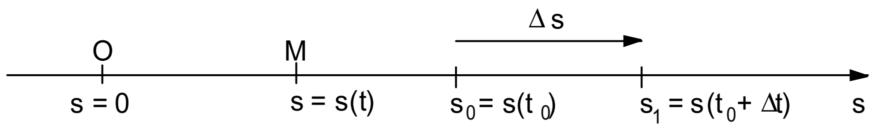
Aula 1

Velocidade instantânea e derivadas

1.1 Velocidade instantânea

Um ponto móvel M desloca-se ao longo de uma linha reta horizontal, a partir de um ponto O.



O deslocamento s, de M, em relação ao ponto O, é a distância de O a M, se M está à direita de O, e é o negativo dessa distância se M está à esquerda de O. Assim, s é positivo ou negativo, conforme M se encontre, respectivamente, à direita ou à esquerda de O.

Com estas convenções, a reta passa a ser *orientada*, o que chamamos de *eixo*, sendo O sua origem.

O deslocamento s depende do instante de tempo t, ou seja, s é uma função da variável t:

$$s = s(t)$$

Em um determinado instante t_0, o deslocamento de M é $s_0 = s(t_0)$. Em um instante posterior t_1, o deslocamento de M é $s_1 = s(t_1)$.

A *velocidade média* do ponto M, no intervalo de tempo $[t_0, t_1]$ é dada por

$$v_m = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Podemos também escrever $t_1 = t_0 + \Delta t$, ou seja, $\Delta t = t_1 - t_0$, e também $\Delta s = s(t_1) - s(t_0) = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$.

Teremos então

$$v_m = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Por exemplo, vamos supor que $s(t) = \frac{1}{2}at^2$ (ponto móvel uniformemente acelerado). Assim, no instante $t = 0$ o ponto móvel está em $s(0) = \frac{1}{2}a \cdot 0^2 = 0$.

A partir de um certo instante t_0, temos uma variação de tempo Δt. Seja $t_1 = t_0 + \Delta t$. Podemos ter $\Delta t > 0$ ou $\Delta t < 0$ (quando $\Delta t < 0$, t_1 antecede t_0). Teremos então

$$s(t_1) = s(t_0 + \Delta t) = \frac{1}{2}a(t_0 + \Delta t)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(at_0^2 + 2at_0\Delta t + a(\Delta t)^2\right)$$

A variação do deslocamento do ponto móvel, nesse intervalo de tempo, será

$$\Delta s = s(t_1) - s(t_0) = \frac{1}{2}at_0^2 + at_0\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 - \frac{1}{2}at_0^2$$

ou seja,

$$\Delta s = at_0\Delta t + \frac{a(\Delta t)^2}{2}$$

A velocidade média do ponto, no intervalo de tempo $[t_0, t_1]$, será dada por

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{at_0\Delta t + \frac{a(\Delta t)^2}{2}}{\Delta t} = at_0 + \frac{a\Delta t}{2}$$

Se $\Delta t \approx 0$, então também teremos $\Delta s = at_0\Delta t + \frac{a(\Delta t)^2}{2} \approx 0$. No entanto,

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = at_0 + \frac{a\Delta t}{2} \approx at_0$$

De um modo geral, definimos a *velocidade instantânea* $v(t_0)$, do ponto M, no instante t_0, como sendo o *limite* da velocidade média no intervalo de t_0 a $t_0 + \Delta t$, quando Δt *tende a zero* (esta foi uma idéia de Isaac Newton), e escrevemos

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

No nosso exemplo,

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(at_0 + \frac{a\Delta t}{2}\right) = at_0$$

1.2 Derivada de uma função

Uma função f é uma lei que associa cada valor x de um certo conjunto A (o domínio de f), um único valor $f(x)$ de um certo conjunto B (o contra-domínio de f). Neste curso, teremos sempre $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$. Veja também a observação 1.1, mais adiante nesta aula. Muitas vezes diremos "função $f(x)$", em lugar de "função f".

Dada uma função $f(x)$, a função derivada $f'(x)$ (leia-se *"f linha de x"*) é a função definida quando consideramos, para cada x, sujeito a uma variação $\Delta x \neq 0$, a variação correspondente de $y = f(x)$,

$$\Delta y = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

e então calculamos o valor limite da razão

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

quando Δx se aproxima indefinidamente de 0. Ou seja,

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Para um valor específico de x, digamos $x = x_0$,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

é a derivada de f (ou de $f(x)$), no ponto x_0.

