A Integral Definida

O estudo da *Integral Definida* e da *Derivada*, esta introduzida no Capítulo 2, constitui o objetivo central deste livro. Historicamente os dois conceitos foram desenvolvidos separadamente. Carl B. Boyer[1], em sua História da Matemática, p.278, nos dá a exata dimensão de cada processo: "Achar tangentes exigia o uso do *calculus differentialis* e achar quadraturas o *calculus summatorius* ou *calculus integralis*, frases de onde resultaram as expressões que usamos". Em razão disso, os autores deste livro optaram pela denominação Cálculo Diferencial e Integral, mantendo-se a referência inicial, ao contrário de outros autores que optam pela palavra síntese Cálculo.

Na sequência será desenvolvido o processo que nos permite o cálculo de áreas de regiões planas, mais especificamente, *área sob curvas* e, em seguida, a generalização desse processo nos conduzirá ao conceito de *integral definida*.

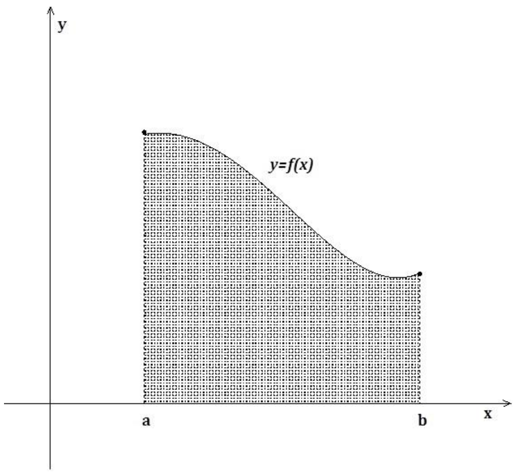
8.1 Cálculo de Áreas

Sabemos, através da Geometria, como calcular áreas de polígonos e do circulo. Esse conhecimento pode ser utilizado para o cálculo de áreas de regiões que possam ser divididas em um número finito de regiões poligonais ou setores circulares. Quando a região não pode ser decomposta deste modo o procedimento não consegue ser adotado para o cálculo de sua área. Um exemplo simples desse fato é o cálculo da região limitada por uma elipse.

Apresentaremos nesta secção um método sistemático de cálculo da área de certas regiões para as quais os recursos da Geometria se mostram ineficazes. Esse método, além de sua importância intrínseca, fornece motivação para o tema principal deste capítulo que é a *Integral Definida*.

Para a introdução do processo de cálculo de áreas que iremos desenvolver necessitaremos de alguns conceitos preliminares essenciais para o entendimento do método.

[1] BOYER, Carl B. História da Matemática. São Paulo. Editora Edgar Blucher Ltda. 1996



Definição 8.1

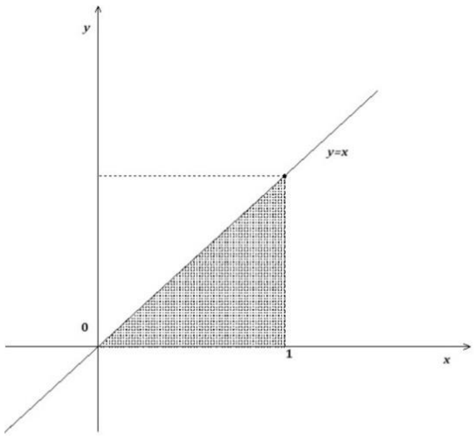
Sejam a e b dois números tais que $a \leq b$ e f uma função contínua em $[a, b]$, com $f(x) \geq 0$ para todo x desse intervalo. Denominaremos de *área sob a curva f entre a e b* como sendo a área da região limitada pelo gráfico da função *f*, pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e pelo eixo horizontal, conforme figura ao lado.

Notação:

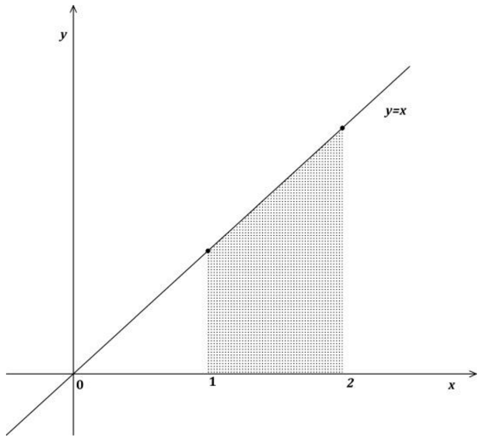
$$A_a^b(f): \acute{A}rea\ sob\ a\ curva\ y = f\ entre\ a\ e\ b$$

Exemplo 8.1

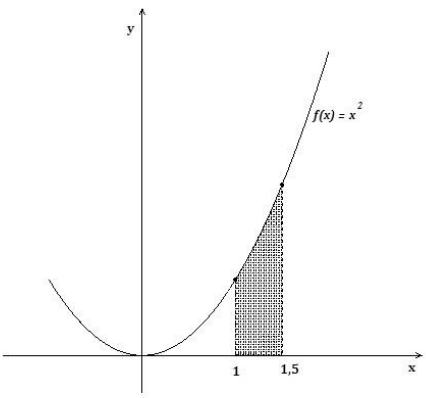
Exemplos de áreas sob curvas.



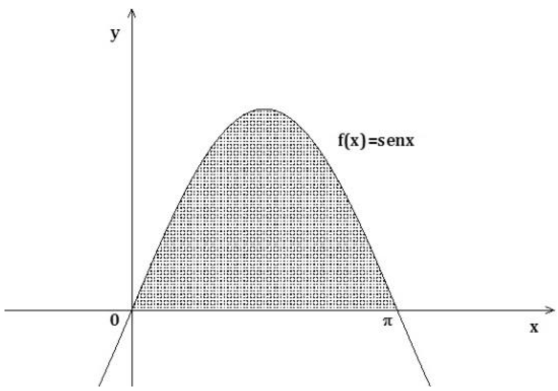
$A_0^1(x)$: *Área sob a curva* $y = x$ *entre* 0 *e* 1



$A_1^2(x)$: *Área sob a curva* $y = x$ *entre* 1 *e* 2



$A_1^{1,5}(x^2)$: *Área sob a curva* $y = x^2$ *entre* 1 *e* 1,5



$A_0^{\pi}(senx)$: *Área sob a curva* $y = senx$ *e entre* 0 *e* π

Definição 8.2

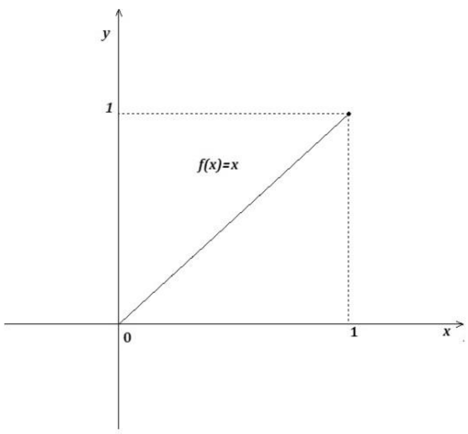
Seja A um conjunto do domínio de uma função f. Dizemos que f tem um ponto de *máximo absoluto* em A se existir $a \in A$, tal que $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in A$. O elemento a é chamado *ponto de máximo absoluto de f em A* e $f(a)$ é o *máximo absoluto de f em A*.

Definição 8.3

Seja A um conjunto do domínio de uma função f. Dizemos que f tem um ponto de *minimo absoluto* em A se existir $b \in A$, tal que $f(x) \geq f(b)$ para todo $x \in A$. O elemento b é chamado *ponto de mínimo absoluto de f em A* e $f(b)$ é o *mínimo absoluto de f em A*.

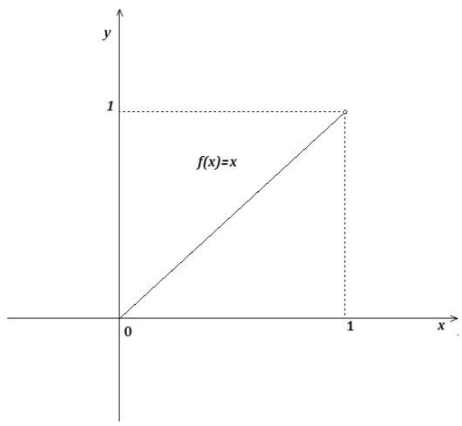
Exemplo 8.2

$a)\ f: [0,1] \rightarrow R, tal\ que\ f(x) = x$



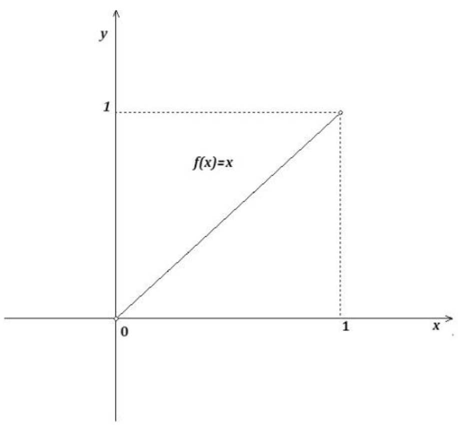
Mínimo absoluto em $x = 0$ e máximo absoluto em $x = 1$.

$b)\ f: [1,0[\rightarrow R, tal\ que\ f(x) = x$



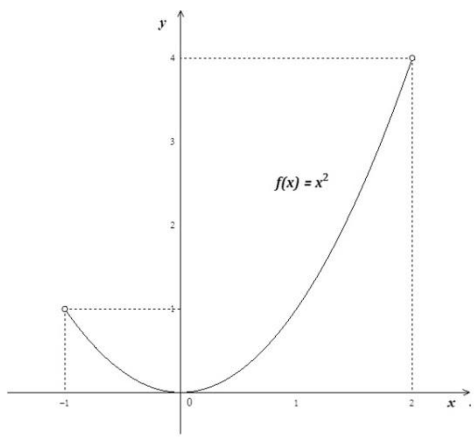
Mínimo absoluto em $x = 0$ e não tem máximo absoluto.

$c)\ f:]0,1[\rightarrow R, tal\ que\ f(x) = x$



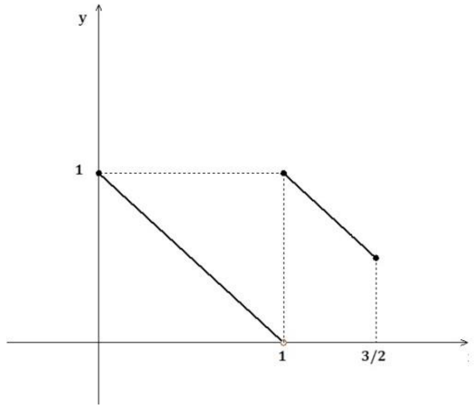
Não tem mínimo e nem máximo absolutos.

