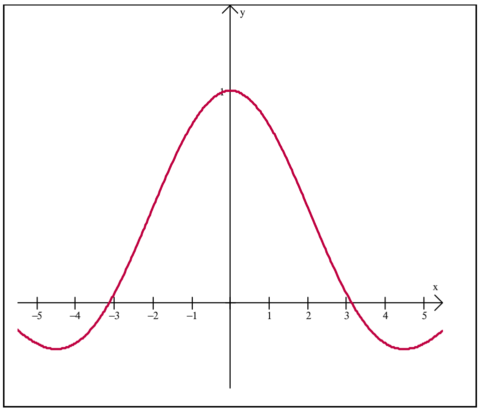
3. Limites

Ao trabalhar com uma função, nossa primeira preocupação deve ser o seu domínio (condição de existência), afinal, só faz sentido utilizá-la nos pontos onde esteja definida e sua expressão matemática, portanto, tenha significado. Todavia, em muitos casos, é importante saber como a função se comporta quando a variável está muito próxima de um ponto que não pertence ao seu domínio. E para este estudo, nos valemos da teoria de limites, a qual permite a análise de uma função em uma vizinhança muito próxima de um ponto, sem se preocupar com o valor da função neste ponto. Este conceito será ilustrado nos exemplos abaixo:

a) Vejamos o que ocorre com a função $f(x) = \dfrac{sen(x)}{x}$ quando x está muito próximo de 0:

x	-0,5	-0,01	-0,0001		0,0001	0,01	0,5
f(x)	0,95885	0,99998	0,9999998		0,9999998	0,99998	0,95885

Observamos que quando x se aproxima de 0 (ou x "tende" a 0, ou $x \to 0$) tanto pela esquerda quanto pela direita, *f(x)* se aproxima de 1 ($f(x) \to 1$). Vejamos o gráfico:

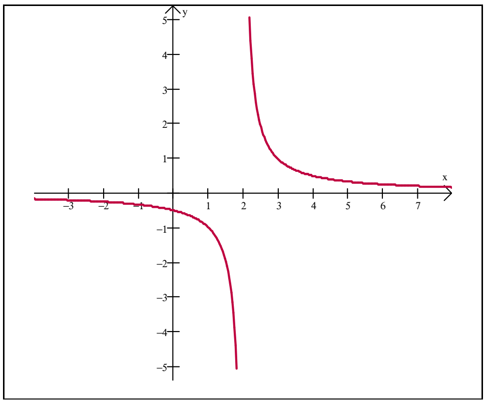


Observe que o programa utilizado desenha o gráfico de f como se tivéssemos *f(0)* = 1, porém sabemos que $\nexists$ *f(0)* (mais uma vez, cuidado ao utilizar o computador para fazer gráficos).

b) Observemos agora a função $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, quando $x \to 2$:

x	1,5	1,9	1,999	1,99999		2,00001	2,001	2,1	2,5
f(x)	-2	-10	-1.000	-100.000		100.000	1.000	10	2

Note que quando $x \to 2$ pela direita (ou seja, $x > 2$), *f(x)* cresce infinitamente de modo positivo e quando $x \to 2$ pela esquerda (ou seja, $x < 2$), *f(x)* decresce infinitamente de modo negativo. Vejamos o gráfico:



Conceito de limite: Se *f(x)* se aproxima de um número *L* quando *x* se aproxima de um número *c*, tanto pela esquerda ($x \to c^-$) como pela direita ($x \to c^+$), então *L* é o limite de *f(x)* quando *x* tende a *c*, o que é denotado por $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

Observações:

1. $\exists \lim_{x \to c} f(x) = L \iff \exists \lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$.

   Corolário: $\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to c} f(x)$.

2. Se *f(x)* cresce ou decresce infinitamente quando *x* se aproxima de um número *c*, pela esquerda ou pela direita, então dizemos que o limite de *f(x)* não existe quando *x* tende a *c*, e denotamos $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$.

3. Se *f(x)* se aproxima de um número *L* quando *x* cresce ou decresce infinitamente ($x \to \pm\infty$), então *L* é o limite de *f(x)* quando *x* tende a infinito, o que é denotado por $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$.

Cálculo de limites: o cálculo do limite de uma função na vizinhança de um determinado ponto (que pertença ou não ao seu domínio) é feito a partir das propriedades abaixo:

1. $\lim_{x \to c} k = k$ *e* $\lim_{x \to c} x = c, \forall\, k, c \in \Re$.

