t = 0$ representa o momento onde a muda foi plantada (início da primeira semana da planta na horta), $t = 1$ representa o início da segunda semana após o plantio e assim por diante. Com base nesse modelo, calcule qual era aproximadamente o peso da planta:

(a) no início da primeira semana, ou seja, assim que foi plantada na horta.

(b) no início da terceira semana.

(c) no meio da segunda semana.

(d) um terço de semana após o plantio (use uma calculadora e expresse a resposta com 2 casas decimais).

4. Uma construtora usa a função $p(d) = 6000 - 200d$ para definir o preço de seus imóveis, onde p é o preço do metro quadrado do imóvel e $d \in [0, 10]$ é sua distância ao centro da cidade.

(a) Quanto custa um imóvel dessa construtora no centro da cidade?

(b) E de um imóvel a 5Km do centro?

(c) Esboce o gráfico da função p (atenção para não extrapolar o domínio $[0, 10]$).

(d) De acordo com o gráfico, o preço do imóvel aumenta ou diminui conforme este está mais longe do centro da cidade? Qual propriedade matemática da função $p(d)$ nos diz isso?

5. Encontre o domínio de cada uma das funções abaixo. Dica: lembre-se que só existe raiz quadrada real de números maiores ou iguais a zero e que não existe divisão por zero. Por exemplo, o domínio da função $f(x) = 1/x + \sqrt{1-x}$ é o conjunto dos x que são simultaneamente diferentes de zero (pra existir $1/x$) e menores ou iguais a 1 (para que tenhamos $1 - x \geq 0$ e com isso a raiz $\sqrt{1-x}$ exista). Nesse caso, o domínio pode ser representado por $]-\infty, 0[\cup]0, 1]$, ou então por $]-\infty, 1] - \{0\}$, ou ainda $\{x \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq 1$ e $x \neq 0\}$, dentre outras formas.

(a) $f(x) = \sqrt{2x+5}$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{2x+5}$ (c) $h(x) = \dfrac{1}{2x+5}$

(d) $a(t) = \sqrt{-3t}$ (e) $\phi(z) = \sqrt{-z^2+3z-2}$ (f) $\alpha(x) = \sqrt{x^2-9}$

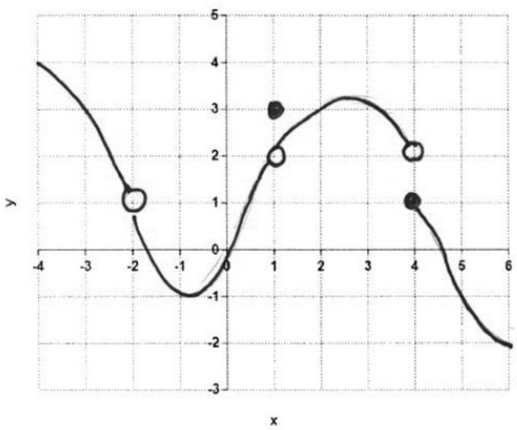
(g) $\beta(x) = \dfrac{13}{x^2-2x-8}$ (h) $f(y) = \sqrt{y^2}$ (i) $y(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

(j) $j(x) = \sqrt{x} - 1$ (k) $k(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ (l) $f(x) = \sqrt{3x+1} - \sqrt{-3x+1}$

(m) $g(t) = \dfrac{\sqrt{t}-\sqrt{7}}{t-7}$ (n) $\theta(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z}(z-2)}$ (o) $\lambda(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z}(z+2)}$

(p) $p(x) = \sqrt{-x^2-1}$ (q) $q(x) = \sqrt{-x^2}$ (r) $r(x) = \sqrt{1-x^2}$

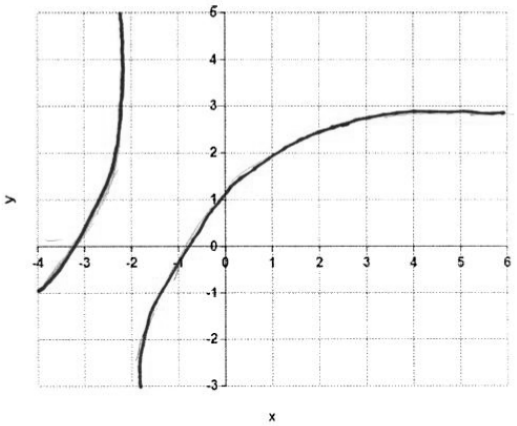
6. Considere o gráfico da função $f : [-4, 6] \to I\!R$ abaixo.



