A Integral Indefinida

7.1 Equação Diferencial

Até o momento preocupamo-nos com o seguinte problema:

Dada uma função $y = f(x)$, encontrar a sua derivada $f'(x)$.

Preocuparemos agora em resolver o problema inverso, isto é:

D*ada uma função derivada $dy/dx = f(x)$, encontrar a sua primitiva $y = F(x)$*.

Em outras palavras, propomo-nos a resolver a equação $F'(x) = f(x)$, onde $f(x)$ é uma <u>função conhecida</u> e $F(x)$ é a <u>função a ser determinada</u>.

Exemplo 7.1

Uma solução da equação $F'(x) = 2x$ é a função $F(x) = x^2$ porque sua derivada é $F'(x) = 2x$. Portanto $F(x) = x^2$ é primitiva de $f(x) = 2x$.

Exercício 7.1

Existem outras primitivas de $f(x) = 2x$? Em caso afirmativo encontre duas outras.

O Exercício 7.1, que esperamos que o leitor tenha resolvido, tem solução afirmativa, isto é, $F(x) = x^2$ não é a única primitiva de $f(x) = 2x$. Independente das soluções que o leitor tenha encontrado a função $G(x) = x^2 + 1$, por exemplo, é outra primitiva de $f(x) = 2x$. Portanto, a equação $F'(x) = 2x$ possui mais de uma solução. Na realidade, há infinidade delas. O que estaremos interessados na sequência dos estudos é em estabelecer uma forma de determinar todas as soluções de uma equação da forma $F'(x) = f(x)$, para uma dada função $f(x)$.

Tendo-se $y = F(x)$ podemos estabelecer, a partir da equação $F'(x) = f(x)$, a forma diferencial:

$$dy = f(x)dx \quad (1)$$

A forma diferencial (1) é chamada d *Equação Diferencial* correspondente à função $f(x)$ e qualquer primitiva de $f(x)$ é considerada como sendo *uma solução* da equação diferencial dada.

Exercício 7.2

Encontre uma solução para cada uma das equações diferenciais seguintes:

1) $dy = (2x + 1)dx$

2) $dy = (3x^2 + x)dx$

3) $dy = \dfrac{1}{x}dx, x > 0$

4) $dy = \dfrac{1}{x+1}dx, x > -1$

5) $dy = senxdx$

6) $dy = (sec^2x)dx$

7) $dy = (cosx + senx)dx$

8) $dy = (4x^4 + 3x^2 + 2x + 1)dx$

9) $dy = \left(\frac{1}{x} + 2x\right)dx, x > 0$

10) $dy = (x^2 + cosx)dx$

Um fato de comprovação imediata é dado pela proposição seguinte:

Proposição 7.1

Se G(x) é solução da equação diferencial $dy = f(x)dx$ então $F(x) = G(x) + C$, também, será solução dessa mesma equação, qualquer que seja o número real C.

Exercício 7.3

Prove a Proposição 7.1

O resultado estabelecido pela Proposição 7.1 nos satisfaz, pelo menos, em termos de quantidade, pois, a partir de uma primitiva $G(x)$, podemos encontrar uma infinidade de outras primitivas de $f(x)$. Falta-nos, porém, analisar se existem outras primitivas diferentes daquelas que podem ser colocadas na forma $G(x) + C$, onde C é um número real. Para procedermos essa análise recordemos que dada uma função $y = f(x)$, derivável em um intervalo $]a, b[$, o valor de $f'(x)$ em um ponto $x_0 \in]a, b[$ coincide, numericamente, com o valor do coeficiente angular da reta tangente a $y = f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$.

Não é difícil concluir, pelos menos intuitivamente, que se fosse possível traçar a reta tangente a $y = f(x)$ em cada ponto $(x, f(x))$, $x \in]a, b[$, conheceríamos o gráfico dessa função. Com isso queremos dizer que o comportamento de $f'(x)$ reflete o comportamento de $y = f(x)$.

Apelando para essa instituição, o que poderíamos dizer de uma função que possui a derivada identicamente nula em um intervalo? O gráfico dessa função teria, em cada ponto, uma tangente horizontal. Como resultado o gráfico dessa função, também, seria horizontal acarretando, como consequência, ser essa função constante no intervalo considerado.

Essa argumentação, pelo menos, motiva a aceitação do teorema abaixo, cuja prova será apresentada num dos capítulos posteriores.

Teorema 7.1

Se uma função possui derivada identicamente nula em um intervalo então essa função é constante nesse intervalo.

Teorema 7.2

Se $F(x)$ e $G(x)$ são primitivas de $y = f(x)$ em um intervalo $]a, b[$ então $F(x)$ e $G(x)$ diferem por uma constante.

Demonstração

Se $F(x)$ e $G(x)$ são primitivas de $f(x)$, então, por definição, teremos que:

$$F'(x) = f(x) = G'(x).$$

Portanto,

$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = 0, \forall x \in \,]a, b[$$

Pelo Teorema 7.1

$$F(x) - G(x) = C, C \in R$$

Ou seja

$$F(x) = G(x) + C, \forall x \in \,]a, b[.$$

A Proposição 7.1 e o Teorema 7.2 permitem-nos descrever todas as soluções da equação diferencial $dy = f(x)dx$ a partir do conhecimento de qualquer primitiva de $f(x)$. O conjunto das soluções, designado *solução geral* da equação diferencial, será representado por $F(x) + C$, onde $F(x)$ é uma primitiva qualquer de $f(x)$ e C um número real qualquer.

Definição 7.1

Denominaremos de *integral indefinida* de $f(x)$ a solução geral $F(x) + C$ da equação diferencial $dy = f(x)dx$.

A notação utilizada para designar a integral indefinida de $f(x)$ é a seguinte:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad onde\ F'(x) = f(x)$$

Observação: na notação a função $f(x)$ é chamada de *função integranda* ou, simplesmente, *integrando.*

Exercício 7.4

Encontre a integral indefinida de $f(x)$, para:

1) $f(x) = 2x$
2) $f(x) = 3x^2$
3) $f(x) = x$
4) $f(x) = x^2$
5) $f(x) = x^3$
6) $f(x) = 5x^3$
7) $f(x) = 2x + 3x^2$
8) $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$
9) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$
10) $f(x) = e^x$
11) $f(x) = senx$
12) $f(x) = cosx$
13) $f(x) = x^n, \quad n \neq -1$
14) $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

7.2 Propriedades da Integral Indefinida

A integral indefinida apresenta algumas propriedades operatórias que descreveremos em seguida:

1) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
2) $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx, \quad \forall k \in R$
3) $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

As propriedades acima são, na realidade, decorrentes das propriedades operatórias válidas para as derivadas. Como exemplo, vamos verificar em seguida a validade da primeira dessas propriedades.