$d)\ f:]-1,2[\rightarrow R, tal\ que\ f(x) = x^2$



Mínimo absoluto em $x = 0$ e não tem máximo absoluto.

Exemplo 8.3



A função $f: [0, 3/2] \to R$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \leq x < 1 \\ -x+2, & 1 \leq x \leq 3/2 \end{cases}$$

cujo gráfico está exibido ao lado, tem máximo absoluto em $x = 0$ e em $x = 1$, mas não tem mínimo.

Os exemplos vistos nos indicam a necessidade de estabelecer condições que nos permitam decidir quando que uma função tem máximo absoluto e mínimo absoluto. Enunciaremos agora um teorema sobre isto, mas não o demonstraremos, pois a teoria apresentada neste texto não é suficiente para tal.

Teorema 8.1 (Teorema da Existência de Máximo e Mínimo Absolutos)

Se uma função f for contínua num intervalo fechado de extremos a e b $(a < b)$ então a função assume, neste intervalo, máximo e mínimo absolutos.

Exercício 8.1

Em cada função dada nos Exemplos 8.2 e 8.3 verifique a ocorrência das hipóteses do Teorema 8.1 e confronte as ocorrências ou não de máximos e de mínimos.

Exercício 8.2

Nas funções dadas a seguir, diga se ela tem máximo ou mínimo absoluto. Para os casos afirmativos indique: o máximo, o mínimo e os pontos de máximo ou de mínimo.

1) $y = x, em\ [1, 3]$

2) $y = 3, em\ (0, 2)$

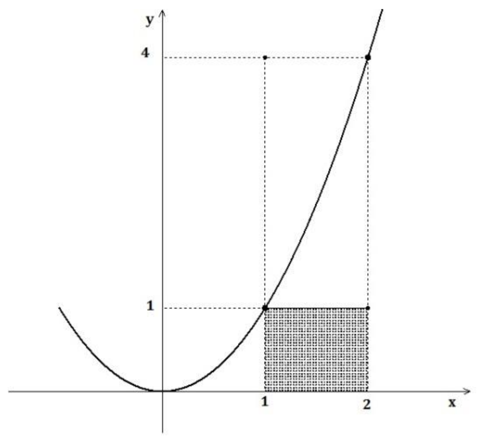
3) $y = \dfrac{1}{x}, para\ x > 0$

4) $y = x^3, em\ [-1,1]$

Agora temos conhecimentos básicos necessários para iniciar o estudo de cálculo de áreas. Começaremos com o exemplo a seguir.

Exemplo 8.4

Vamos obter um valor aproximado da área sob a curva $y = x^2$, entre 1 e 2. Para fazer isso iremos comparar dois triângulos, conforme exposto a seguir.

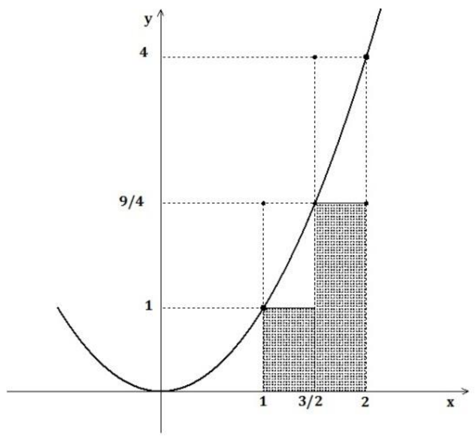


A função $y = x^2$, para $1 \leq x \leq 2$, tem um ponto de mínimo absoluto em $x = 1$ e um ponto de máximo absoluto em $x = 2$.

Notamos, então, que a área do retângulo de base 1 e altura $f(1)$ é menor do que a área sob a curva $y = x^2$, entre 1 e 2; esta, por sua vez, é menor do que a área do retângulo de base 1 e altura $f(2)$. Como a área do primeiro retângulo é 1 e a área do segundo é 4, podemos afirmar que:

$$1 \leq A_1^2(x^2) \leq 4.$$

Ao conseguir estabelecer que a área considerada é maior do que 1 e menor do que 4 podemos afirmar o seguinte: se atribuirmos a essa área qualquer valor entre 1 e 4 não cometeremos, na avaliação de seu valor, um erro maior do que 3. Podemos obter uma aproximação melhor? A resposta é afirmativa e, para obter isso, basta subdividir o intervalo [1,2] e considerar a área de novos retângulos. Na sequência, iremos dividir o intervalo [1,2] em duas partes iguais e considerar as áreas de quatro retângulos.



A função $y = x^2$, para $1 \leq x \leq 3/2$, tem ponto de mínimo absoluto em $x = 1$ e ponto de máximo absoluto em $x = 3/2$ e a função $y = x^2$, para $3/2 \leq x \leq 2$, tem mínimo absoluto no ponto $x = 3/2$ e ponto de máximo absoluto em $x = 2$.

Considerando os quatro retângulos com base no intervalo [1,2], podemos relacionar as suas áreas com a área sob a curva $y = x^2$, entre 1 e 2 da seguinte maneira:

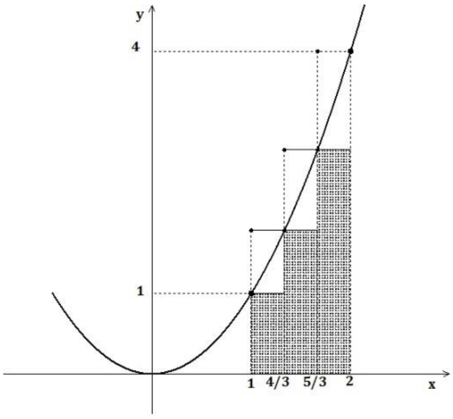
$$\frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f\left(\frac{3}{2}\right) \leq A_1^2(x^2) \leq \frac{1}{2}f\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}f(2)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{9}{8} \leq A_1^2(x^2) \leq \frac{9}{8} + 2$$

$$\frac{13}{8} \leq A_1^2(x^2) \leq \frac{25}{8}$$

$$1{,}625 \leq A_1^2(x^2) \leq 3{,}125$$

Neste caso se atribuirmos para $A_1^2(x^2)$ um valor entre 1,625 e 3,125 não cometeremos um erro superior a 1,5. Melhor aproximação poderá ser conseguida dividindo-se o intervalo [1,2] em três partes iguais e considerando-se as áreas de seis retângulos, como faremos a seguir.



O intervalo [1,2] foi dividido em três partes iguais e os subintervalos:

$$\left[1, \frac{4}{3}\right], \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right] \text{ e } \left[\frac{5}{3}, 2\right]$$

constituem as bases dos seis retângulos, conforme gráfico ao lado.

Considerando os máximos e mínimos absolutos da função $y = x^2$, restrita a cada subintervalo teremos:

$$\frac{1}{3}f(1) + \frac{1}{3}f\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{5}{3}\right) \leq A_1^2(x^2) \leq \frac{1}{3}f\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{1}{3}f(2)$$

$$\frac{1}{3} + \frac{16}{27} + \frac{25}{27} \leq A_1^2(x^2) \leq \frac{16}{27} + \frac{25}{27} + \frac{4}{3}$$

$$\frac{50}{27} \leq A_1^2(x^2) \leq \frac{77}{27}$$

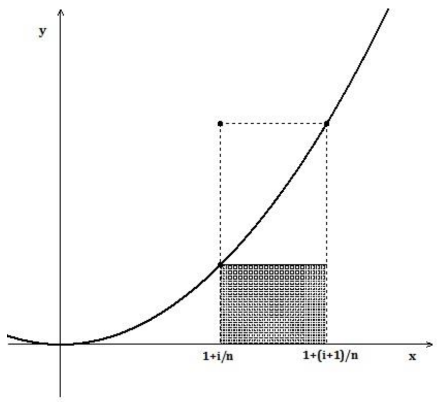
$$1{,}851851 \ldots \leq A_1^2(x^2) \leq 2{,}851851 \ldots$$

Neste último caso, qual seria o maior erro que poderíamos cometer ao escolher um valor para $A_1^2(x^2)$ entre as duas aproximações encontradas?

No processo que utilizamos para as aproximações do valor de $A_1^2(x^2)$ os retângulos que tem como altura o mínimo absoluto no intervalo considerado são denominados de *retângulos inscritos*. Em contrapartida, os retângulos que tem por altura o máximo absoluto são denominados de *retângulos circunscritos.* É fácil de observar que em cada passo do processo a soma das áreas dos retângulos inscritos aumenta, enquanto a soma das áreas dos retângulos circunscritos diminui.

Vamos agora subdividir o intervalo [1,2] em *n* subintervalos de mesmo comprimento através dos pontos:

$$1, 1+\frac{1}{n}, 1+\frac{2}{n}, \cdots, 1+\frac{i}{n}, \cdots, 1+\frac{n-1}{n}, 1+\frac{n}{n}\cdot$$



Observe que em cada subintervalo

$$\left[1+\frac{i}{n}, 1+\frac{i+1}{n}\right], \text{para } i=0,1,\cdots,(n-1)$$

a função considerada assume, como na figura ao lado, o mínimo absoluto e o máximo absoluto ocorrem, respectivamente, em

$$x=1+\frac{i}{n} \text{ e } x=1+\frac{i+1}{n}\cdot$$

Na construção do processo que faremos a seguir iremos tratar separadamente a soma das áreas dos retângulos inscritos e a soma das áreas dos retângulos circunscritos. Desta forma, para os retângulos inscritos, teremos:

$$\frac{1}{n}f(1)+\frac{1}{n}f\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n}f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\leq A_1^2(x^2)$$

ou

$$\frac{1}{n}\left[1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)^2\right]\leq A_1^2(x^2)\cdot$$

Desenvolvendo os quadrados, fica:

$$\frac{1}{n}\left[1+\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+\left(1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}\right)+\cdots+\left(1+\frac{2(n-1)}{n}+\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)\right]\leq A_1^2(x^2)\cdot$$