2. Se $\lim_{x \to c} f(x)$ e $\lim_{x \to c} g(x)$ existem, então:

2.1 $\lim_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$

2.2 $\lim_{x\to c}[k\, f(x)] = k \lim_{x\to c} f(x), \forall k \in \Re$

2.3 $\lim_{x\to c}[f(x)\, g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \times \lim_{x\to c} g(x)$

2.4 $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}, \quad se \ \lim_{x\to c} g(x) \neq 0$

2.5 $\lim_{x\to c}[f(x)]^p = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^p, \quad se \quad \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^p$ existe

3. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty; \qquad \lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

4. $\lim_{x\to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Exemplos:

1. $\lim_{x\to -1}(3x^3 - 4x + 8) = 3(-1)^3 - 4(-1) + 8 = 9$

2. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6$

3. $\lim_{x\to 2}(x^2 - 4)(x+1) = 0$

4. $$\lim_{x\to -5} \frac{x-5}{x+5} = \begin{cases} \lim_{x\to -5^+} \dfrac{x-5}{x+5} = -\infty \\ \lim_{x\to -5^-} \dfrac{x-5}{x+5} = +\infty \end{cases}$$

5. $$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{x-3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(1-\frac{3}{x})} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(1+\frac{1}{x})}{(1-\frac{3}{x})} = 1$$

6. $$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \lim_{x\to 9} \frac{(\sqrt{x}-3)}{(x-9)} \frac{(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x\to 9} \frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x\to 9} \frac{1}{(\sqrt{x}+3)} = \frac{1}{6}$$

Expressões indeterminadas: são expressões que, *a priori*, nada se pode afirmar sobre o valor de seus limites. Neste caso faz-se necessário um trabalho algébrico para transformar a expressão em uma equivalente a ela, para a qual seja possível o cálculo do limite. Os exemplos 2, 5 e 6 acima possuem expressões indeterminadas.

São consideradas indeterminadas as seguintes expressões:

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad +\infty-\infty,\quad 0\times\infty,\quad 0^0,\quad \infty^0,\quad 1^\infty$$

Limites fundamentais: os três limites abaixo são denominados limites fundamentais e podem ser utilizados no cálculo de outros limites, quando necessário. A demonstração será omitida aqui, porém é aconselhável que os estudantes façam a verificação através da visualização gráfica e/ou a construção de tabelas.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(x)}{x}=1$

2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln(a),\quad (a>0,\, a\neq 1)$

Exemplos:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(9x)}{x}=?$

   Seja $9x = y$. Então, $x = y/9$ e $x\to 0 \Leftrightarrow y\to 0$. Substituindo na função acima, temos:

   $$\lim_{x\to 0}\frac{sen(9x)}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{9sen(y)}{y}=9\lim_{y\to 0}\frac{sen(y)}{y}=9\times 1=9.$$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}=?$

   Seja $y=\dfrac{1}{\cos x}$. Então, $\cos x=\dfrac{1}{y}$ e $x\to\dfrac{3\pi}{2}\Leftrightarrow y\to\infty$. Substituindo na função, temos:

   $$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=e.$$

3. $\lim_{x \to 2} \frac{5^x - 25}{x - 2} = ?$

Seja $y = x - 2$. Então, $x = y + 2$ e $x \to 2 \Leftrightarrow y \to 0$. Substituindo na função, temos:

$$\lim_{x \to 2} \frac{5^x - 25}{x - 2} = \lim_{y \to 0} \frac{5^{y+2} - 25}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{5^y \ 5^2 - 25}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{25(5^y - 1)}{y} = 25 \lim_{y \to 0} \frac{(5^y - 1)}{y} = 25 \ln 5 \cong 40{,}236$$

EXERCÍCIOS:

Calcule os limites abaixo, caso existam:

1. $\lim_{x \to 3} (x-1)^2 (x+1)$

2. $\lim_{x \to 0} (1 - 5x^3)$

3. $\lim_{x \to 5} \frac{x+3}{5-x}$

4. $\lim_{x \to 1} \frac{2x+3}{x+1}$

5. $\lim_{x \to 3} \frac{9 - x^2}{x - 3}$

6. $\lim_{x \to 0} \frac{x(x^2 - 1)}{x^2}$

7. $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x + 2}$

8. $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

9. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(4x)}{3x}$

10. $\lim_{x \to 5} \frac{4}{x - 5}$

11. $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{10}{x}\right)^x$

12. $\lim_{x \to 2} \frac{e^{x-2} - 1}{x - 2}$

13. $\lim_{x \to 10} |x - 10|$

14. $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ se $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x, & x < 3 \\ 3 - x, & x \geq 3 \end{cases}$

15. $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ e $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ se $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x < -1 \\ x^2 + 2x, & x \geq -1 \end{cases}$