Exemplo 7.2

Inicialmente, vamos considerar as integrais indefinidas:

$$\int f(x)dx = F(x) + C_1 \quad (1)$$

$$\int g(x)dx = G(x) + C_2 \quad (2)$$

Pela Definição 7.1 podemos escrever que: $F'(x) = f(x)$ e $G'(x) = g(x)$.

Relembrando a regra de derivada para soma teremos:

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$$

Daí, novamente pela Definição 7.1, concluímos que:

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = F(x) + G(x) + C \quad (3)$$

Como qualquer número real pode ser escrito com soma de dois outros números podemos ter, por exemplo, $C = C_1 + C_2$ e, assim, de (3) segue que:

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = F(x) + G(x) + C = F(x) + G(x) + C_1 + C_2$$
$$= [F(x) + C_1] + [G(x) + C_2]$$

Usando (1) e (2), concluímos que:

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

Exercício 7.5

Prove as propriedades (2) e (3).

Exercício 7.6

Calcule as integrais destacando, em cada caso, as propriedades utilizadas.

1) $\int (3x^5 - 2x^2 + 5)\, dx$

2) $\int \left(3x^{-2} - \frac{1}{x}\right) dx$

3) $\int (x - cosx)\, dx$

4) $\int (x + senx)\, dx$

5) $\int \left(x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx$

6) $\int (senx + cosx)\, dx$

7) $\int (e^x + sec^2x)\, dx$

8) $\int \frac{4}{x^2+1} dx$

9) $\int \left(-3senx + \frac{2}{x}\right) dx$

10) $\int \left(5x^2 - \frac{x^3+2}{x^2} + 4\right) dx$

11) $\int 5\sqrt[3]{x^2} dx$

12) $\int \left(\sqrt{x} + x^{-3}\right) dx$

13) $\int \frac{3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 5x + 1}{x^2+1} dx$

14) $\int \left(\frac{1}{x^4} - 2x^5 - 2\right) dx$

15) $\int \left(2cosx - 4senx - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$

16) $\int (2x+1)^2 dx$

7.4 Técnicas de Integração

Com o que apresentamos até agora é fácil integrar funções que são derivadas de funções primitivas conhecidas ou inclusas em uma tabela que relacionam primitivas e derivadas, ou que podem ser transformadas em funções desses tipos através de operações elementares aplicadas aos integrandos das integrais dadas, como nos exercícios anteriores. Entretanto algumas integrais indefinidas, de simples solução, podem nos surpreender por não se encontrarem na lista de primitivas que temos à mão ou por escapar de nossa busca de solução por tentativa. Por exemplo, qual é a solução de $\int \cos(2x)\, dx$?

O leitor deve estar lembrado que a obtenção de derivadas foi consideravelmente ampliada com o conhecimento das regras de derivação. Similarmente, existem técnicas, em geral chamadas *técnicas de integração*, que auxiliam enormemente o processo de determinação de integrais indefinidas. Algumas dessas técnicas estão relacionadas diretamente com certas regras de derivação. Por exemplo, a *técnica de substituição* está relacionada com a regra da cadeia, embora com uma grande diferença: quando uma função é formada por composição de funções com derivadas conhecidas é possível derivá-la; na integração, muitas vezes, apesar de a função ser formada por composição de funções relativamente simples nem sempre conseguiremos encontrar sua integral usando essa técnica.

A técnica de *integração por partes* está relacionada com o produto de funções, no entanto há um número muito grande de integrais envolvendo o produto de funções que não poderão ser calculadas utilizando-se dessa técnica. São muitas as técnicas e apresentaremos aqui as mais usadas. Com essas técnicas o leitor não conseguirá encontrar a integral indefinida de todas as funções que sabe derivar, mas, mesmo assim, aprenderá integrar muitos tipos de funções. O que aconselhamos é exercitar bastante, pois, aqui o leitor terá de adquirir habilidade tanto na escolha quanto no uso das técnicas.

7.4.1 Integração por substituição

No texto anterior indagamos sobre a solução de $\int cos(2x)dx$. Como introdução para esta seção, buscaremos a solução dessa integral. De imediato, dá para perceber que uma candidata a primitiva de $f(x) = \cos(2x)$ é $F(x) = sen(2x)$, no entanto, pela regra da cadeia, temos que:

$$\frac{d[sen(2x)]}{dx} = 2\cos(2x).$$

Portanto, $F'(x) \neq f(x)$. Mas, lembrando que $(cf)' = cf'$, podemos tentar para primitiva de $f(x) = \cos(2x)$ a função $G(x) = \frac{1}{2}sen(2x)$ e, desta vez teremos:

$$\frac{d\left[\frac{1}{2}sen(2x)\right]}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d[sen(2x)]}{dx} = \frac{1}{2}2\cos(2x) = \cos(2x).$$

Portanto, $G'(x) = f(x)$ e então $\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}sen(2x) + C$.

Observemos que a necessidade de multiplicar $sen(2x)$ por $1/2$ para obter a primitiva de $\cos(2x)$ veio como consequência da regra da cadeia, ao derivar a função $u = 2x$ que aparece como o arco ao qual se encontra aplicado o cosseno na função integrando. O procedimento adotado, que justifica o nome dado à técnica, é o de proceder a substituição: $u = 2x$. Como consequência, a função integrando que tinha x como variável independente passa a ter, como variável independente, a nova variável u. Na integral a mudança de variável deve ser acompanhada da mudança de diferencial, através da relação:

$$Se\ u = 2x\ então\ du = 2dx\ ou\ dx = \frac{du}{2}$$

Dessa forma, teremos:

$$\int \cos(2x)\,dx = \int cosu\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int cosudu = \frac{1}{2}senu + C = \frac{1}{2}sen(2x) + C.$$

A *técnica de substituição* é justificada pela regra da cadeia, da seguinte maneira:

$$de\ \left(f\big(g(x)\big)\right)' = f'\big(g(x)\big).g'(x), teremos\ \int f'\big(g(x)\big)g'(x)dx = f\big(g(x)\big) + C.$$

Fazendo $u = g(x)$, teremos $du = g'(x)dx$ e, portanto $\int f'\,(u)du = f(u) + C$.