O primeiro termo da desigualdade anterior pode ser reagrupado da seguinte maneira:

$$\frac{1}{n}\left\{(1+1+\cdots+1)+\frac{2[1+2+\cdots+(n-1)]}{n}+\frac{[1+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2]}{n^2}\right\}\leq A_1^2(x^2)$$

ou

$$\frac{1}{n}\left\{n+\frac{2}{n}[1+2+\cdots+(n-1)]+\frac{1}{n^2}[1+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2]\right\}\leq A_1^2(x^2) \quad (2)$$

A desigualdade (2) pode ser consideravelmente simplificada através das seguintes identidades, que podem ser demonstradas pelo processo de *indução finita*:

$$\sum_{k=1}^{p} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + p = \frac{p(p+1)}{2} \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^{p} k^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + p^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} \quad (4)$$

Tomando-se as identidades (2) e (3), com $p = n - 1$ e substituindo em (2), teremos:

$$\frac{1}{n}\left[n + \frac{2}{n} \cdot \frac{(n-1)n}{2} + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right] \leq A_1^2(x^2)$$

que, simplificando e reduzindo os termos semelhantes, se reduz a:

$$\frac{14n^2 - 9n + 1}{6n^2} \leq A_1^2(x^2) \quad (5)$$

Com a soma das áreas dos retângulos circunscritos, podemos escrever a seguinte desigualdade:

$$A_1^2(x^2) \leq \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{n}{n}\right) \quad (6)$$

Procedendo-se de maneira similar ao que se fez antes, a desigualdade (6) passa a ter a seguinte expressão:

$$A_1^2(x^2) \leq \frac{14n^2 + 9n + 1}{6n^2} \quad (7)$$

Relacionado (5) e (7), teremos:

$$\frac{14n^2 - 9n + 1}{6n^2} \leq A_1^2(x^2) \leq \frac{14n^2 + 9n + 1}{6n^2} \qquad (8)$$

A relação (8) assegura que a área sob a curva $y = x^2$, entre 1 e 2 é um número que se encontra limitado inferiormente pela soma das áreas de n retângulos inscritos e, superiormente, pela soma de n retângulos circunscritos, onde n é um número natural qualquer e corresponde ao número de subdivisões do intervalo [1,2]. Observa-se facilmente que à medida que aumentamos *n,* menor ficará a diferença entre a soma das áreas dos retângulos circunscritos e a soma das áreas dos retângulos inscritos e, nesse procedimento, vai-se obtendo aproximações cada vez melhores para $A_1^2(x^2)$. É de se esperar que, num processo contínuo, ao fazer n tender para o infinito encontremos a área procurada.

Assim,

$$A_1^2(x^2) = \lim_{n\to\infty} \frac{14n^2 - 9n + 1}{6n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{14n^2 + 9n + 1}{6n^2} = \frac{7}{3}.$$

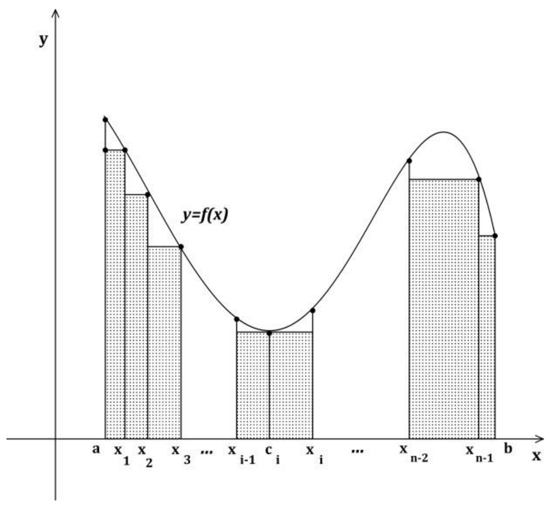
O processo visto pode ser generalizado para se calcular o valor da área sob uma curva definida pelo gráfico de uma função contínua, tendo por domínio um intervalo fechado. Para tanto, vamos considerar uma função f contínua e positiva em $[a, b]$. Para calcular a área sob a curva f entre a e b, usaremos apenas retângulos inscritos (o processo usando retângulos circunscritos é desenvolvido de maneira similar e se obtém o mesmo resultado final).

O processo se inicia pela subdivisão do intervalo $[a, b]$ em n partes, não necessariamente iguais, escolhendo-se $n + 1$ pontos da seguinte maneira:

$$a = x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_i \leq x_{i+1} \cdots \leq x_n = b$$

e, além disso, essa subdivisão do intervalo $[a, b]$ deve satisfazer a seguinte propriedade:

$$\Delta_{x_i} = x_{i+1} - x_i \text{ tende à zero quando } n \to \infty.$$



Em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2,3, \cdots, n$, pelo Teorema 8.1, existe um ponto c_i no qual a função $y = f(x)$ assume um mínimo absoluto. Iremos, portanto, considerar os retângulos de base $\Delta_{x_i} = x_i - x_{i-1}$ e altura $m_i = f(c_i)$, conforme figura ao lado.

A soma S das áreas dos retângulos inscritos, como na figura, nos dá uma aproximação da área sob a curva $y = f(x)$ entre a e b. Se aumentarmos o número de pontos na subdivisão do intervalo $[a, b]$, dentro das condições estabelecidas, obteremos uma melhor aproximação para o valor da área sob a curva *f*.

Para o caso de n subdivisões, este valor aproximado será dado por:

$$S_n = f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(c_i)(x_i - x_{i-1}) + \cdots + f(c_n)(x_n - x_{n-1})$$

ou seja,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i, \text{ onde } \Delta x_i = (x_i - x_{i-1}).$$

A área sob a curva $y = f(x)$ entre a e b será obtida fazendo $n \to \infty$, com $\Delta x_i \to 0$. Assim, teremos:

$$A_a^b(f) = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

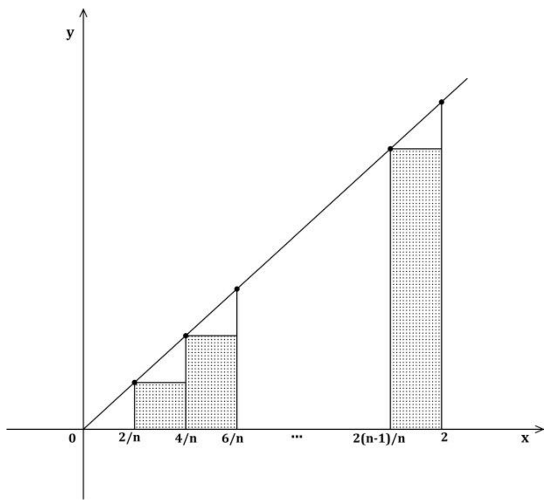
De modo semelhante poderíamos ter obtido a área considerando-se retângulos circunscritos, com base $\Delta x_i = (x_i - x_{i-1})$ e alturas $M_i = f(d_i)$, onde d_i é um ponto de máximo absoluto de f em $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2,3,\cdots,n$.

Pode-se mostrar que, sendo f contínua, existem e são iguais os seguintes limites:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

Este fato é de se esperar, pois, quando $n \to \infty$ e $\Delta x_i \to 0$, $c_i \to d_i$ e pela continuidade de $y = f(x)$, $m_i = f(c_i)$ tende para $M_i = f(d_i)$. Podemos usar qualquer um desses limites para calcular a área sob a curva $y = f(x)$ entre a e b. Para facilitar os cálculos podemos, ainda, considerar na subdivisão intervalos de mesmo comprimento.

Exemplo 8.5



Calcularemos, a seguir, a área sob a curva $y = x$ entre $x = 0$ e $x = 2$, usando retângulos inscritos (veja figura ao lado).

Dividindo o intervalo $[0,2]$ em n subintervalos de comprimentos iguais a

$$\Delta_{x_i} = \frac{2}{n}$$

teremos a subdivisão:

$$0 \le \frac{2}{n} \le \frac{4}{n} \le \cdots \le \frac{2(n-1)}{n} \le 2.$$

Em cada subintervalo, determinado pela subdivisão de $[0,2]$, o mínimo absoluto da função ocorre no extremo da esquerda, isto é, em $\left[\frac{2(i-1)}{n}, \frac{2i}{n}\right]$ o mínimo absoluto é $f\left(\frac{2(i-1)}{n}\right)$, para todo $i, i = 1,2.\cdots,n$. Assim, a soma das áreas dos retângulos inscritos é dada por:

$$S_n = f(0)\frac{2}{n} + f\left(\frac{2}{n}\right)\frac{2}{n} + f\left(\frac{4}{n}\right)\frac{2}{n} + \cdots + f\left(\frac{2(n-1)}{n}\right)\frac{2}{n}$$

$$S_n = 0.\frac{2}{n} + \frac{2}{n}\frac{2}{n} + \frac{4}{n}\frac{2}{n} + \cdots + \frac{2(n-1)}{n}\frac{2}{n}$$

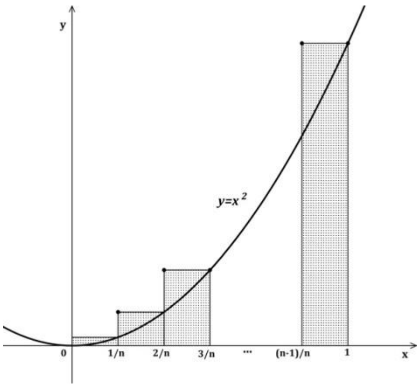
$$S_n = \frac{4}{n^2}[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)] = \frac{4}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}\cdot$$

Daí,

$$A_0^2(x) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}\right] = 2.$$

Esse resultado já era esperado, pois, a região é um triângulo de base 2 e altura 2.

Exemplo 8.6



Nesse exemplo, vamos calcular a

$$A_0^1(x^2).$$

Diferentemente do exemplo anterior usaremos, agora, os retângulos circunscritos (veja figura ao lado). Para isso o intervalo $[0,1]$ será dividido em n partes iguais a

$$\Delta_{x_i} = \frac{1}{n}$$

pela subdivisão:

$$0 \le \frac{1}{n} \le \frac{2}{n} \le \cdots \le \frac{n-1}{n} \le 1$$

Em cada subintervalo, determinado pela subdivisão de $[0,1]$, o máximo absoluto da função ocorre no extremo da direita, isto é, em $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ o máximo absoluto da função é $f\left(\frac{i}{n}\right)$, para todo $i, i = 1,2.\cdots, n$.