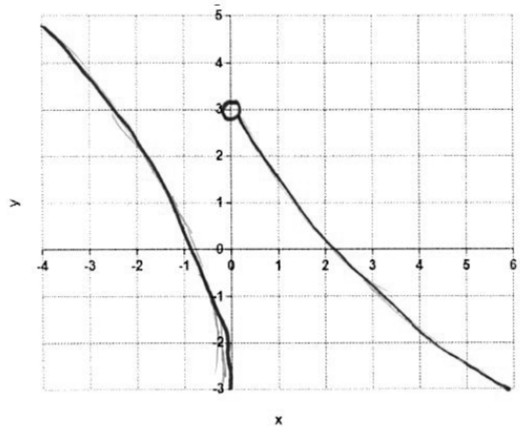
(a) Quais são os pontos de descontinuidade da função? (b) Encontre o valor da função para $x = -4$, $x = -3$, $x = -2$, $x = -1,5$ $x = -1$, $x = 0$, $x = 0,5$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 2,5$, $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$ e $x = 6$? Nos pontos onde não for possível dizer o valor exato, apresente um aproximado.

7. Para o gráfico de $f(x)$ dado em cada item, diga o valor dos limites solicitados (suponha que para $x \to -\infty$ e $x \to \infty$ a função continua com o comportamento representado no gráfico).

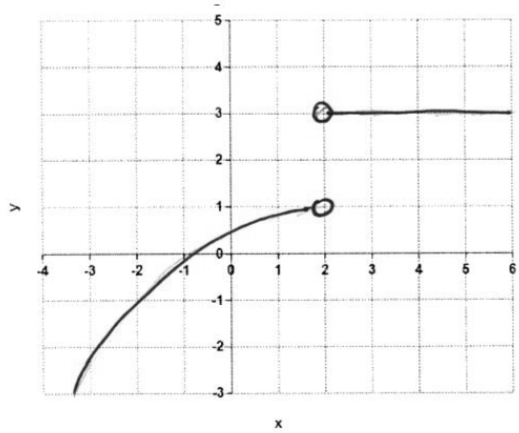
(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.



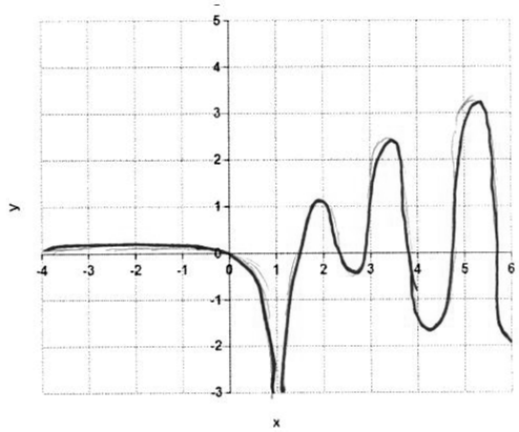
(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.



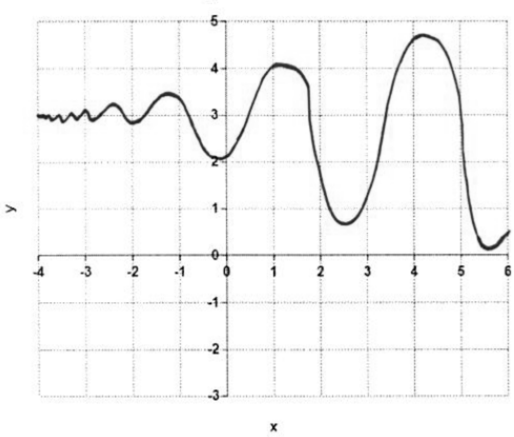
(c) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim_{x\to 4} f(x)$, $\lim_{x\to \infty} f(x)$.



(d) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 1} f(x)$, $\lim_{x\to \infty} f(x)$.



(e) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 1} f(x)$, $\lim_{x\to \infty} f(x)$.



8. Em cada item, apresente uma função $f(x)$ que respeite o que é indicado.

(a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$, $f(2) = 3$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

(b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 4$, $f(1) = 3$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

(c) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

(d) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 3$, $f(0) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

(e) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -2} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$.