Importante:
Na técnica da substituição a mudança da variável sempre deverá ser acompanhada da mudança da diferencial. Como feito acima, ao substituir a variável x pela variável $u = g(x)$ é necessário que a diferencial dx seja substituída pela diferencial du através da relação $du = g'(x)dx$.

Exemplo 7.3

Calcular $\int \frac{1}{2x+1}dx$

A solução da integral é obtida pela substituição $u = 2x + 1$ de onde teremos:

$$du = 2dx \text{ ou } dx = \frac{du}{2}\cdot$$

Daí:

$$\int \frac{1}{2x+1}dx = \int \frac{1}{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln(u) + C = \frac{1}{2}\ln(2x+1) + C.$$

Obs. No exemplo, ao concluirmos que $\int(1/u)du = \ln(u) + C$ é necessário considerar $u > 0$. No entanto, entenderemos ao longo do texto que a validade do método ficará sempre sujeita ao domínio da função.

Exemplo 7.4

Calcular $\int (3x^2+1)^4 x dx$

A solução da integral é obtida pela substituição $u = 3x^2 + 1$ e teremos:

$$du = 6xdx \text{ ou } xdx = \frac{du}{6}\cdot$$

Desta forma, teremos:

$$\int (3x^2+1)^4 xdx = \int u^4\frac{du}{6} = \frac{1}{6}\int u^4 du = \frac{1}{6}\cdot\frac{u^5}{5} + C = \frac{1}{30}(3x^2+1)^5 + C.$$

Exemplo 7.5

Calcular $\int sen^2x.cosxdx$

A solução da integral é obtida pela substituição $u = senx$ de onde teremos $du = cosxdx$.

Daí:

$$\int sen^2x.cosxdx = \int u^2du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{6}sen^3x + C.$$

Exercício 7.7

Calcular:

1) $\int (3x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx$

2) $\int x^2\sqrt{6x^3+5}\,dx$

3) $\int \frac{3x^2+2x}{x^3+x^2}dx$

4) $\int \frac{x}{x^2+1}dx$

5) $\int cos^3(3x)sen(3x)dx$

6) $\int \frac{arcsenx}{\sqrt{1-x^2}}dx$

7) $\int e^{-u^2}udu$

8) $\int tgxdx$

9) $\int \frac{sec^2x}{tg^2x}dx$

10) $\int \frac{lnx}{x}dx$

11) $\int secxdx$* *(**Sugestão**: multiplique o integrando por $\frac{secx+tgx}{secx+tgx}$ e depois faça $u = secx + tgx$)*

12) $\int cossecxdx$

13) $\int \frac{cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

14) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$

15) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-ln^2x}}$

16) $\int \frac{cosx}{a^2+sen^2x}dx$

17) $\int cotgxdx$

18) $\int sen(2x+1)dx$

19) $\int \frac{3x}{\sqrt[3]{x^2-4}}dx$

20) $\int x\sqrt[5]{(3x^2-5)^3}dx$

21) $\int \frac{x^2-2x}{\sqrt[4]{(x^3-3x^2+5)^3}}dx$

Pelo que foi visto, e o restante do processo confirmará, o sucesso na determinação da integral indefinida depende da habilidade em localizar que parte do integrando deverá ser escolhida para compor a variável u e o correspondente du. Assim, o desenvolvimento da técnica de substituição depende do domínio das regras de derivação.

Exemplo 7.6

Calcular $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

Note que o integrando é "quase" a derivada de $y = arcsenx$. No entanto, na derivada de $y = arcsenx$ aparece 1 e não 4 no radicando. Vamos fazer com isso aconteça!

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}}dx = \int \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}dx$$

Fazendo agora

$$u = \frac{x}{2}, \text{ teremos } du = \frac{dx}{2} \text{ ou } dx = 2du \text{ e, assim:}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}2du = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = arcsen(u) + C$$

ou

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = arcsen\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Outra forma de calcular essa mesma integral é através da substituição $x = 2senu$, cujo diferencial é $dx = 2cosudu$. Dessa forma, o cálculo da integral dada fica da seguinte maneira:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{2cosudu}{\sqrt{4-4sen^2u}} = \int \frac{cosu}{\sqrt{1-sen^2u}}du = \int du = u + C$$

Na substituição $x = 2senu$, invertendo a relação teremos: $u = arcosen\left(\frac{x}{2}\right)$ e, assim:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = arcosen\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

O último procedimento utilizado é interessante, também, para situações em que às vezes a substituição direta $u = g(x)$ não é bem sucedida para a transformação da integral dada em uma integral imediata. Em muitos casos a inversão da relação para $x = g(u)$ resolve o problema. No caso anterior as duas situações conduziram ao sucesso na solução da integral, o que não é o caso do exemplo a seguir.

Exemplo 7.7

Calcular $\int \sqrt{1-x^2}dx$

Neste caso não adianta tentar a substituição $u = 1 - x^2$ (por quê?). No entanto, se colocarmos $x = senu$, o integrando fica mais simples pois desaparece o radical; e como $dx = cosudu$, teremos:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \left(\sqrt{1-sen^2u}\right) cosudu = \int cos^2udu \quad (1)$$

A última integral ainda não é nossa conhecida. No entanto, o seu integrando pode ser substituído por uma identidade trigonométrica obtida da seguinte maneira:

$$cos2u = cos^2u - sen^2u = 2cos^2u - 1 \; ou \; cos^2u = \frac{1+cos2u}{2}.$$

Assim, relação (1) pode ser reescrita na forma:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \frac{1+cos2u}{2}du = \frac{1}{2}\int du + \frac{1}{2}\int \cos(2u)\,du = \frac{1}{2}u + \frac{sen2u}{4} + C.$$

Resolvida a integral devemos, agora, retornar sua solução à variável x, para isso teremos: de $x = senu$ segue-se que $cosu = \sqrt{1-x^2}$ e $u = arcsenx$. Usando a identidade trigonométrica $sen2u = 2senucosu$, concluímos que $sen2u = 2x\sqrt{1-x^2}$ e, assim, o valor integral dada inicialmente será:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}arcsenx + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$$

O processo utilizado no exemplo se justifica pela relação:

$$\int f(x)dx = \int f\big(g(u)\big)g'(u)du, \;\; com \; x = g(u).$$

Para mostrar que uma primitiva $F(x)$ de $f(x)$ é também uma primitiva de $f\big(g(u)\big)g'(u)$, com $x = g(u)$ precisaríamos, além da regra da cadeia, de conhecimentos sobre funções inversas e suas derivadas que serão apresentadas no Capítulo 10. Substituições como essas são chamadas *substituições inversas*. Quando $g(u)$ é uma função trigonométrica a substituição inversa é também chamada de *substituição trigonométrica*.