Neste caso, a soma das áreas dos retângulos circunscritos será da forma:

$$S_n = f\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} + f\left(\frac{2}{n}\right)\frac{1}{n} + f\left(\frac{3}{n}\right)\frac{1}{n}\cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$S_n = \frac{1}{n^2}\frac{1}{n} + \frac{4}{n^2}\frac{1}{n} + \frac{9}{n^2}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{n^2}{n^2}\frac{1}{n}$$

$$S_n = \frac{1}{n^3}(1 + 4 + 9 + \cdots + n^2) = \frac{1}{n^3}(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

e, portanto:

$$A_0^1(x^2) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}\,.$$

Exercício 8.3

Calcule as seguintes áreas:

1) $A_1^2(2x)$, usando retângulos inscritos.
2) $A_1^2(2x)$, usando retângulos circunscritos.
3) $A_0^2(x^2+1)$
4) $A_0^1(x^3)$. Para este caso use: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

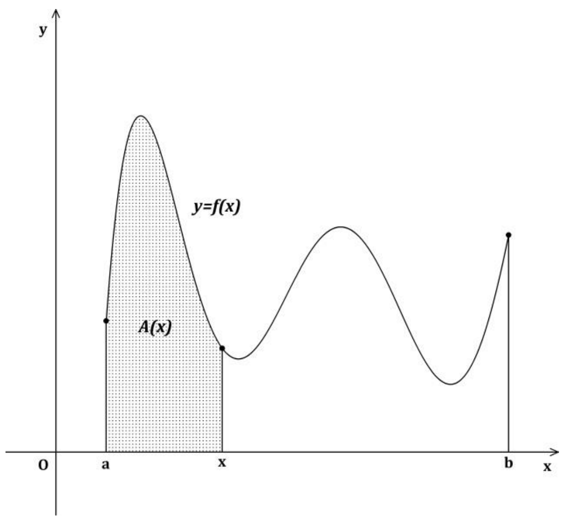
8.2 A Função Área

Os exemplos da seção anterior nos mostram que o processo de calcular áreas usando retângulos inscritos ou circunscritos, apesar de ser natural, é trabalhoso.

Agora veremos como simplificar o *cálculo de áreas* relacionando-o com as integrais indefinidas. Isto será feito no *Teorema 8.2*.

Consideremos então $a \le b$ e f uma função contínua em $[a,b]$ de forma que $f(x) \ge 0$, para todo x nesse intervalo. Consideremos a função A, definida em $[a,b]$, que a cada x associa a área sob a curva f entre a e x, ou seja:

$$A: [a,b] \to R, \text{dada por } A(x) = A_a^x(f(x))$$



A função A é chamada de *Função Área.* Observando o gráfico ao lado é bastante evidente a motivação para o nome dessa função.

O gráfico ajuda, também, na percepção de três propriedades da *Função Área* que decorrem como consequências imediatas de sua definição:

1) $A(a) = 0$;
2) $A(x) \ge 0$;
3) $A(x)$ cresce quando x cresce.

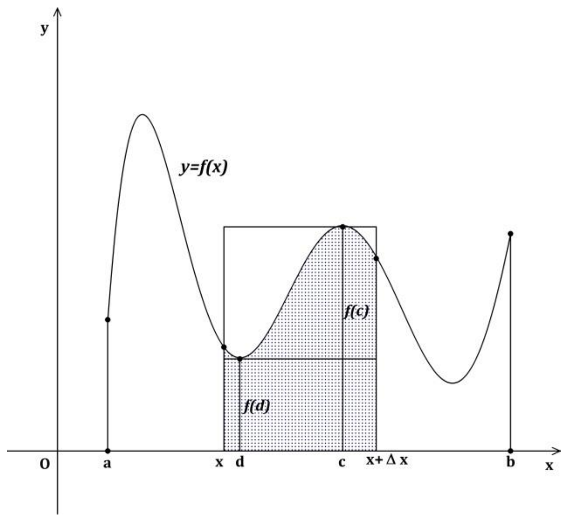
Teorema 8.2

A *Função Área* é derivável e $A'(x) = f(x)$, para todo x em $[a, b]$.

Demonstração

Para demonstrar que a *Função Área* possui derivada em um ponto x de $[a, b]$ é necessário demonstrar que as derivadas laterais dessa função no ponto x existem e são iguais, exceto para os extremos onde são consideradas apenas a derivada à direita em a e a derivada à esquerda em b. Para a derivada à direita em $x \in [a, b[$ consideremos o quociente:

$$\frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x}, onde\ \Delta x > 0\ e\ x + \Delta x \leq b.$$



Sendo $y = f(x)$ contínua no intervalo $[x, x + \Delta x]$, ela assume nesse intervalo máximo e mínimo absolutos. Sejam c e d os pontos de máximo e mínimo absolutos, respectivamente. Comparando as áreas dos retângulos de base Δx e alturas $f(c)$ e $f(d)$ com a área sob a curva f entre x e $x + \Delta x$, conforme figura ao lado, teremos:

$$f(d)\Delta x \leq A_x^{x+\Delta x}(f) \leq f(c)\Delta x$$

ou,

$$f(d)\Delta x \leq A(x + \Delta x) - A(x) \leq f(c)\Delta x.$$

Dividindo termo a termo por Δx, obteremos:

$$f(d) \leq \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} \leq f(c)$$

Quando $\Delta x \to 0$ teremos que $c \to x$ e $d \to x$ e, como f é contínua ocorrerá que $f(c) \to f(x)$ e, também, $f(d) \to f(x)$. Portanto:

$$A'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} = f(x)$$

ou seja, a derivada à direita de $A(x)$ em x existe e é igual a $f(x)$. De modo análogo demonstra-se que a função $A(x)$ possui derivada lateral à esquerda para todo x no intervalo $]a, b]$ e que é, também igual a $f(x)$ (essa demonstração deixamos a cargo do leitor). Desta forma, concluímos que $A(x)$ é derivável em $[a, b]$ e, além disso:

$$\frac{dA(x)}{dx} = f(x).$$

Como consequência deste teorema, podemos sistematizar o cálculo de área através do seguinte corolário:

Corolário 8.1

Seja $f: [a, b] \to R$ uma função contínua. Então a área sob a curva $y = f(x)$ entre a e b é dada por

$$A(b) = F(b) - F(a)$$

onde $F(x)$ é uma primitiva qualquer de $f(x)$.

Demonstração

Pelo Teorema 8.2, $A(x)$ é uma primitiva de $y = f(x)$, suposta contínua e positiva em $[a, b]$. Como $F(x)$ é outra primitiva de $y = f(x)$ segue, pelo Teorema 7.2, que $A(x) - F(x) = C$ para todo $x \in [a, b]$ e para algum $C \in R$. Assim,

$$A(a) - F(a) = C$$

e como $A(a) = 0$, concluímos que $C = -F(a)$, ou seja:

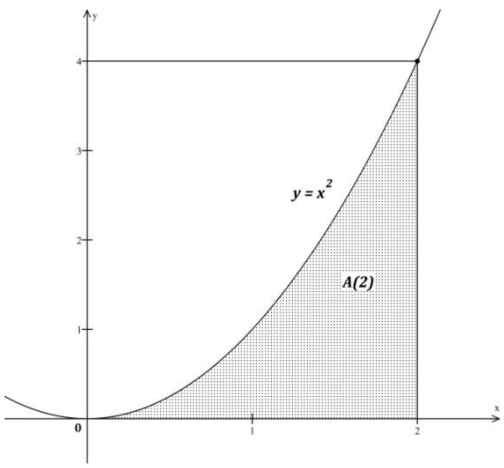
$$A(x) = F(x) - F(a), \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Daí, para $x = b$, teremos que:

$$A(b) = F(b) - F(a),$$

sendo $F(x)$ uma primitiva qualquer de $y = f(x)$.

Exemplo 8.7



Dada a função $y = x^2$, vamos encontrar:

$$A(2) = A_0^2(x^2)$$

Para isso, basta tomar uma primitiva de $y = x^2$ como, por exemplo

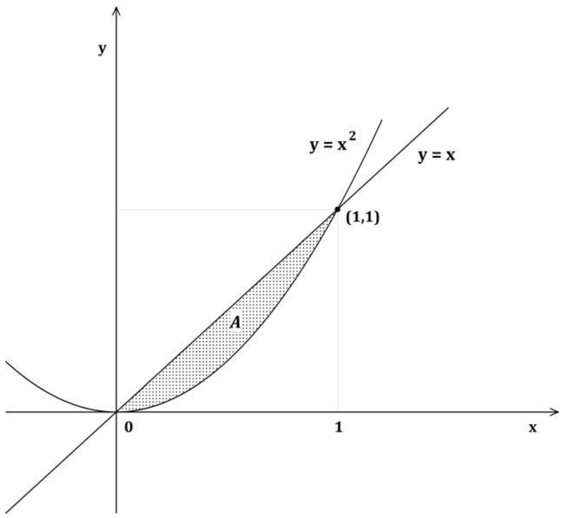
$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

e calcular: $A(2) = F(2) - F(0)$ ou

$$A(2) = \frac{8}{3}.$$

Exemplo 8.8

Calcular a área entre as curvas $y = x^2$ e $y = x$, cujo gráfico encontra-se a seguir.



O Teorema 8.2 e o seu Corolário 8.1 estabelecem o processo para o cálculo de área sob curva, isto é, a área de regiões do plano limitadas acima pelo gráfico de uma função contínua, abaixo pelo eixo horizontal e, aos lados pelas verticais que passam pelos extremos do intervalo onde a função encontra-se definida. Assim, quando a região da qual se pretende calcular a área não se enquadra nesse padrão torna-se necessário buscar meios indiretos, pelos quais o resultado procurado possa ser encontrado utilizando-se do processo de cálculo de áreas assegurado pelas proposições citadas.

O caso proposto, em geral, é designado por *área entre curvas* e, no presente caso, o cálculo da área é dado pela diferença entre a área sob a curva $y = x$ e a área sob a curva $y = x^2$ de 0 a 1.