(f) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $f(1) = -1$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

(g) $f(z) = 0$ se z é ímpar e $\lim_{x\to z} f(x) = \infty$ se z é par.

Respostas:

1. (a) $f(2) = 5$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{4}$ e $f(\sqrt{3}) = 10 - 4\sqrt{3}$.

(b) Não existe $g(0)$, $g(2) = 0$, $g(-3) = \sqrt{5}$.

(c) $h\left(-\frac{4}{3}\right) = -3$, $h(0) = 1$, não existe $h(-1)$.

2. (a) 3 milhões de reais.

(b) 4,6 milhões de reais.

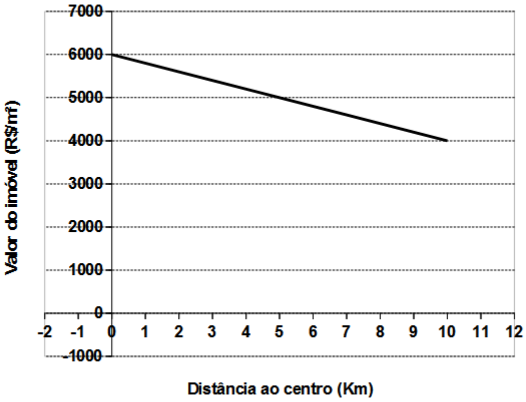
(c) 3,625 milhões de reais.

3. (a) 103g. (b) 148g. (c) 124g. (d) 104,76g

4. (a) R$$6000,00/m^2$.

(b) R$$5000,00/m^2$.

(c)



(d) O preço diminui, uma vez que a função $p(d)$ é decrescente para $d \in [0, 10]$, ou seja, quanto maior a distância d, menor o valor do preço p.

5. (a) $dom(f) = \left[-\frac{5}{2}, \infty\right[$

(b) $dom(g) = I\!R - \left\{-\frac{5}{2}\right\}$

(c) $dom(h) = \left]-\frac{5}{2}, \infty\right[$

(d) $dom(a) = \{t \in I\!R$ tal que $t \leq 0\}$

(e) $dom(\phi) = \{z \in I\!R$ tal que $-1 \leq z \leq 2\}$

(f) $dom(\alpha) = \{x \in I\!R$ tal que $x \leq -3$ ou $x \geq 3\}$

(g) $dom(\beta) = I\!R - \{-2, 4\}$

(h) $dom(f) = I\!R$

(i) $dom(y) = I\!R - \{0\}$

(j) $dom(j) = [0, \infty[$

(k) $dom(k) = [0, 1[\cup]1, \infty[$

(l) $dom(f) = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

(m) $dom(g) = [0, 7[\cup]7, \infty[$

(n) $dom(\theta) =]0, 2[\cup]2, \infty[$

(o) $dom(\lambda) =]0, \infty[$

(p) $dom(p) = \emptyset$

(q) $dom(q) = \{0\}$

(r) $dom(r) = [0, 1]$

6. (a) $x = -2$, $x = -1$, $x = 4$.

(b) $f(-4) = 4$, $f(-3) = 3$, Não existe $f(-2)$, $f(-1,5) = -0,5$ $f(-1) = -1$ $f(0) = 0$ $f(0,5) = 1$ $f(1) = 3$ $f(2) = 3$ $f(2,5) = 3,2$ $f(3) = 3$ $f(4) = 1$ $f(5) = -1$ e $f(6) = -2$.

7. (a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, não existe $\lim_{x\to-2} f(x)$, $\lim_{x\to-2^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$.

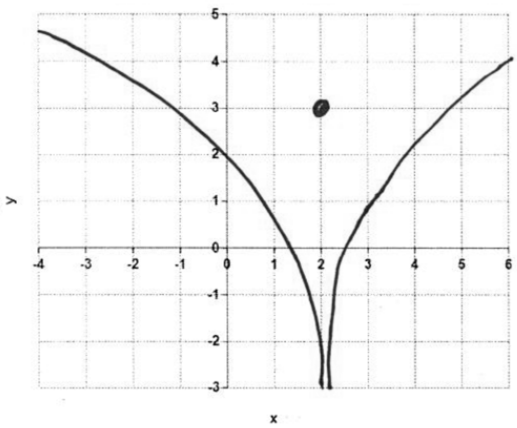
(b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to0^+} f(x) = 3$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

(c) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to2^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to2^+} f(x) = 3$, $\lim_{x\to4} f(x) = 3$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$.