Como primeiro e importante exemplo, temos

Regra 1.1 *Se $f(x) = x^n$, n inteiro positivo, então $f'(x) = nx^{n-1}$*

Demonstração. Da álgebra elementar, temos as seguintes fórmulas de fatoração:

$$\begin{aligned} b^2 - a^2 &= (b - a)(b + a) \\ b^3 - a^3 &= (b - a)(b^2 + ab + a^2) \\ b^4 - a^4 &= (b - a)(b^3 + ab^2 + a^2b + a^3) \end{aligned}$$

que o leitor pode verificar, simplesmente efetuando os produtos à direita, e então simplificando. De um modo geral, para $n \geq 4$, vale a seguinte fórmula:

$$b^n - a^n = (b - a)(b^{n-1} + ab^{n-2} + a^2b^{n-3} + \cdots + a^{n-3}b^2 + a^{n-2}b + a^{n-1}) \tag{1.1}$$

Sendo $f(x) = x^n$, temos para $\Delta x \neq 0$,

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^n - x^n \tag{1.2}$$

Substituindo $b = x + \Delta x$ e $a = x$, em 1.1, temos $b - a = \Delta x$, e então obtemos

$$\Delta f = \Delta x \cdot ((x + \Delta x)^{n-1} + x \cdot (x + \Delta x)^{n-2} + \cdots + x^{n-2}(x + \Delta x) + x^{n-1})$$

do que então

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = (x+\Delta x)^{n-1} + x\cdot(x+\Delta x)^{n-2} + \cdots + x^{n-2}(x+\Delta x) + x^{n-1}$$

Daí, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1}}_{n \text{ parcelas}} = nx^{n-1}$.

Portanto, $(x^n)' = nx^{n-1}$. ■

1.2.1 Notações simbólicas para derivadas, habitualmente usadas

Sendo $y = f(x)$, também escrevemos $\Delta y = \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$, e denotamos

$$\frac{dy}{dx} = (\textit{derivada de } y \textit{ em relação a } x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Assim temos $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. Indicamos ainda

$$f'(x_0) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$$

A razão

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

é a *taxa de variação média de* y*, em relação a* x*, no intervalo* $[x_0, x_0+\Delta x]$ *(ou no intervalo* $[x_0+\Delta x, x_0]$*, se* $\Delta x < 0$*).*

O valor

$$f'(x_0) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

é chamado de *taxa de variação (instantânea) de* y *em relação a* x*, no ponto* $x = x_0$.

Outras notações freqüentemente utilizadas para as derivadas (os símbolos abaixo tem o mesmo significado):

$f'(x)$ (notação de Lagrange)

$(f(x))'$

$\frac{df}{dx}$ (notação de Leibniz, leia-se *"dê f dê x"*)

$\frac{dy}{dx}$ (sendo $y = f(x)$)

$\frac{d}{dx}(f(x))$

$\dot{x}(t)$ (notação de Newton, derivada de x em relação à variável t (tempo))

Também tem o mesmo significado as notações para a derivada de f no ponto x_0,

$$f'(x_0) \qquad (f(x))'_{|x=x_0} \qquad \frac{df}{dx}(x_0)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \qquad \frac{d}{dx}(f(x))_{|x=x_0}$$

Exemplo 1.1 *De acordo com a regra 1.1, temos*

$(x)' = (x^1)' = 1x^{1-1} = x^0 = 1$, *ou seja* $(x)' = 1$.

$(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x$.

$(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$.

$(x^{100})' = 100x^{99}$.

Observação 1.1 (Intervalos da reta, e domínios das funções que estudaremos) *Aqui, e no restante do texto, estaremos assumindo sempre que nossas funções são funções de uma variável real x, com valores $f(x)$ reais, e estão definidas em intervalos ou reuniões de intervalos de $\mathbb{R}$, ou seja, tem os valores de x tomados em intervalos ou reuniões de intervalos.*

Os intervalos de $\mathbb{R}$ são conjuntos de uma das formas:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ *(intervalo* fechado *de extremos a e b)*;
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ *(intervalo* aberto *de extremos a e b)*;
$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ *(intervalo de extremos a e b,* semi-aberto *em b)*;
$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ *(intervalo de extremos a e b,* semi-aberto *em a).*

sendo a e b números reais, com $a < b$. Os intervalos acima são os intervalos limitados*.*

Os intervalos ilimitados *são conjuntos de uma das formas:*

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ *(intervalo* fechado *de a a $+\infty$)*;
$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ *(intervalo* aberto *de a a $+\infty$)*;
$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ *(intervalo* fechado *de $-\infty$ a b)*;
$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ *(intervalo* aberto *de $-\infty$ a b)*;
$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ *(intervalo* aberto *de $-\infty$ a $+\infty$)*;

sendo a e b números reais.