É importante observar que na substituição trigonométrica utilizada nos últimos exemplos consideramos, por exemplo, $cosu = \sqrt{1-x^2}$ e não $cosu = -\sqrt{1-x^2}$. A explicação encontra-se no Capítulo 10. Por ora, alertamos que nas substituições trigonométricas envolvendo radicais, estes serão sempre considerados com sinais positivos.

Exemplo 7.8

Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

Fazendo $x = tgu$, teremos $dx = sec^2udu$ e, assim:

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \frac{sec^2u}{(1+tg^2u)^{\frac{3}{2}}}du = \int \frac{sec^2u}{(sec^2u)^{\frac{3}{2}}}du = \int \frac{sec^2u}{sec^3u}du = \int \frac{1}{secu}du.$$

Ou

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int cosudu = senu + C.$$

Para retornar à variável x devemos usar as identidades trigonométricas:

1) de $sec^2u = tg^2u + 1$, teremos: $sec^2u = x^2 + 1$;

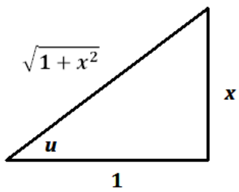
2) de $cos^2u = \dfrac{1}{sec^2u}$ e $cos^2u + sen^2u = 1$, tiramos que:

$$cos^2u = \frac{1}{x^2+1} \quad \text{e} \quad sen^2u = \frac{x^2}{x^2+1}.$$

Finalmente, podemos escrever o resultado da integral como sendo:

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

Muitas vezes usamos as relações métricas num triângulo retângulo para encontrar uma função trigonométrica do conhecimento de outra. No exemplo anterior conhecíamos o valor de $tgu = x$ e queríamos encontrar o valor de $senu$ em termos de x. Para tal procedimento, vamos considerar o triângulo retângulo como a seguir.



Na figura ao lado, se

$$tgu = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{x}{1}$$

teremos:

$$senu = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Observe que o valor obtido aqui para $senu$ é o mesmo que foi obtido anteriormente através das identidades trigonométricas.

Exercício 7.8

1) Mostre que:

a) $cos^2x = \dfrac{1+cos2x}{2}$ b) $sen^2x = \dfrac{1-cos2x}{2}$

2) Use as relações acima para demonstrar que:

a) $\displaystyle\int sen^2xdx = \frac{x - senxcosx}{2} + C$ b) $\displaystyle\int cos^2xdx = \frac{x + senxcosx}{2} + C$

Exercício 7.9

Calcule as integrais a seguir.

1) $\int \frac{1}{\sqrt{9-2x^2}}dx$

2) $\int \frac{1}{a^2+b^2x^2}dx, \forall a, b \in R$

3) $\int \frac{x}{\sqrt{3-x^2}}dx$

4) $\int \frac{1}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

5) $\int \frac{1}{(x^2+16)^2}dx$

6) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}dx$

7) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$

8) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx$

9) $\int \frac{1}{\sqrt{1+(2x+1)^2}}dx$

10) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+4}}dx$

11) $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$

12) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$

13) $\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}}dx$

14) $\int \frac{x}{x^2+x+1}dx$

15) $\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x^2}dx$

16) $\int \sqrt{1-4x^2}\,dx$

17) $\int \sqrt{25-9x^2}\,dx$

18) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

Exercício 7.10

Calcule as integrais a seguir utilizando-se da substituição $x = t^n$, onde n é o mínimo múltiplo comum dos índices das raízes de x.

1) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1}dx$

2) $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$

3) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$

4) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x^{\frac{3}{2}}}dx$

7.4.2 Integração por Partes

A técnica que apresentaremos agora é de muita utilidade quando a função integranda é um produto como, por exemplo,

$$\int xe^x\,dx.$$

Quando estudamos diferencial vimos que, para duas funções diferenciáveis f e g, a diferencial do produto é dada por:

$$d(f.g) = fdg + gdf.$$

Então

$$\int d(f.g) = \int fdg + \int gdf\,.$$

Como

$$\int d(f.g) = f.g + C,$$

teremos:

$$f.g = \int fdg + \int gdf \quad \text{ou} \quad \int fdg = f.g - \int gdf,$$

deixando a constante C para ser agrupada na resposta final.

De uma forma melhor, considerando $u = f(x)$ e $v = g(x)$, podemos reescrever a relação anterior da seguinte forma:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x).g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

ou, ainda, na sua forma mais conhecida:

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (1)$$

Note que a relação anterior nos permite calcular a integral indefinida $\int udv$ a partir do cálculo da integral indefinida $\int vdu$, uma vez conhecidas u e v, sendo a primeira identificada com um dos fatores da função integrando e a segunda pela integral indefinida dos fatores restantes desse mesmo integrando. O método é vantajoso de ser aplicado quando o cálculo da segunda integral em (1) resultar mais simples do que o da primeira integral. Para exemplificar vamos calcular a integral

$$\int xe^x dx.$$

Escolhendo $u = x$ e $dv = e^x dx$, teremos $du = dx$ e $v = \int e^x\,dx = e^x$.

Usando (1), teremos:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

Exemplo 7.9

Calcular $\displaystyle\int \ln(x)\,dx.$

A escolha $u = \ln(x)$ e $dv = dx$, nos dá $du = 1/x$ e $v = \int dx = x$. Portanto:

$$\int \ln(x)\,dx = xln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot xdx = xln(x) - \int dx = xln(x) - x + C.$$

Exemplo 7.10

Calcular $\displaystyle\int e^x cosx\,dx.$

A escolha $u = e^x$ e $dv = cosxdx$, nos dá $du = e^x dx$ e $v = \int cosxdx = senx$. Portanto:

$$\int e^x cosx\,dx = e^x senx - \int e^x senxdx. \qquad (2)$$

A segunda integral de (2) não é mais difícil que a primeira mas, também, não é mais fácil. Vamos continuar tentando resolver a integral *por partes*. Na segunda integral de (2) vamos escolher $u = e^x$ e $dv = senxdx$, que resulta:

$$du = e^x dx \text{ e } v = \int senxdx = -cosx.$$

Voltando em (2) teremos:

$$\int e^x cosx\,dx = e^x senx - \left(-e^x cosx + \int e^x cosxdx\right) = e^x senx + e^x cosx - \int e^x cosxdx.$$