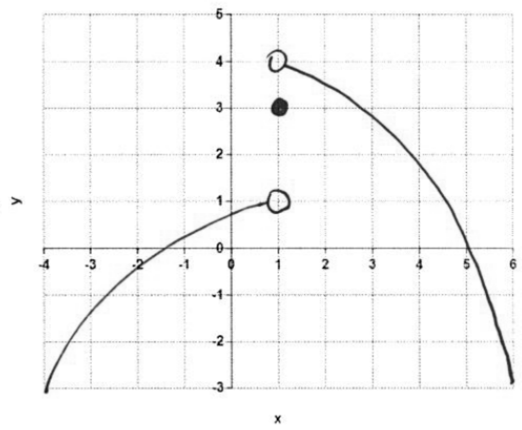
(d) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to1} f(x) = -\infty$, não existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

(e) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x\to1} f(x) = 4$, não existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

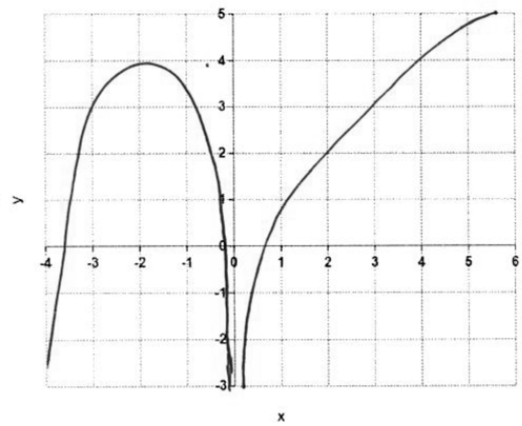
8. (a)



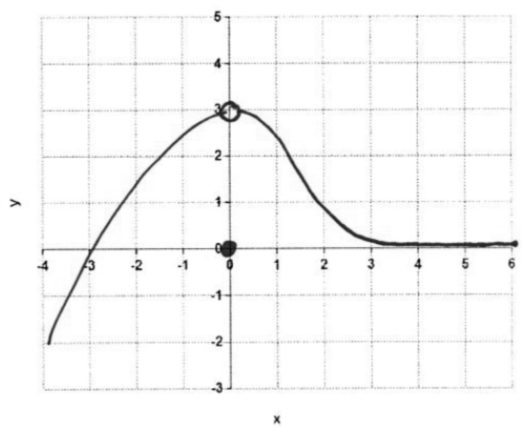
(b)



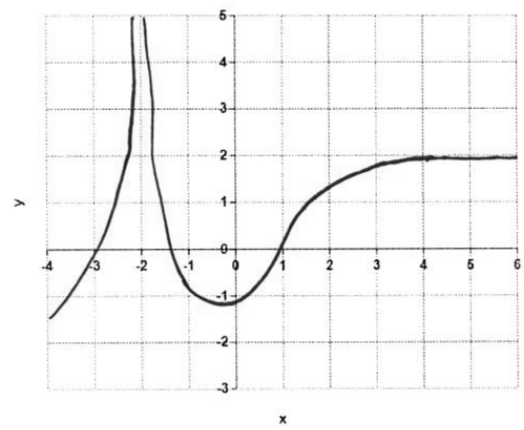
(c)



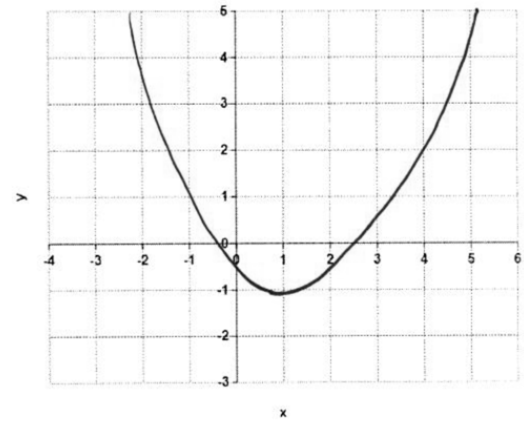
(d)



(e)



(f)



(g)