Assim, por exemplo,

1. *$f(x) = \sqrt{x}$ é uma função que está definida para os valores reais de x para os quais $\sqrt{x}$ existe e é um número real, ou seja, para $x \geq 0$. Assim, dizemos que o* domínio *ou* campo de definição *de f é o intervalo $D(f) = [0, +\infty[$.*

2. *$f(x) = 1/x$ é uma função que está definida para os valores reais de x para os quais $1/x$ existe e é um número real, ou seja, para $x \neq 0$. Assim, o* domínio *ou* campo de definição *de f é o conjunto $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, ou seja, a reunião de intervalos $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.*

3. *$f(x) = \sqrt{2-x} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ está definida para os valores reais de x para os quais $\sqrt{2-x}$ e $1/\sqrt{x-1}$ existem e são números reais, ou seja, para $x \leq 2$ ($2 - x \geq 0$) e $x > 1$ ($x - 1 > 0$). Assim, o* domínio *ou* campo de definição *de f é o intervalo $D(f) =]1, 2]$.*

Para um valor específico de x, digamos $x = x_0$, no domínio de uma função f, ao calcularmos o limite

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

estamos supondo que algum intervalo aberto, contendo x_0, também é parte do domínio de f, de modo que $x_0 + \Delta x$ também estará no domínio de f quando Δx for não nulo e suficientemente pequeno.

1.3 Primeiras regras de derivação (ou diferenciação)

Diferenciação ou *derivação* de uma função é o processo de cálculo da derivada da função.

Regra 1.2 *Se $f(x)$ é uma função e c é uma constante, então*

$$(cf(x))' = cf'(x).$$

Ou seja, a derivada de uma constante vezes uma função é a constante vezes a derivada da função.

Regra 1.3 *Sendo $f(x)$ e $g(x)$ duas funções,*

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Ou seja, a derivada de uma soma de duas funções é a soma das respectivas derivadas.

Demonstrações das propriedades 1.2 e 1.3. Alguns fatos sobre limites são assumidos intuitivamente.

$$\begin{aligned}
(cf(x))' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} c \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = cf'(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[f(x)+g(x)]' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)]}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x+\Delta x)-f(x)]+[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x}=f'(x)+g'(x)
\end{aligned}$$

Exemplo 1.2 *Sendo* $f(x)=2x^3-3x^5$, *temos*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (2x^3-3x^5)'\\
&= (2x^3+(-3)x^5)'\\
&= (2x^3)'+((-3)x^5)' && ((f+g)'=f'+g')\\
&= 2(x^3)'+(-3)(x^5)' && ((cf)'=cf')\\
&= 2\cdot 3x^2+(-3)\cdot 5x^4 && ((x^n)'=nx^{n-1})\\
&= 6x^2-15x^4
\end{aligned}$$

Observação 1.2 *Por um argumento tal como no exemplo acima, temos também* $(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x)$.

Regra 1.4 *A derivada de uma função constante é* 0*: se* $f(x)=c=constante$, *então* $f'(x)=(c)'=0$.

Demonstração. Sendo $f(x)=c=constante$, então

$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=c-c=0.$

Portanto, $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{0}{\Delta x}=0$ ($\frac{\Delta f}{\Delta x}$ é 0 mesmo antes de calcularmos o limite). Logo $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}0=0.$

Assim, se c é uma constante, $(c)'=0$. ∎

Exemplo 1.3 *Sendo* $y=-3t^6+21t^2-98$, *calcular* $\dfrac{dy}{dt}$.

Aplicando as regras acima estabelecidas, indicando por u' *a derivada de* u *em relação a* t,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= (-3t^6+21t^2-98)'\\
&= -18t^5+42t
\end{aligned}$$

Exemplo 1.4 *Sendo* $y = \dfrac{1}{x}$*, calcular* $\dfrac{dy}{dx}$.

Temos $y = \dfrac{1}{x}$*, e então*

$$\Delta y = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x+\Delta x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2}$$

1.4 Problemas

1. A posição de um ponto P sobre um eixo x, é dada por $x(t) = 4t^2 + 3t - 2$, com t medido em segundos e $x(t)$ em centímetros.

   (a) Determine as velocidades médias de P nos seguintes intervalos de tempo: $[1;\, 1,2]$, $[1;\, 1,1]$, $[1;\, 1,01]$, $[1;\, 1,001]$.

   (b) Determine a velocidade de P no instante $t = 1\,\text{seg}$.