Sendo assim, teremos:

$$A = A_1 - A_2$$

onde,

$$A_1 = A_0^1(x) = F_1(1) - F_1(0), \qquad sendo\ F_1(x) = \frac{x^2}{2}$$

e

$$A_2 = A_0^1(x^2) = F_2(1) - F_2(0), \qquad sendo\ F_2(x) = \frac{x^3}{3}$$

Deste modo:

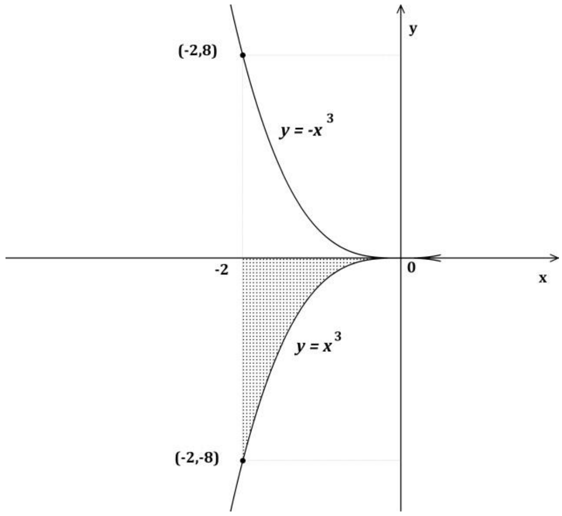
$$A = A_1 - A_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\,.$$

Observação:

O cálculo de *áreas entre curvas* exige, em geral, a determinação de interseções das curvas dadas e a decomposição ou composição da área dada como soma algébrica de áreas sob curvas, com os respectivos intervalos de definição das funções contínuas que entram no processo de cálculo da área requerida inicialmente. Este assunto será tratado com mais detalhes no Capítulo 11.

Exemplo 8.9

Nesse exemplo, vamos calcular a área limitada pelo gráfico da função $y = x^3$, pelo eixo x e pela reta vertical $x = -2$.



Esse é outro caso em que as hipóteses do Teorema 8.2 e, consequentemente, do Corolário 8.1 não estão integralmente contempladas, uma vez que a função dada não é positiva no intervalo $[-2,0]$. Mesmo assim podemos calcular a área indicada considerando, no lugar da função dada, a função $y = -x^3$, definida em $[-2,0]$. É fácil concluir que a área solicitada coincide com a área sob a curva $y = -x^3$ entre $x = -2$ e $x = 0$.

Assim,

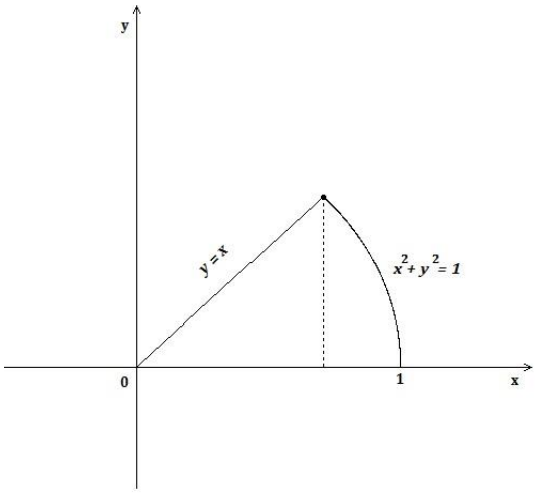
$$A_{-2}^{0}(x^3) = A_{-2}^{0}(-x^3) = F(0) - F(-2), \qquad sendo\ F(x) = -\frac{x^4}{4}\cdot$$

Daí, concluímos que:

$$A_{-2}^{0}(x^3) = 4.$$

Exemplo 8.10

Iremos agora calcular a área de um setor circular.



Particularmente, vamos considerar o setor circular, como no gráfico ao lado, definido pela reta $y = x$, pelo círculo de equação $x^2 + y^2 = 1$ e pelo eixo horizontal.

O exemplo estende o processo de calculo de área sob curva para tratar, como neste caso, o que denominamos de área limitada por curvas. O primeiro passo na solução do problema é determinar os pontos de interseção das curvas envolvidas na definição da região que se quer calcular a área. Nesse caso temos: a reta $y = x$, o círculo $x^2 + y^2 = 1$ (ou no caso a função $y = \sqrt{1 - x^2}$) e o eixo horizontal. As interseções com o eixo horizontal ocorrem em $x = 0$ e $x = 1$. Para encontrar a interseção das duas funções devemos substituir $y = x$ em $x^2 + y^2 = 1$; daí se obtém $2x^2 = 1$ e, consequentemente, $x = \sqrt{2}/2$, já que a raiz negativa não interessa ao caso em questão. O que se observa agora é que temos duas áreas sob curvas a considerar: a área sob a curva $y = x$ entre 0 e $\sqrt{2}/2$ e a área sob a curva $y = \sqrt{1 - x^2}$ entre $\sqrt{2}/2$ e 1. Assim a área em questão pode ser calculada por adição da seguinte maneira:

$$A_0^1 = A_0^{\sqrt{2}/2}(x) + A_{\sqrt{2}/2}^1\left(\sqrt{1 - x^2}\right)$$

Sabemos que uma primitiva de $y = x$ é

$$F(x) = \frac{x^2}{2}$$

e que uma primitiva de $y = \sqrt{1 - x^2}$ (como se encontra no Exemplo 7.7) é

$$G(x) = \frac{1}{2} arcsenx + \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2}$$

portanto,

$$A_0^1 = F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - F(0) + G(1) - G\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

e, daí:

$$A_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} arcsen(1) - \frac{1}{2} arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{2}}}{2}$$

ou

$$A_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

Exercício 8.4

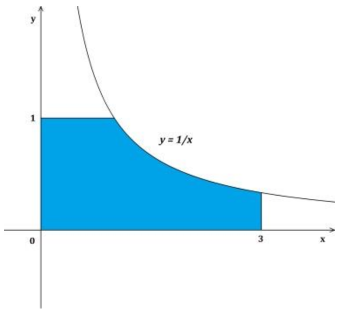
1) Calcule a área sob a curva dada, no intervalo indicado:

   A) $y = x^3$ de 0 a 2;
   B) $y = senx$ de 0 a π;
   C) $y = cos^2 x$ de 0 a $\pi/3$;
   D) $y = \sqrt{x}$ de 0 a 4.

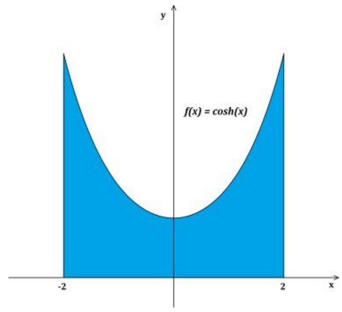
2) Calcule a área entre as curvas $y = senx$ e $y = cosx$ de 0 a $\pi/4$.
3) Calcule a área entre as curvas $y = x^3$ e $y = x^2$.
4) Calcule a área entre as curvas $y = x^3$ e $y = x$.
5) Calcule a área da elipse de semi-eixos a e b.
6) Calcule a área do quadrilátero de vértices: (0,0), (2,4), (3,1) e (4,0).

7) Nos itens dados a seguir, determine a área da região indicada:

A)

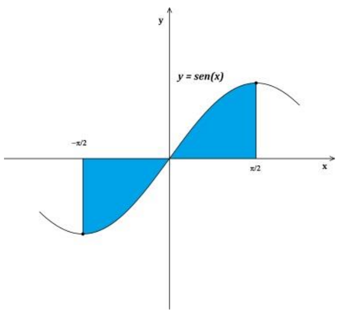


B)

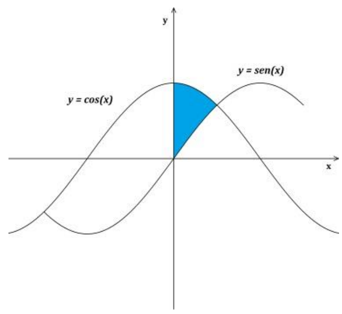


$$coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

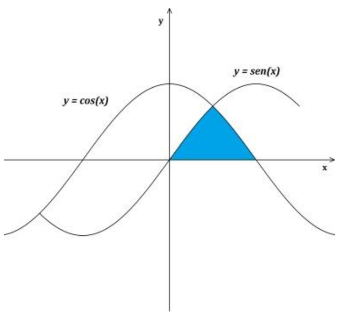
C)



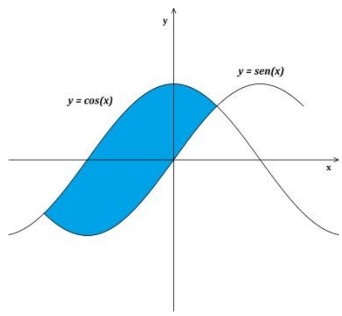
D)



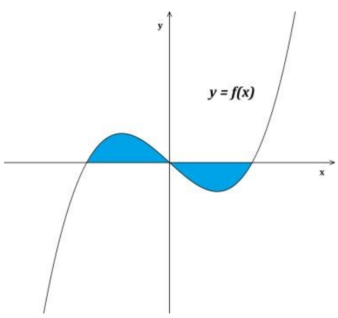
E)



F)

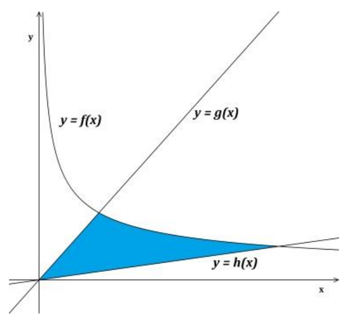


G)



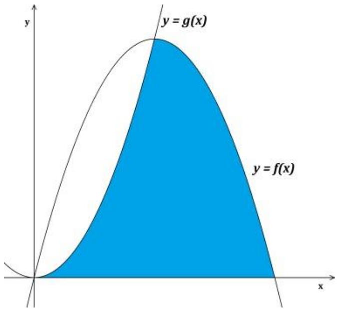
$f(x) = x^3 - x$

H)



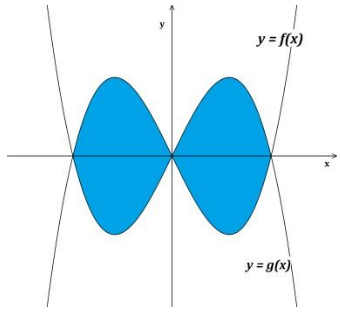
$f(x) = 1/\sqrt{x}\,, g(x) = x$ e $h(x) = x/8$

I)



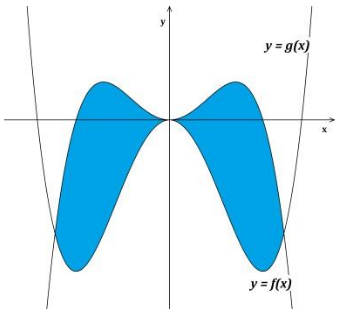
$g(x) = x^2$ e $f(x) = -x^2 + 4x$

J)