4. *Continuidade*

Informalmente dizemos que uma função é contínua quando seu gráfico não apresenta interrupções, ou seja, seu gráfico pode ser traçado sem que o lápis se afaste do papel. Assim, para que uma função f seja contínua em um ponto $x = a$ é necessário que a função esteja definida em a e que os valores de $f(x)$, para x próximos de a, estejam próximos de $f(a)$. Uma definição formal é dada a seguir:

Definição: Uma função f é contínua no ponto a se:

(a) $\exists\, f(a)$;

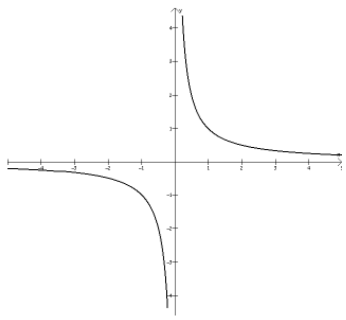
(b) $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$;

(c) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

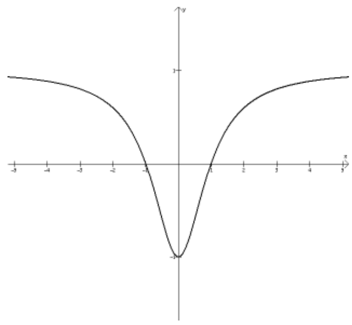
Exemplos: Verifique a continuidade das funções abaixo, nos pontos indicados:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $x = 0$.

(a) $\nexists\, f(0)$. Assim, a primeira condição de continuidade já não é satisfeita, o que implica que f não é contínua em $x = 0$. Observe a descontinuidade no gráfico.



2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; $x = -1$.

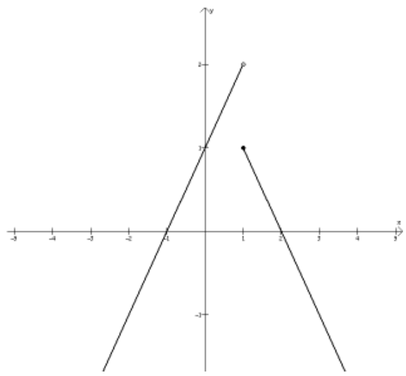


(a) $\exists\, f(-1) = 0$;

(b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 0$. Portanto, existe $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ e

(c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = f(-1)$. Logo, f é contínua em $x = -1$.

3) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x<1 \\ 2-x, & x \geq 1 \end{cases}$; $x = 1$.



(a) $\exists\ f(1) = 1$;

(b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} x+1 = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} 2-x = 1 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$;

Logo, f não é contínua em $x = 1$.

Observação: Se uma função **não é contínua** em um ponto a, dizemos que ela é **descontínua** neste ponto.

Continuidade em intervalo: Uma função f é dita contínua em um intervalo aberto (a,b) se for contínua em todos os valores de x contidos neste intervalo. f é dita contínua no intervalo fechado $[a,b]$ se for contínua no aberto (a,b) e, além disso, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ e $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

Uma pergunta natural que surge aqui é: como verificar se uma função é contínua em um intervalo, se ele contém infinitos elementos?

Existem duas maneiras de respondê-la: podemos tomar um ponto genérico do intervalo, por exemplo, x_0, e verificar, usando a definição, se f é contínua neste ponto. Se for, será em todo o intervalo, uma vez que x_0 representa um ponto qualquer do intervalo em questão. Outra maneira é utilizar as propriedades válidas para continuidade, apresentadas abaixo.

Propriedades:

1. Toda função polinomial é contínua em todos os reais.
2. Toda função racional (divisão de polinômios) é contínua em seu domínio.
3. As funções $f(x) = \text{sen}(x)$ e $f(x) = \cos(x)$ são contínuas para todo número real x.
4. A função exponencial $f(x) = e^x$ é contínua para todo número real x.
5. Se f e g são funções contínuas em um ponto a, então:

   (i) f + g é contínua em a;

   (ii) $f - g$ é contínua em a;

(iii) $f \times g$ é contínua em a;

(iv) f / g é contínua em a, desde que $g(a) \neq 0$.

6. Sejam f e g funções tais que $\lim_{x \to a} f(x) = b$ e g é contínua em a. Então

$$\lim_{x \to a} g[f(x)] = g\left[\lim_{x \to a} f(x)\right].$$

7. Se f é contínua em a e g é contínua em $f(a)$, então a função composta $g \circ f$ é contínua em a.
8. Seja $y = f(x)$ definida e contínua em um intervalo real I. Seja $J = \text{Im}(f)$. Se f admite uma função inversa $f^{-1} : J \to I$, então f^{-1} é contínua em todos os pontos de J.

   Obs.: Devido a esta propriedade, a função $f(x) = \ln(x)$ é contínua em todo o seu domínio ($\mathbb{R}_+^*$), uma vez que é a inversa da função exponencial, que é contínua.