   (c) Determine os intervalos de tempo em que P se move no sentido positivo e aqueles em que P se move no sentido negativo. (P se move no sentido positivo ou negativo se $x(t)$ aumenta ou diminui, respectivamente, à medida em que t aumenta.)

2. Se um objeto é lançado verticalmente para cima, com velocidade inicial $110\,\text{m/seg}$, sua altura $h(t)$, acima do chão ($h = 0$), após t segundos, é dada (aproximadamente) por $h(t) = 110t - 5t^2$ metros. Quais são as velocidades do objeto nos instantes $t = 3\,\text{seg}$ e $t = 4\,\text{seg}$? Em que instante o objeto atinge sua altura máxima? Em que instante atinge o chão? Com que velocidade atinge o chão?

3. Calcule $f'(x)$, para cada uma das funções $f(x)$ dadas abaixo, cumprindo as seguintes etapas

   i. Primeiro desenvolva a expressão $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$, fazendo as simplificações cabíveis.

   ii. Em seguida obtenha, uma expressão simplificada para $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

   iii. Finalmente, calcule o limite $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$.

   (a) $f(x) = 17 - 6x$

   (b) $f(x) = 7x^2 - 5$

(c) $f(x) = x^3 + 2x$

(d) $f(x) = \sqrt{x}$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x+5}$

(f) $f(x) = x^5$

(g) $f(x) = \dfrac{6}{x^2}$

4. Usando as regras de derivação estabelecidas, calcule as derivadas das seguintes funções.

(a) $f(t) = -6t^3 + 12t^2 - 4t + 7$

(b) $f(t) = (3t+5)^2$ *Sugestão:* Primeiro desenvolva o quadrado.

(c) $f(x) = (-2x^2+1)^3$ *Sugestão:* Primeiro desenvolva o cubo.

(d) $f(x) = (3x^2-7x+1)(x^2+x-1)$ *Sugestão:* Primeiro desenvolva o produto.

(e) $f(x) = x^3 - x^2 + 15$

5. Determine o *domínio* de cada uma das seguintes funções. Represente-o como um intervalo ou uma reunião de intervalos de $\mathbb{R}$. No nosso contexto, o domínio de uma função f é o conjunto de todos os números reais x para os quais $f(x)$ é um número real.

(a) $f(x) = x^3 - 5x + 3$

(b) $f(x) = -\sqrt{4-x}$

(c) $f(x) = -\sqrt{4-x^2}$

(d) $f(x) = \sqrt{x^2-5x+4}$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

1.4.1 Respostas e sugestões

1. (a) $11,8$; $11,4$; $11,04$; $11,004$ (cm/seg).

   (b) 11 cm/seg

   (c) P se move no sentido positivo quando $t > -3/8$, e no sentido negativo quando $t < -3/8$

2. 80 m/seg e 70 m/seg. Em $t = 11$ seg. Em $t = 22$ seg, com a velocidade de -110 m/seg.

3. (a) i. $\Delta f = -6\Delta x$

   ii. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = -6$

   iii. $f'(x) = -6$

   (b) i. $\Delta f = 14x\Delta x + 7(\Delta x)^2$

   ii. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 14x + 7\Delta x$

iii. $f'(x) = 14x$

(c) i. $\Delta f = (3x^2+2)\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

ii. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x^2 + 2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2$

iii. $f'(x) = 3x^2 + 2$

(d) i. $\Delta f = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$

ii. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$

iii. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. *Sugestão*. Ao calcular o limite $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$, o leitor chegará à expressão $0/0$, que não tem significado matemático. Para contornar este problema, devemos "ajeitar" $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, através das simplificações dadas abaixo.

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x\cdot(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Aqui fizemos uso da identidade $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = a-b$.

(e) i. $\Delta f = \frac{1}{x+\Delta x+5} - \frac{1}{x+5} = \frac{-\Delta x}{(x+\Delta x+5)(x+5)}$

ii. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-1}{(x+\Delta x+5)(x+5)}$

iii. $f'(x) = -\frac{1}{(x+5)^2}$

(f) $f'(x) = 5x^4$

(g) $f'(x) = -\dfrac{12}{x^3}$

4. (a) $f'(t) = -18t^2 + 24t - 4$

(b) $f'(t) = 18t + 30$

(c) $f'(x) = -48x^5 + 48x^3 - 12x$

(d) $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 18x + 8$

(e) $f'(x) = 3x^2 - 2x$

5. (a) $\mathbb{R}$

(b) $]-\infty, 4]$

(c) $[-2, 2]$

(d) $]-\infty, 1] \cup [4, +\infty[$

(e) $]0, 2[$