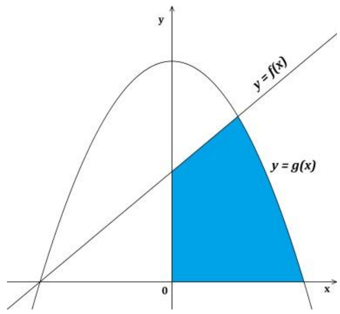
$f(x) = x^3 - 9x$ e $g(x) = 9x - x^3$

K)



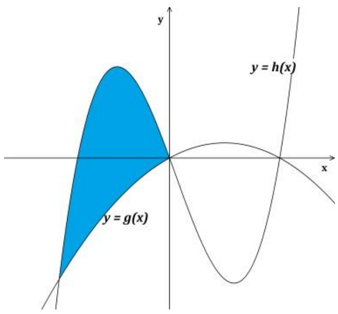
$f(x) = 2x^2 - x^4$ e $h(x) = x^4 - 4x^2$

L)



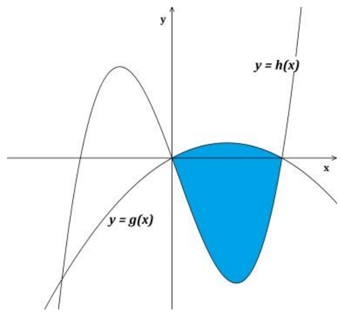
$f(x) = x + 2$ e $g(x) = 4 - x^2$

M)



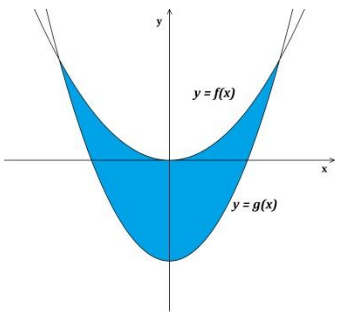
$g(x) = -x^2 + 2x$ e $h(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$

N)



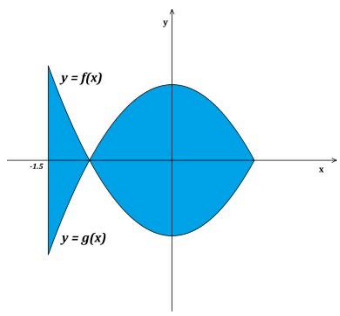
$g(x) = -x^2 + 2x$ e $h(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$

O)



$f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x^2 - 4$

P)



$f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = 1 - x^2$

8.3 Integral Definida

O processo de cálculo de áreas, exposto anteriormente, faz parte, em sua essência, dos esforços de um grande número de matemáticos e, também, de outros estudiosos não necessariamente matemáticos, que durante os séculos XVI, XVII e posteriores refundiram a matemática de gerações anteriores, ampliaram consideravelmente os conhecimentos até então desenvolvidos e lançaram as bases do conhecimento matemático e de outros ramos científicos do mundo contemporâneo.

Em sua formulação do *Cálculo Integral*, Leibniz, ao mostrar o método do cálculo da área sob a curva $y = f(x)$ entre a e b conforme o processo de limite que exibimos anteriormente definiu o valor dessa área como sendo *a integral definida de* $y = f(x)$ *de a até b,* introduzindo o seguinte símbolo:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_{x_i}, \quad x_{i-1} \le t_i \le x_i$$

a partir da subdivisão $a = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_{i-1} \le x_i \le \cdots \le x_{n-1} \le x_n = b$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e, além disso, com $f(x) \ge 0$, para todo $x \in [a, b]$.

Segundo *Courant e Robbins*[2], p.457, "*o símbolo* $'\int'$, *o* $'dx'$, *e o nome* $'integral'$ *foram introduzidos por Leibniz para sugerir a maneira pela qual o limite é obtido*".

Na concepção de Leibniz exige-se que a função $y = f(x)$ seja positiva em todo o intervalo $[a, b]$ para garantir, evidentemente, que não apareçam, no somatório, parcelas negativas e, portanto, destituídas de significados, já que cada parcela representa o valor de uma área. Entretanto, do ponto de vista processual, o limite se calcula sobre uma soma e não há nenhuma restrição analítica que comprometa a existência do limite, caso apareçam parcelas negativas nessa soma. A existência do limite está vinculada à continuidade da função e a uma particularidade na subdivisão do intervalo em questão, como veremos a seguir.

Comecemos por considerar uma função $y = f(x)$ contínua em $[a, b]$. Em seguida, vamos subdividir esse intervalo $[a, b]$, escolhendo $n + 1$ pontos, $x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, \cdots, x_n$, da seguinte maneira:

$$a = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_{i-1} \le x_i \cdots \le x_n = b$$

satisfazendo a seguinte propriedade:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \to 0, quando\ n \to \infty, para\ todo\ i = 1,2,\cdots, n.$$

Para todo $i = 1,2,\cdots, n$, vamos considerar os números $t_i, m_i,$ e M_i , sendo $x_{i-1} \le t_i \le x_i$ e os outros dois, respectivamente, o mínimo absoluto e o máximo absoluto de $y = f(x)$ no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Assim, teremos:

[2] Courant, R. e Robbins H. O que é Matemática?.Rio de Janeiro:Editora Ciência Moderna Ltda., 2000

$m_i \leq f(t_i) \leq M_i$, para todo $i = 1,2,\cdots,n$.

Multiplicando por Δ_{x_i} os termos dessa desigualdade, teremos:

$$m_i\Delta_{x_i} \leq f(t_i)\Delta_{x_i} \leq M_i\Delta_{x_i}.$$

Essa última desigualdade assegura-nos que:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta_{x_i} \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_{x_i} \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta_{x_i} \qquad (1)$$

A continuidade de $y = f(x)$, em $[a, b]$, e o fato de $\Delta x_i \to 0$, quando $n \to \infty$, nos garantem a existência e a igualdade dos limites da relação (1) e, além disso, o valor do limite não é alterado pela escolha de t_i, no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Dessa forma, podemos introduzir a seguinte definição:

Definição 8.4

Se $y = f(x)$ é contínua em $[a, b]$, denominamos de *Integral Definida* de $y = f(x)$ *em* $[a, b]$ o seguinte limite:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_{x_i}\,, \;\; x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$$

onde a soma é constituída a partir de qualquer subdivisão de $[a, b]$ com a propriedade de que $\Delta x_i \to 0$, quando $n \to \infty$.

Para representar a *Integral Definida* de $y = f(x)$ *em* $[a, b]$ empregamos a notação indicada por Leibniz, conforme citamos anteriormente:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_{x_i}.$$

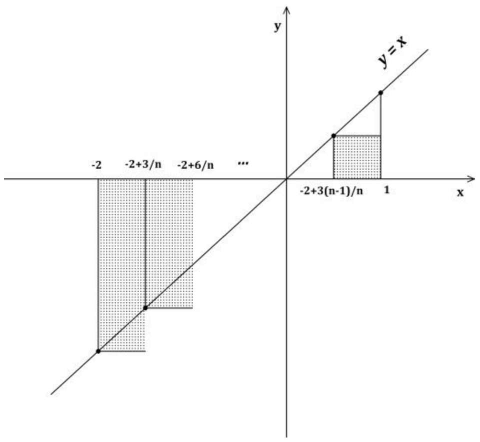
Decorre imediatamente da Definição 8.4 que se a função $y = f(x)$ for positiva em $[a, b]$ a integral definida coincide com a área sob curva f entre a e b.

A soma que aparece na definição da Integral Definida: $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_{x_i}$, é denominada *Soma de Riemann de f no intervalo* $[a, b]$, para a subdivisão: $a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$. O nome é em homenagem ao matemático alemão G. F. B. Riemann (1826 – 1866).

Em muitos problemas físicos ou matemáticos aparecem Somas de Riemann em que $\Delta x_i \to 0$. Questões como essas são resolvidas por integrais definidas.

Exemplo 8.11

Vamos calcular $\int_{-2}^{1} x dx$.



Para facilitar os cálculos, vamos escolher Δx_i iguais e $t_i = x_{i-1}$, para cada $[x_{i-1}, x_i]$.

Assim, vamos tomar, veja gráfico ao lado,

$$\Delta x_i = \frac{3}{n}$$

e, portanto,

$$x_0 = -2, x_1 = -2 + \frac{3}{n}, x_2 = -2 + \frac{6}{n}, \cdots x_n = 1.$$

Com a subdivisão de $[-2,1]$ como mostrada, teremos:

$$f(t_0) = f(-2) = -2$$

$$f(t_1) = f\left(-2 + \frac{3}{n}\right) = -2 + \frac{3}{n}$$

$$f(t_2) = f\left(-2 + \frac{6}{n}\right) = -2 + \frac{6}{n}$$

$$\vdots$$

$$f(t_n) = f\left(-2 + \frac{3(n-1)}{n}\right) = -2 + \frac{3(n-1)}{n}$$

Portanto, teremos a soma de Riemann:

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_{x_i} = \left[-2 + \left(-2 + \frac{3}{n}\right) + \left(-2 + \frac{6}{n}\right) + \cdots + \left(-2 + \frac{3(n-1)}{n}\right)\right] \cdot \frac{3}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_{x_i} = \left[-2n + \frac{3}{n}(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)\right] \cdot \frac{3}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_{x_i} = \left[-2n + \frac{3}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2}\right] \cdot \frac{3}{n} = -6 + \frac{9}{2} \cdot \frac{n-1}{n}$$

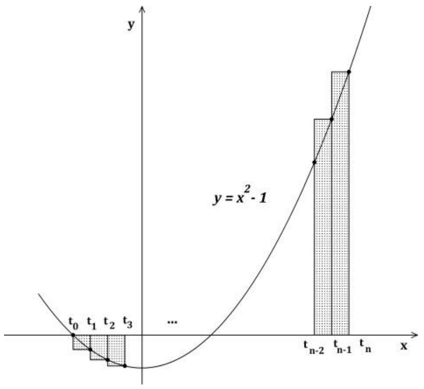
Finalmente:

$$\int_{-2}^{1} x dx = \lim_{n\to\infty} \left[-6 + \frac{9}{2} \cdot \frac{n-1}{n}\right] = -6 + \frac{9}{2} = -\frac{3}{2} \cdot$$

Exemplo 8.12

Neste exemplo, vamos calcular a

$$\int_{-1}^{2} (x^2 - 1)\, dx.$$



Nesse exemplo vamos considerar a seguinte subdivisão do intervalo $[-1,3]$:

$$x_0 = -1 \leq -1 + \frac{4}{n} \leq -1 + \frac{8}{n} \leq \cdots \leq 3 = x_n$$

e tomar para t_i o extremo superior do intervalo

$$[x_{i-1}, x_i].$$

O gráfico ao lado exibe as características da soma que iremos construir em seguida.