Daí

$$\int e^x cosx\,dx + \int e^x cosx\,dx = e^x senx + e^x cosx,$$

resultando

$$2\int e^x cosx\,dx = e^x senx + e^x cosx.$$

Ou, finalmente:

$$\int e^x cosx\,dx = \frac{1}{2}(e^x senx + e^x cosx) + C.$$

Exercício 7.11

Calcular:

1) $\int xsenxdx$

2) $\int x^2\ln(x)\,dx$

3) $\int (x-1)e^x dx$

4) $\int arctgx\,dx$

5) $\int e^{2x}\cos(3x)\,dx$

6) $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$

7) $\int x^3 e^{x^2}\,dx$

8) $\int sen^3xdx$

9) $\int cos^3x\,dx$

10) $\int (lnx)^2\,dx$

11) $\int x^2e^{-x}\,dx$

12) $\int \frac{ln(x^2)}{x^2}dx$

13) $\int ln(1-x)\,dx$

14) $\int xarctgx\,dx$

15) $\int \frac{arcsen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

16) $\int xcos^2x\,dx$

17) $\int xsec^2x\,dx$

18) $\int sec^3x\,dx$

19) $\int x^2e^x\,dx$

20) $\int x^3cosx\,dx$

Exercício 7.12

1) Demonstre as relações a seguir:

a) $\int sen^n x\,dx = \frac{-cosx(senx)^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n}\int (senx)^{n-2}dx$

b) $\int cos^n x\,dx = \frac{senx(cosx)^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n}\int (cosx)^{n-2}dx$

2) Calcule $\int sen^5x\,dx$

3) Calcule $\int cos^4\,xdx$

7.4.3 Integração por Frações Parciais

A técnica que apresentaremos agora é usada quando queremos encontrar a integral indefinida de uma função racional, ou seja, quando desejamos calcular integrais indefinidas do tipo

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

sendo $p(x)$ e $q(x)$ dois polinômios. Desenvolveremos a técnica para ser aplicada sempre que o integrando for constituído por uma função racional própria, isto é, quando o grau do polinômio do numerador for menor do que o grau do polinômio do denominador. Isto não representa um enfraquecimento da técnica, pois, em caso contrário, efetuaremos a divisão para obter:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = p_1(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

sendo $r(x)$ o resto da divisão de $p(x)$ por $q(x)$ que, pelo critério da divisão, tem grau menor do que $q(x)$.

Daí, resulta que:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int p_1(x) dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx \quad (1)$$

sendo a última integral de (1) do tipo descrita anteriormente.

Exemplo 7.11

A função

$$f(x) = \frac{x^5 - x^2 + 8}{x^2 - 4}$$

é uma fração racional em que o numerador possui grau maior do que o denominador. Pelo critério de divisão de polinômio teremos:

$$f(x) = x^3 + 4x - 1 + \frac{16x + 4}{x^2 - 4}.$$

Da álgebra sabemos que todo polinômio pode ser escrito como um produto cujos fatores podem ser de dois tipos: polinômios do primeiro grau e polinômios quadráticos irredutíveis. Procedendo a fatoração no polinômio $q(x)$, a *técnica de frações parciais* consiste na decomposição da função racional dada em soma de frações cujos denominadores são polinômios de primeiro grau ou polinômios irredutíveis do segundo grau e, assim, a integral de cada parcela da soma obtida resulta numa das formas já estudadas na *técnica de substituição*.

Para facilitar o entendimento vamos considerar, separadamente, quatro casos possíveis de decomposição do polinômio $q(x)$:

1º Caso – A fatoração de $q(x)$ é feita com polinômios do primeiro grau não repetidos;

2º Caso – A fatoração de $q(x)$ é feita com polinômios do primeiro grau repetidos;

3º Caso – Na fatoração de $q(x)$ aparecem polinômios quadráticos irredutíveis não repetidos;

4º Caso – Na fatoração de $q(x)$ aparecem polinômios quadráticos irredutíveis repetidos.

7.4.3.1 A fatoração de $q(x)$ é feita com polinômios do primeiro grau não repetidos

Este caso ocorre quando as raízes de $q(x)$ são reais e distintas. Se $x_1, x_2, \cdots, x_s$ são as raízes de $q(x)$, então $q(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_s)$ e, assim, pode ser encontrada a seguinte decomposição:

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{a_1}{x - x_1} + \frac{a_2}{x - x_2} + \cdots + \frac{a_s}{x - x_s}$$

sendo $a_1, a_2, \cdots, a_s$ números reais a serem determinados.

Exemplo 7.12

No Exemplo 7.11 encontramos:

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{16x + 4}{x^2 - 4}\cdot$$

As raízes de $q(x)$ são 2 e -2 e, portanto, $q(x) = (x - 2)(x + 2)$. Devemos procurar números reais A e B, tal que

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2}$$

ou seja

$$\frac{16x + 4}{x^2 - 4} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} = \frac{A(x + 2) + B(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)}\cdot$$

Como os polinômios dos denominadores são idênticos, também deverão ser idênticos os polinômios dos numeradores e, portanto,

$$16x + 4 = (A + B)x + (2A - 2B).$$

Daí o sistema de equações:

$$\begin{cases} A + B = 16 \\ 2A - 2B = 4 \end{cases}$$

cuja solução é $A = 9$ e $B = 7$.

Assim, teremos a decomposição em frações parciais:

$$\frac{16x + 4}{x^2 - 4} = \frac{9}{x - 2} + \frac{7}{x + 2}.$$

Observe agora como os dois exemplos anteriores serão utilizados para calcular a

$$\int \frac{x^5 - x^2 + 8}{x^2 - 4} dx.$$

Com base nos exemplos 7.11 e 7.12 podemos escrever:

$$\frac{x^5 - x^2 + 8}{x^2 - 4} = x^3 + 4x - 1 + \frac{9}{x - 2} + \frac{7}{x + 2}.$$

Assim, teremos:

$$\int \frac{x^5 - x^2 + 8}{x^2 - 4} dx = \int \left(x^3 + 4x - 1 + \frac{9}{x - 2} + \frac{7}{x + 2}\right) dx.$$

Aplicando as propriedades da integral resulta que:

$$\int \frac{x^5 - x^2 + 8}{x^2 - 4} dx = \int x^3\, dx + 4\int x\, dx - \int dx + 9\int \frac{1}{x - 2} dx + 7\int \frac{1}{x + 2} dx$$

e, finalmente:

$$\int \frac{x^5 - x^2 + 8}{x^2 - 4} dx = \frac{x^4}{4} + 2x^2 - x + 9\ln(x - 2) + 7\ln(x + 2) + C.$$

Exercício 7.13

Calcular as integrais:

1) $\displaystyle\int \frac{2x + 1}{x^2 + 3x + 2} dx$

2) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 5}{x^3 + 4x^2 - 5x} dx$

3) $\displaystyle\int \frac{x^6 - 4x^3 + 2}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} dx$

4) $\displaystyle\int \left(x^2 - \frac{7x}{15} - \frac{2}{15}\right)^{-1} dx$

7.4.3.2 A fatoração de $q(x)$ é feita com polinômios do primeiro grau repetidos

Neste caso todas as raízes de $q(x)$ são reais, embora nem todas distintas. Para as raízes distintas tudo funciona como no caso anterior, no entanto, para as raízes repetidas irão aparecer parcelas em número igual à multiplicidade de cada raiz, da seguinte maneira: se uma raiz x_i tem multiplicidade s, isto é, a raiz x_i aparece repetidamente s vezes, irão aparecer s parcelas do seguinte tipo:

$$\frac{a_1}{x-x_i}, \frac{a_2}{(x-x_i)^2}, \cdots, \frac{a_s}{(x-x_i)^s}$$

onde $a_1, a_2, \cdots a_s$ são números reais a serem determinados.

Exemplo 7.13

Para calcular a integral

$$\int \frac{4x^2-13x+9}{x^3-6x^2+9x}dx$$

devemos começar pela fatoração do denominador da fração integrando:

$$x^3-6x^2+9x = x(x^2-6x+9) = x(x-3)^2.$$

Portanto, 0 e 3 são as raízes de $q(x)$, sendo 3 uma raiz dupla. Por conseguinte, a decomposição da fração integrando em frações parciais se obtém da seguinte maneira:

$$\frac{4x^2-13x+9}{x^3-6x^2+9x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}.$$

Daí,

$$\frac{4x^2-13x+9}{x^3-6x^2+9x} = \frac{A(x-3)^2+Bx(x-3)+Cx}{x^3-6x^2+9x} \qquad (1)$$

e, portanto, deveremos ter:

$$4x^2-13x+9 = (A+B)x^2+(C-6A-3B)x+9A$$

donde resulta o sistema

$$\begin{cases} A+B & = 4 \\ -6A-3B+C & = -13 \\ 9A & = 9 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, teremos a solução: $A = 1, B = 3$ e $C = 2$ e, portanto

$$\frac{4x^2-13x+9}{x^3-6x^2+9x} = \frac{1}{x} + \frac{3}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2}.$$

Agora, voltando à integral, teremos:

$$\int \frac{4x^2-13x+9}{x^3-6x^2+9x}dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2}\right)dx$$

ou

$$\int \frac{4x^2-13x+9}{x^3-6x^2+9x}dx = \int \frac{1}{x}dx + 3\int \frac{1}{x-3}dx + 2\int \frac{1}{(x-3)^2}dx$$

que resulta:

$$\int \frac{4x^2 - 13x + 9}{x^3 - 6x^2 + 9x} dx = lnx + 3\ln(x-3) - \frac{2}{x-3} + C.$$

Os números reais A, B e C determinados na decomposição dos integrandos dos exemplos anteriores podem ser determinados sem que seja necessário explicitar o sistema de equações como se procedeu nos desenvolvimentos anteriores. Na relação (1) do último exemplo podemos destacar a igualdade dos numeradores:

$$4x^2 - 13x + 9 = A(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx$$

que é uma identidade em x e, portanto, uma igualdade válida para qualquer valor particular da variável x e, desta forma, podemos escolher valores convenientes para x para a determinação dos coeficientes do segundo termo da igualdade. Assim, para $x = 0$ obtemos $A = 1$; para $x = 3$ encontra-se $C = 2$. Para $x = 1$, obteremos $-1 = A - 2B + 2C$ o que resulta $C = 3$, pela substituição dos valores de A e B. Esse tipo de solução constitui-se, às vezes, numa opção mais rápida para a determinação dos parâmetros da decomposição de frações racionais.

Exercício 7.15

Calculo as integrais:

1) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} dx$

2) $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 2x + 2}{(x+3)^2(x-1)^2} dx$

3) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 + 6x^2 + 9x} dx$

4) $\displaystyle\int \frac{5}{x^3 + 2x^2} dx$

5) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2(x+2)^2} dx$

6) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^3 - 2x^2 + x} dx$

7) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-3)^3} dx$

8) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 2x + 1} dx$

7.4.3.3 Na fatoração de $q(x)$ aparecem fatores quadráticos irredutíveis não repetidos.

O aparecimento de fatores quadráticos irredutíveis na fatoração de um polinômio indica a presença de números complexos como raízes do polinômio em questão. Nesse caso, na decomposição do polinômio em frações parciais, para cada trinômio irredutível $ax^2 + bx + c$, aparecerão frações da forma:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

onde A e B representam números reais a serem determinados.

Exemplo 7.14

Neste exemplo vamos calcular a integral:

$$\int \frac{5x^2+7}{x^3+3x-4}dx$$

A primeira etapa consiste em fatorar o polinômio $q(x) = x^3 + 3x - 4$. Por inspeção vemos que $x = 1$ é raiz de $q(x)$ e, portanto, um fator do polinômio é $x - 1$. Assim,

$$q(x) = (x-1)(x^2+x+4)$$

onde o polinômio $x^2 + x + 4$ é irredutível (por quê?).

A decomposição em frações parciais nos dará:

$$\frac{5x^2+7}{x^3+3x-4} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+4}$$

que, reduzindo ao mesmo denominador no segundo membro da igualdade, teremos:

$$\frac{5x^2+7}{x^3+3x-4} = \frac{A(x^2+x+4)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+4)}$$

ou

$$\frac{5x^2+7}{x^3+3x-4} = \frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+(4A-C)}{x^3+3x-4}.$$

Identificando os numeradores, teremos o sistema:

$$\begin{cases} A+B=5 \\ A-B+C=0 \\ 4A-C=7 \end{cases}$$

cuja solução é:

$$\begin{aligned} A &= 2 \\ B &= 3 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

e, portanto, teremos:

$$\frac{5x^2+7}{x^3+3x-4} = \frac{2}{x-1} + \frac{3x+1}{x^2+x+4}.$$

Daí, a integral:

$$\int \frac{5x^2+7}{x^3+3x-4}dx = 2\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{3x+1}{x^2+x+4}dx \qquad (1)$$

É fácil calcular a primeira integral do segundo membro de (1), pois, tomando $u = x - 1$, teremos $du = dx$ e, portanto

$$2\int \frac{1}{x-1}dx = 2\int \frac{1}{u}du = 2lnu + C_1$$

ou

$$2\int \frac{1}{x-1}dx = 2ln(x-1) + C_1 \quad (2)$$

A dificuldade do exercício fica por conta da outra integral do segundo membro de (1). Vamos, inicialmente, separá-la da seguinte forma:

$$\int \frac{3x+1}{x^2+x+4}dx = \int \frac{2x+1}{x^2+x+4}dx + \int \frac{x}{x^2+x+4}dx \quad (3)$$

Vamos designar as integrais do segundo membro de (3), respectivamente, por I_1 e I_2.