Exemplos: Investigue a continuidade das funções abaixo, ou seja, determine os pontos ou intervalos onde elas sejam contínuas ou descontínuas, explicando porque.

1. $f(x) = \text{tg}(x)$

A função $f(x) = \text{tg}(x) = \text{sen}(x)/\cos(x)$ é o quociente de duas funções contínuas e, pela propriedade 4(iv), f é contínua em todos os pontos que não anulam o seu denominador, ou seja, no conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

2. $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

f é uma função racional (quociente de duas funções polinomiais) e, portanto, contínua em seu domínio. Logo, f é contínua em $\mathbb{R} - \{-2,2\}$.

3. $f(x) = \sqrt{x^4 + 5}$

f é a composta das funções $u(x) = x^4 + 5$ e $v(x) = \sqrt{x}$. u é uma função polinomial e, portanto, contínua; v é a inversa da função contínua $f(x) = x^2$ e, portanto, contínua em seu domínio. Como a composta de funções contínuas é uma função contínua em seu domínio, segue que f é contínua em seu domínio. Porém, $dom(f) = \mathbb{R}$. Logo, f é contínua em todos os reais.

EXERCÍCIOS

1. Investigue a continuidade das funções abaixo, ou seja, determine os pontos ou intervalos onde elas sejam contínuas ou descontínuas, explicando porque. Depois faça os respectivos gráficos, utilizando o programa *winplot.*

(a) $f(x) = \dfrac{2x-4}{3x-2}$

(b) $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{x-4}$

(c) $f(x) = \cot g(x)$

(d) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1})$

(e) $f(x) = |x-5|$

(f) $f(x) = \cos\sec(x)$

(g) $f(x) = \begin{cases} 1-\cos(x), & x < 0 \\ x^2+1 \quad , & x \leq 0 \end{cases}$

(h) $f(x) = \begin{cases} sen(x+\pi/2), & x \leq \pi/2 \\ x-\pi/2 \quad , & x > \pi/2 \end{cases}$

(i) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

(j) $f(x) = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

2. O Brasil taxa em 15% a renda mensal entre R$ 1.313,70 e R$ 2.625,12 e em 27,5% a renda acima deste valor, sendo isenta a parcela inferior ou igual a R$ 1.313,69.

a) Determine uma função que represente o imposto pago sobre uma renda qualquer.

b) Verifique se esta função é contínua, ou seja, se a transição entre uma faixa e outra se dá de modo contínuo, minimizando injustiças.

3. Suponha que a temperatura é T (^{o} F) e que a velocidade do vento é v (milhas/h). Neste caso, a temperatura corrigida é dada pela função

$$W(v) = \begin{cases} T & , \quad se \quad 0 \leq v \leq 4 \\ 91{,}4 + (91{,}4 - T)(0{,}0203v - 0{,}304\sqrt{v} - 0{,}474), & se \quad 4 < v < 45 \\ 1{,}6T - 55 & , \quad se \quad v \geq 45 \end{cases}$$

(a) Suponha que T = 30 ^{o}F. Qual é a temperatura corrigida quando v = 20 milhas/h? E quando v = 50 milhas/h?

(b) Para T = 30 ^{o}F, que velocidade do vento corresponde a uma temperatura corrigida de 0 ^{o}F?

(c) A função W é contínua em seu domínio?

4. Se uma esfera oca de raio R é carregada com uma unidade de eletricidade estática, a intensidade do campo elétrico $E(x)$ em um ponto P situado a uma distância de x unidades do centro da esfera é dada por:

$$E(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < x < R \\ \dfrac{1}{2x^2} & , \quad x = R \\ \dfrac{1}{x^2} & , \quad x > R \end{cases}$$

A função $E(x)$ é contínua para $x > 0$? Faça o gráfico para visualizar seu comportamento.

5. A população (em milhares) de uma colônia de bactérias t minutos após a introdução de uma toxina é dada por

$$f(t) = \begin{cases} t + 7 & , t < 5 \\ -8t + 72, & t \geq 5 \end{cases}$$

(a) Quanto tempo levará para a colônia se extinguir?

(b) Existe algum instante em que a população varia abruptamente ou esta variação se dá de modo contínuo ao longo do tempo?

6. O raio da Terra tem aproximadamente 6.400 km e um corpo situado a x km do centro da Terra pesa $p(x)$ kg, onde

$$p(x) = \begin{cases} Ax, & x \leq 6.400 \\ \dfrac{B}{x^2}, & x > 6.400 \end{cases}$$

e A e B são constantes positivas. Qual deve ser a relação entre A e B para que $p(x)$ seja contínua para qualquer valor de x?