Em razão das considerações anteriores, teremos:

$$f(t_1) = f\left(-1 + \frac{4}{n}\right) = \left(-1 + \frac{4}{n}\right)^2 - 1 = -\frac{8}{n} + \frac{16}{n^2}$$

$$f(t_2) = f\left(-1 + \frac{8}{n}\right) = \left(-1 + \frac{8}{n}\right)^2 - 1 = -\frac{16}{n} + \frac{64}{n^2}$$

$$f(t_3) = f\left(-1 + \frac{12}{n}\right) = \left(-1 + \frac{12}{n}\right)^2 - 1 = -\frac{24}{n} + \frac{144}{n^2}$$

$$\vdots$$

$$f(t_n) = f\left(-1 + \frac{4n}{n}\right) = \left(-1 + \frac{4n}{n}\right)^2 - 1 = -\frac{8n}{n} + \frac{16n^2}{n^2}$$

e, portanto, teremos a seguinte Soma de Riemann:

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_{x_i} = \left[\left(-\frac{8}{n} + \frac{16}{n^2}\right) + \left(-\frac{16}{n} + \frac{64}{n^2}\right) + \left(-\frac{24}{n} + \frac{144}{n^2}\right) + \cdots + \left(-\frac{8n}{n} + \frac{16n^2}{n^2}\right)\right] \cdot \frac{4}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_{x_i} = \frac{4}{n} \cdot \left[\left(-\frac{8}{n} - \frac{16}{n} - \frac{24}{n} - \cdots - \frac{8n}{n}\right) + \left(\frac{16}{n^2} + \frac{64}{n^2} + \frac{144}{n^2} + \cdots + \frac{16n^2}{n^2}\right)\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_{x_i} = \frac{4}{n} \cdot \left[-\frac{8}{n} \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + n) + \frac{16}{n^2} \cdot (1 + 4 + 9 + \cdots + n^2)\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_{x_i} = \frac{4}{n} \cdot \left[-\frac{8}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{16}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_{x_i} = \frac{16n^2 + 48n + 32}{3n^2}.$$

Resultando que:

$$\int_{-1}^{3} (x^2 - 1)dx = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{16n^2 + 48n + 32}{3n^2}\right) = \frac{16}{3}.$$

Exercício 8.5

Calcule as integrais:

1) $\int_{-1}^{1} (x-1)\, dx$

2) $\int_{-2}^{3} x^2\, dx$

Definição 8.5

Se $a < b$, então $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Esta definição nos diz que, se trocarmos os limites de integração a integral definida troca de sinal.

8.3.1 Propriedades da Integral Definida

Nas propriedades enunciadas a seguir consideramos, f e g, funções contínuas nos intervalos fechados sugeridos pelos limites de integração.

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$;

2) $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$, $\forall a, b, c \in R$;

3) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, $\forall c \in R$;

4) $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

5) Se $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$ então $\int_a^b f(x)dx \geq 0$;

6) Se $f(x) \leq g(x)$ em $[a, b]$ então $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$;

7) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$, se $a \leq b$

8) Se $m \leq f(x) \leq M$, para todo x em $[a, b]$ então $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

A seguir serão desenvolvidas as demonstrações de algumas dessas propriedades:

1) Demonstração da Propriedade (2)

Como a propriedade é enunciada para qualquer sequência dos números *a, b* e *c*, iremos conduzir nossa demonstração para a sequência: $a \leq b \leq c$. As outras possibilidades são resolvidas de forma semelhante.

Como a existência da *integral definida* não depende da subdivisão do intervalo considerado, mas do fato das amplitudes Δ_{x_i} tender para zero, quando o número de subintervalos tende para infinito, vamos escolher uma partição do intervalo $[a, c]$ dividindo-o em $2n$ subintervalos, de modo que o *enésimo* ponto coincida com o ponto intermediário *b.* Assim, teremos a seguinte partição de $[a, c]$:

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b \leq x_{n+1} \leq \cdots \leq x_{2n} = c.$$

Evidentemente, $a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$ e $b \leq x_{n+1} \leq \cdots \leq x_{2n} = c$ são, respectivamente, partições dos intervalos $[a, b]$ e $[b, c]$, com a propriedade de que $\Delta_{x_i} \to 0$, quando $n \to \infty$.

Tomando t_i em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, podemos escrever:

$$\sum_{i=1}^{2n} f(t_i)\,\Delta_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta_{x_i} + \sum_{i=n+1}^{2n} f(t_i)\,\Delta_{x_i} \qquad (1)$$

Como a função $y = f(x)$ é contínua em $[a, c]$ suas restrições aos intervalos $[a, b]$ e $[b, c]$, também, são contínuas podemos garantir a existência dos limites das somas da relação (1) quando n tende ao infinito. Assim, aplicando o limite com $n \to \infty$ aos dois lados de (1), teremos:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2n} f(t_i)\,\Delta_{x_i} = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta_{x_i} + \sum_{i=n+1}^{2n} f(t_i)\,\Delta_{x_i}\right] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta_{x_i} + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^{2n} f(t_i)\,\Delta_{x_i}$$

Daí, finalmente, concluímos que:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx, \quad \text{para } a \leq b \leq c.$$

2) Demonstração da Propriedade (6)

Consideremos uma subdivisão qualquer do intervalo $[a, b]$ e as correspondentes Somas de Riemann obtidas dessa subdivisão:

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_{x_i} \ e \ \sum_{i=1}^{n} g(t_i)\Delta_{x_i}.$$

Como $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, teremos $f(t_i) \leq g(t_i)$ para cada $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ e, portanto, $f(t_i)\Delta_{x_i} \leq g(t_i)\Delta_{x_i}$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

Daí, teremos:

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_{x_i} \leq \sum_{i=1}^{n} g(t_i)\Delta_{x_i} \ \ e \ \ \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta_{x_i} \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(t_i)\Delta_{x_i}.$$

Portanto,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

3) Demonstração da Propriedade (7)

Sabemos pela definição de módulo que $f(x) \leq |f(x)|$ e que $-|f(x)| \leq f(x)$. Logo, pela Propriedade (6), podemos afirmar que:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \quad e \quad \int_a^b (-|f(x)|)dx \leq \int_a^b f(x)dx \qquad (a)$$

Além do mais, pela Propriedade (3), temos que:

$$\int_a^b (-|f(x)|)dx = -\int_a^b |f(x)|dx \qquad (b)$$

De (a) e (b), decorre que:

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

donde se conclui que

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Exercício 8.6

Demonstrar as propriedades (1), (3), (4), (5) e (8).

8.4 O Teorema Fundamental do Cálculo

Como se lê em *Courant e Robbins*[3] "a noção de integração, e até certo ponto de diferenciação, tinha sido razoavelmente bem desenvolvida antes do trabalho de Newton e Leibniz (p.499)". Segundo *Maor*[4], "a idéia de encontrar a área de uma determinada forma, considerando-a como a soma de um grande número de formas pequenas, originou-se entre os gregos e Fermat usou-a com sucesso na quadratura da família de curvas $y = x^n$. Mas foi o Teorema Fundamental do Cálculo – a relação inversa entre diferenciação e integração – que transformou o novo cálculo em uma ferramenta tão poderosa. O crédito por esta formulação pertence apenas a Newton e Leibniz (p.120)".

A Integral Definida é uma generalização do processo de Cálculo de Área. Na realidade, nos intervalos em que a função integrando, $y = f(x)$, é positiva a Integral Definida dessa função coincide com o valor da área sob a curva *f*, no intervalo considerado. No Teorema 8.2 foi demonstrado que a utilização da Integral Indefinida é fundamental para o cálculo de área, portanto, é de se esperar que para o caso da Integral Definida uma idêntica utilização possa ser feita. Esse fato se consolida através do Teorema Fundamental do Cálculo, que passa a ser o nosso objeto de estudo nesta seção.

Para atingirmos o objetivo a que nos propomos vamos considerar a função:

$$\varphi: [a,b] \to R, \text{tal que } \varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

onde *f* é uma função contínua em $[a,b]$.

É bom salientar que a continuidade de *f* em $[a,x]$, para todo $a < x \leq b$ garante a existência da integral anterior e, portanto, a existência de $\varphi(x)$, para $x \in [a,b]$ (por quê?)

Teorema 8.3 – Teorema Fundamental do Cálculo

A função

$$\varphi: [a,b] \to R, \text{tal que } \varphi(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

onde *f* é uma função contínua em $[a,b]$, é derivável em $[a,b]$ e $\varphi'(x) = f(x)$, para todo $x \in [a,b]$.

---

[3] Courant, R. e Robbins, H. – O que é Matemática. Editora Ciência Moderna Ltda. Rio de Janeiro. 2000.
[4] Maor, E. – e: A HISTÓRIA DE UM NÚMERO. Editora Record. Rio de Janeiro. 2003.

Demonstração:

Primeiramente iremos mostrar que $\varphi'_+(x)$ (derivada à direita de φ em x) é igual a $f(x)$, para todo $x \in [a, x[$. Para isso tomemos x no intervalo considerado e $\Delta x > 0$ de forma que tenhamos $x + \Delta x \leq b$. Nesse caso verificaremos a existência de

$$\varphi'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}.$$

Pela definição de φ, resulta que:

$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x}.$$

Usando a Definição 8.5 e a propriedade (2), teremos

$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt}{\Delta x} = \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}.$$

A função f sendo contínua em $[a, b]$, também, é contínua em $[x, x + \Delta x]$ e, portanto, podemos afirmar a existência de um máximo absoluto M e um mínimo absoluto m para f no intervalo $[x, x + \Delta x]$ e, pela Propriedade (8), teremos:

$$m(x + \Delta x - x) \leq \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \leq M(x + \Delta x - x)$$

$$m\Delta x \leq \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \leq M\Delta x$$

e, uma vez que $\Delta x > 0$, resulta

$$m \leq \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} \leq M.$$

Pela continuidade da função f teremos que $m \to f(x)$ e $M \to f(x)$, quando $\Delta x \to 0$ e, portanto, fica garantida a existência do

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}$$

e que, além disso, o valor desse limite é $f(x)$. Portanto, concluímos que a função φ possui derivada lateral à direita em x cujo valor é $f(x)$, ou seja:

$$\varphi'_+(x) = f(x).$$

O leitor pode, do mesmo modo, demonstrar que existe $\varphi'_-(x)$ e, ainda, que $\varphi'_-(x) = f(x)$ para todo $x \in]a,b]$. A igualdade das derivadas à esquerda e à direita em $x \in]a,b[$ garante, pelo que já vimos, que a função φ é derivável em $]a,b[$. Em $x = a$ e em $x = b$ consideram-se as derivadas laterais respectivas. Portanto, concluindo a demonstração, temos que a função φ é derivável em $[a,b]$ e $\varphi'(x) = f(x)$.