No cálculo de I_1 basta tomar a substituição $u = x^2 + x + 4$. Daí, teremos: $du = (2x+1)dx$ e, portanto, resulta que

$$I_1 = \int \frac{2x+1}{x^2+x+4}dx = \int \frac{1}{u}du = lnu + C_2 = ln(x^2+x+4) + C_2 \quad (4)$$

No cálculo de I_2 vamos, primeiramente, reescrever o numerador da função integranda usando-se da seguinte identidade:

$$x = \frac{(2x+1)-1}{2} \cdot$$

Portanto,

$$I_2 = \int \frac{x}{x^2+x+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)-1}{x^2+x+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+4}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+4}dx.$$

Na primeira integral do último membro de I_2 repete-se o que foi feito no cálculo de I_1, isto é, fazendo $u = x^2 + x + 4$, teremos $du = (2x+1)dx$ e, portanto,

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}lnu + C_2 = \frac{1}{2}ln(x^2+x+4) + C_2 \cdot \quad (5)$$

Na segunda integral, usando a identidade:

$$x^2 + x + 4 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 4 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}$$

obtemos

$$\int \frac{1}{x^2+x+4}dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}dx.$$

Pela técnica da substituição, teremos:

$$se\ x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{15}}{2}u, então\ dx=\frac{\sqrt{15}}{2}du$$

e, portanto,

$$\int \frac{1}{x^2+x+4}dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}dx = \int \frac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{\frac{15}{4}u^2+\frac{15}{4}}du = \frac{2\sqrt{15}}{15}\int \frac{1}{u^2+1}du$$

e, consequentemente,

$$\int \frac{1}{x^2+x+4}dx = \frac{2\sqrt{15}}{15}arctgu + C_3 = \frac{2\sqrt{15}}{15}arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)+C_3 \quad (6)$$

Reunindo esses dois últimos resultados, (5) e (6), teremos:

$$I_2 = \frac{1}{2}ln(x^2+x+4) - \frac{1}{2}\left[\frac{2\sqrt{15}}{15}arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)\right]+C_4 \quad (7)$$

Levando (4) e (7) em (3), obtemos:

$$\int \frac{3x+1}{x^2+x+4}dx = ln(x^2+x+4)+\frac{1}{2}ln(x^2+x+4)-\frac{\sqrt{15}}{15}arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)+C_5$$

ou,

$$\int \frac{3x+1}{x^2+x+4}dx = \frac{3}{2}ln(x^2+x+4)-\frac{\sqrt{15}}{15}arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)+C_5 \quad (8)$$

Para construir o resultado final do exercício proposto no exemplo basta conduzir os resultados parciais (2) e (8) em (1) e, teremos:

$$\int \frac{5x^2+7}{x^3+3x-4}dx = 2ln(x-1)+\frac{3}{2}ln(x^2+x+4)-\frac{\sqrt{15}}{15}arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)+C.$$

Observação:

Sugerimos ao leitor que refaça sozinho todas as passagens do exemplo anterior. Esperamos que a extensão e a variedade de situações que o exercício envolve não o esmoreçam, mas, muito pelo contrário, que o anime, pois estará adquirindo treino nas técnicas de integração.

Exercício 7.15

Calcule:

1) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{2x^3+x^2+x}\,dx$ 2) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+4)}\,dx$

7.4.3.4 Na fatoração de $q(x)$ aparecem fatores quadráticos irredutíveis repetidos.

A repetição do fator quadrático ax^2+bx+c na fatoração de $q(x)$ será indicada pelo expoente a que esse fator estiver submetido. Assim, de maneira semelhante ao item 7.4.3.2, teremos um número de frações igual ao número indicado no expoente. Designando por n o expoente do trinômio, por $A_1, A_2, \cdots, A_n$ e $B_1, B_2, \cdots, B_n$ os números reais a serem determinados, teremos n frações do tipo:

$$\frac{A_1+B_1}{ax^2+bx+c}, \frac{A_2+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}, \cdots, \frac{A_n+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Exemplo 7.15

Para calcular a integral

$$\int \frac{1}{(x+1)(x^2+4)^2}\,dx,$$

uma vez que a fração integranda já se encontra fatorada, podemos já passar para o segundo passo que é a decomposição do integrando por frações parciais. Assim, teremos que encontrar os números reais A, B, C, D e E tal que:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+4)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}.$$

Reduzindo o segundo membro ao mesmo denominador, teremos:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+4)^2} = \frac{A(x^2+4)^2 + (Bx+C)(x+1)(x^2+4) + (Dx+E)(x+1)}{(x+1)(x^2+4)^2}$$

Realizando as operações no numerador e reduzindo os termos semelhantes resultará:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+4)^2} =$$
$$= \frac{(A+B)x^4 + (B+C)x^3 + (8A+4B+C+D)x^2 + (4B+4C+D+E)x + (16A+4C+E)}{(x+1)(x^2+4)^2}$$

Identificando os numeradores teremos o sistema:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ B + C = 0 \\ 8A + 4B + C + D = 0 \\ 4B + 4C + D + E = 0 \\ 16A + 4C + E = 1 \end{cases}$$

cuja solução é:

$$A = \frac{1}{25}, B = -\frac{1}{25}, C = \frac{1}{25}, D = -\frac{1}{5} \ e \ E = \frac{1}{5}.$$

Assim:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+4)^2} = \frac{\frac{1}{25}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{25}x + \frac{1}{25}}{x^2+4} + \frac{-\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}}{(x^2+4)^2}$$

ou,

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+4)^2} = \frac{1}{25(x+1)} - \frac{x-1}{25(x^2+4)} - \frac{x-1}{5(x^2+4)^2}.$$

Portanto:

$$\int \frac{1}{(x+1)(x^2+4)^2} dx = \frac{1}{25}\int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{25}\int \frac{x-1}{x^2+4} dx - \frac{1}{5}\int \frac{x-1}{(x^2+4)^2} dx$$

ou

$$\int \frac{1}{(x+1)(x^2+4)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{25}\int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{25}\int \frac{x}{x^2+4} dx + \frac{1}{25}\int \frac{1}{x^2+4} dx - \frac{1}{5}\int \frac{x}{(x^2+4)^2} dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{(x^2+4)^2} dx$$

As soluções da primeira, segunda e quarta integral do segundo membro da igualdade anterior se obtêm através de substituições elementares e apresentam os seguintes resultados (as respectivas constantes, desses casos e dos demais resultados parciais, foram omitidas e serão consideradas conjuntamente no final):

$$\int \frac{1}{x+1} dx = \ln(x+1); \int \frac{x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} ln(x^2+4) \text{ e } \int \frac{x}{(x^2+4)^2} dx = \frac{1}{2(x^2+4)}.$$

As soluções da terceira e quinta integral se obtêm através da substituição inversa $x = 2tgu$ de onde tem $dx = 2sec^2udu$. Para a primeira dessas integrais facilmente se obtêm que:

$$\int \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} arctg\left(\frac{x}{2}\right).$$

Já para a segunda delas ocorre um trabalho extra para retornar-se à variável x, após o cálculo da integral, senão vejamos:

$$\int \frac{1}{(x^2+4)^2} dx = \int \frac{2sec^2udu}{(4tg^2u+4)^2} = \frac{1}{8}\int \frac{1}{sec^2u} du.$$

De onde segue que:

$$\int \frac{1}{(x^2+4)^2}dx = \frac{1}{8}\int cos^2u\, du = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}u + \frac{senucosu}{2}\right) = \frac{1}{16}arctg\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{8}\cdot\frac{x}{x^2+4}$$

Observação:
O leitor deverá mostrar que a partir de $x = 2tgu$ *se obtêm* $cosu = \frac{2}{\sqrt{x^2+4}}$ *e* $senu = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$.

O resultado final para a integral dada no exemplo é o seguinte:

$$\int \frac{1}{(x+1)(x^2+4)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{25}\ln(x+1) - \frac{1}{50}ln(x^2+4) + \frac{1}{50}arctg\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{10(x^2+4)} + \frac{1}{80}arctg\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{40(x^2+4)}.$$

Exercício 7.16

Faça todas as passagens do Exemplo 7.15

Exercício 7.17

Calcule as seguintes integrais:

1) $\int \frac{1}{x^2-1}dx$

2) $\int \frac{3x^2+10x-5}{x^3+3x^2-x-3}dx$

3) $\int \frac{1}{(x-2)^2(x+3)}dx$

4) $\int \frac{1}{x^4-x^2}dx$

5) $\int \frac{x^3-3x^2-6}{(x+1)^2(x^2+4)}dx$

6) $\int \frac{2x^2-x+1}{x^3-x^2+x-1}dx$

7) $\int \frac{2x+1}{2x(x-3)^2}dx$

8) $\int \frac{x^5-3x^2}{x^3-2x-4}dx$

9) $\int \frac{x^4-1}{x^4+x^2}dx$

10) $\int \frac{1}{(x^2+x+3)^2}dx$

11) $\int \frac{5x^2+5x+6}{(5x^2+4x+1)(x+5)}dx$

12) $\int \frac{1}{x^3+8}dx$

Exercício 7.18 (Revisão Geral do Capítulo 7)

I) Resolva as equações diferenciais:

1) Encontre a solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2 - x$$

que passa pelo ponto (1,2).

2) Encontre a solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 3x$$

que passa pelo ponto (1,2).

3) Uma partícula se desloca com uma aceleração igual a $(2t + 1)\,m/s^2$. No instante $t = 1s$, a partícula encontra-se a $5m$ da origem e sua velocidade é $6\,m/s$. Qual é a equação horária do movimento?

4) Em uma certa cultura biológica onde a velocidade de crescimento de bactérias é proporcional à quantidade existente, o número inicial dobra em 2 horas e, ao fim, de 10 horas existem 6 milhões de bactérias. Quantas bactérias existiam inicialmente?

5) A *lei de resfriamento de Newton* estabelece que a velocidade com a qual um corpo muda de temperatura é proporcional à diferença entre sua temperatura e a do meio ambiente. Se um corpo está no ar a uma temperatura de 30°C e o corpo esfria de 100°C para 40°C em $20min$, encontre a temperatura do corpo depois de $25min$.

6) A velocidade de crescimento natural de uma população de uma certa cidade é sempre proporcional à população presente. Se a população triplica em 50 anos e se a população em 1960 era de 6.000 habitantes, qual população foi registrada em 1980?

II) Calcule as integrais a seguir utilizando-se da técnica apropriada para cada caso:

1) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

2) $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$

5) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+1}{x^2+1}\,dx$

6) $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+1}\,dx$

7) $\displaystyle\int \frac{1}{x(lnx)^n}\,dx$

8) $\displaystyle\int \frac{x}{(2x+1)^5}\,dx$

9) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x+2}\,dx$

10) $\displaystyle\int x^2(ln2x)^2\,dx$

11) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

12) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

13) $\displaystyle\int \sqrt{1+e^x}\,dx$

14) $\displaystyle\int (cos^4x - sen^4x)\,dx$

15) $\int \sqrt{cosx + 1}\, dx$

16) $\int \sqrt{1 - cosx}\, dx$

17) $\int \frac{x}{1 + \sqrt{x} + x} dx$

18) $\int \frac{senx}{cos^2x + cosx - 2} dx$

19) $\int sec^3x\, dx$

20) $\int tg^3x\, dx$

21) $\int \frac{x + 2}{\sqrt{4 - 2x - x^2}} dx$

22) $\int ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) dx$

23) $\int (\cos x \;\; ax)(\cos bx)\, dx$

24) $\int (sen\ ax)(sen\ bx)\, dx$

Como sugestão, mostre que:

$$2cos(p)cos(q) = cos(p + q) + cos(p - q) \;\; e \;\; 2sen(p)sen(q) = cos(p - q) - cos(p + q)$$

25) $\int tg^4x\, dx$

26) $\int sen^2xcos^2x\, dx$

27) $\int \frac{tgx}{tgx + secx} dx$

28) $\int cos\sqrt{1 - x}\, dx$

29) $\int \frac{1}{\sqrt{4x + x^2}} dx$

30) $\int \frac{1}{1 - tg^2x} dx$

31) $\int \frac{1}{x\left(3\sqrt{x} + 1\right)} dx$

32) $\int e^{\sqrt{t}}\, dx$

33) $\int \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} dx$

34) $\int \sqrt{x^2 + 5}\, dx$