Corolário 8.2

Se f é contínua em $[a,b]$ e F uma primitiva de f nesse intervalo então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Demonstração:

Pelo teorema anterior φ é uma primitiva de f. Sendo F outra primitiva de f teremos, por consequência, que:

$\varphi(x) = F(x) + C$, para todo $x \in [a,b]$ e para alguma constante C real.

Como $\varphi(a) = \int_a^a f(x)dx = 0$, teremos $C = -F(a)$ e, portanto, $\varphi(x) = F(x) - F(a)$.

Assim:

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a), \qquad \forall x \in [a,b].$$

Fazendo $x = b$, teremos, finalmente, que:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Para facilidade de notação, é costume representar por

$$F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

conforme está apresentado no exemplo a seguir.

Exemplo 8.13

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

Observação:

A técnica *integração por partes*, utilizada no cálculo de integrais indefinidas, pode ser aplicada diretamente na integral definida, da seguinte maneira:

$$\int_a^b f(x)dx = uv|_a^b - \int_a^b vdu.$$

A utilização das técnicas de cálculo de integrais indefinidas que envolvem substituições no integrando, quando aplicadas às integrais definidas, merecem cuidados adicionais. Ao substituir a variável do integrando deve-se, também, proceder substituições convenientes nos limites de integração. Uma prática que adotamos, com frequência, neste texto é calcular, separadamente, a integral indefinida para se ter a primitiva da função dada na integral definida e, em seguida, proceder o cálculo da integral definida, conforme exemplo a seguir:

Exemplo 8.14

Para calcular a integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2 x\ cosxdx$$

encontraremos, primeiramente, a integral indefinida:

$$I = \int sen^2\, x\ cosxdx.$$

Para tal, façamos a substituição $u = senx$, $du = cosxdx$ e, assim, teremos:

$$I = \int sen^2\, x\ cosxdx = \int u^2\, du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{sen^3 x}{3} + C$$

Como precisamos apenas de uma primitiva de $f(x) = sen^2 x\ cox$ escolhemos, em geral, $C = 0$ e, portanto, teremos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2 x\ cosxdx = \left.\frac{sen^3 x}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Poderíamos ter aplicado a técnica de substituição diretamente na integral dada, tomando $u = senx$ e $du = cosxdx$. Entretanto, devemos notar que para $x = 0$, teremos $u = sen(0) = 0$, mas para $x = \pi/2, u = sen\frac{\pi}{2} = 1$. Assim, teremos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2x\, cosxdx = \int_0^1 u^2du = \left.\frac{u^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}\cdot$$

Outro cuidado que devemos ter ao aplicar as técnicas de integração para resolver uma integral definida se relaciona com o domínio e valores das funções envolvidas. Por exemplo, vamos supor que desejemos calcular a integral definida

$$I = \int_{-1}^0 \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

No Exemplo 7.7 foi visto que:

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}arcsenx + \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + C$$

e, assim, pelo Corolário 8.2, teremos

$$\int_{-1}^0 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \left[\frac{1}{2}arcsenx + \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2}\right]\Bigg|_{-1}^0 = \frac{1}{2}arcsen(0) - \frac{1}{2}arcsen(-1) \qquad (1)$$

As possíveis soluções para (1), são:

a) $arcsen(0) = k\pi, \quad k\ inteiro;$ b) $arcsen\,(-1) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k\ inteiro.$

Neste caso, $y = arcsenx$ não seria uma função (por quê?) e, portanto, torna-se necessário precisar, com rigor, quais valores devem ser considerados como solução da integral dada. No Capítulo 10, ao estudarmos as funções inversíveis e as respectivas inversas precisaremos com mais detalhe os aspectos apresentados aqui pela função inversa do seno. Neste momento, apenas adiantaremos que ficará estabelecido que o *conjunto imagem* da função arco-seno é dado pelo intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Restrita a este intervalo teremos:

a) $arcsen(0) = 0$ b) $arcsen\,(-1) = -\frac{\pi}{2}$

Concluindo, teremos o valor da integral:

$$\int_{-1}^0 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \left[\frac{1}{2}arcsenx + \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2}\right]\Bigg|_{-1}^0 = \frac{1}{2}arcsen(0) - \frac{1}{2}arcsen(-1) = \frac{\pi}{2}.$$

De forma semelhante ao considerado no exemplo anterior para a função *arco seno*, estabelecemos para as demais *funções trigonométricas inversas* os seguintes conjuntos imagens:

1) O conjunto imagem de $arccosx$ é o intervalo $[0, \pi]$;
2) O conjunto imagem do $arctgx$ é o intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$;
3) O conjunto imagem do $arcsecx$ é dado pela união $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Exemplo 8.15

Calcular a integral: $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx.$

Uma vez que o estudo da *função logaritmo natural* será feito no Capítulo 10, estabelecemos anteriormente que

$$\int \frac{1}{x} dx = lnx + C, \ \ x > 0$$

e, portanto, não se aplica, no formato que está, à integral definida que se pretendente calcular, uma vez que o intervalo de definição dessa integral envolve valores negativos. Por outro lado, a função $F(x) = \ln(-x)$, para $x < 0$, está bem definida e, além disso, usando a *regra da cadeia*, temos:

$$F'(x) = \frac{1}{-x}\frac{d(-x)}{dx} = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}\cdot$$

Assim, $F(x) = \ln(-x)$, com $x < 0$ e, também, uma primitiva de $f(x) = 1/x$ e, portanto,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C, \qquad x < 0.$$

Voltando à integral definida dada, teremos:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx = \ln(-x)|_{-2}^{-1} = ln1 - ln2 = -ln2.$$

O que foi desenvolvido nesse exemplo justifica o fato de aparecer em várias tabelas de integrais a fórmula:

$$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + C, \qquad x \neq 0.$$

Exemplo 8.16

Calcular a integral: $\int_{-1}^{2} |x|\, dx.$

A função $f(x) = |x|, x \in R$ é definida por duas leis de formação:

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

e, nesse caso, a primitiva de f e, também, definida por duas leis de formação:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, & x > 0 \\ -\dfrac{x^2}{2}, & x < 0 \end{cases}$$

Podemos, então, usando a *Propriedade 2*, podemos concluir que:

$$\int_{-1}^{2} |x| dx = \int_{-1}^{0} |x| dx + \int_{0}^{2} |x| dx = \left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{2} = \frac{5}{2}.$$

Exercício 8.7

Calcular as integrais:

1) $\int_{1}^{3} \frac{x^2+1}{x^2} dx$

2) $\int_{0}^{\pi} sen^2 x cos 3x\, dx$

3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^2 x\, dx$

4) $\int_{0}^{1} e^x cos x\, dx$

5) $\int_{0}^{1} x^3 \sqrt{1-x^2}\, dx$

6) $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x^3+x}$

7) $\int_{-\pi}^{\pi} sen x cos x\, dx$

8) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} tg x\, dx$

9) $\int_{0}^{\pi} \sqrt{sen^2 x cos^2 x}\, dx$

10) $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} sec x\, dx$

8.5 Integrais Impróprias

Ao estabelecer o conceito de *Integral Definida*, a exemplo do que tínhamos feito para *Área sob Curva*, o fizemos apenas para funções contínuas num intervalo fechado. Entretanto, ao proceder assim, deixamos à margem de considerações um número bem grande de funções para as quais os dois conceitos anteriores podem, perfeitamente, serem estendidos. Analisaremos, a partir de agora, algumas situações que permitem a extensão daqueles conceitos fazendo uso, inicialmente, dos conhecimentos a cerca do cálculo de áreas sob curva. Para exemplificar, tomemos a seguinte função:

$$f(x) = x^2, \qquad 1 < x \leq 2.$$

Embora sendo $y = f(x)$ contínua no intervalo dado, o conceito de *área sob curva* (Definição 8.1) não pode ser aplicado uma vez que a função dada não está definida num intervalo fechado. Mas observe que tomando α entre um e dois, isto é, $1 < \alpha \leq 2$, a área sob a curva $f(x) = x^2$ de α até dois está bem definida (Fig. A).

Como o valor de α foi escolhido arbitrariamente no intervalo $]1,2]$, nada impedirá de toma-lo o mais próximo de 1 quanto queiramos. Vale dizer que está implícita, neste fato, a noção de limite e, assim, podemos definir para o caso em questão o seguinte:

$$A_1^2(x^2) = \lim_{\alpha \to 1^+} A_\alpha^2(x^2).$$

Como

$$A_\alpha^2(x^2) = \int_\alpha^2 x^2\, dx,$$

teremos:

$$A_1^2(x^2) = \lim_{\alpha \to 1^+} \int_\alpha^2 x^2\, dx = \lim_{\alpha \to 1^+} \left(\frac{x^3}{3} \bigg|_\alpha^2 \right) = \lim_{\alpha \to 1^+} \left(\frac{8}{3} - \frac{\alpha^3}{3} \right) = \frac{7}{3}.$$

O resultado encontrado é o valor da área assinalada na Fig. B.

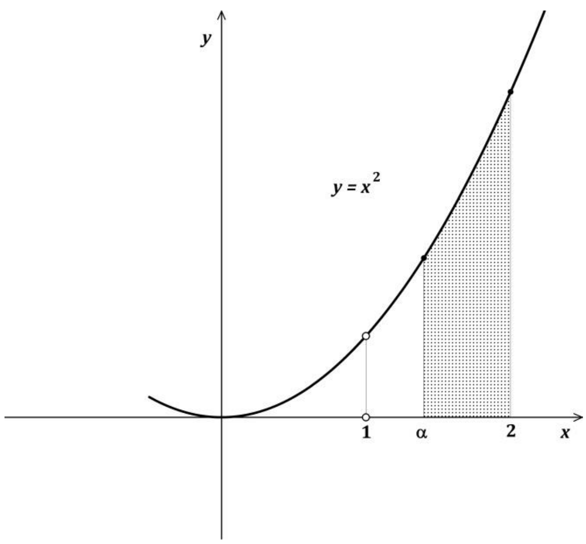


Fig. A

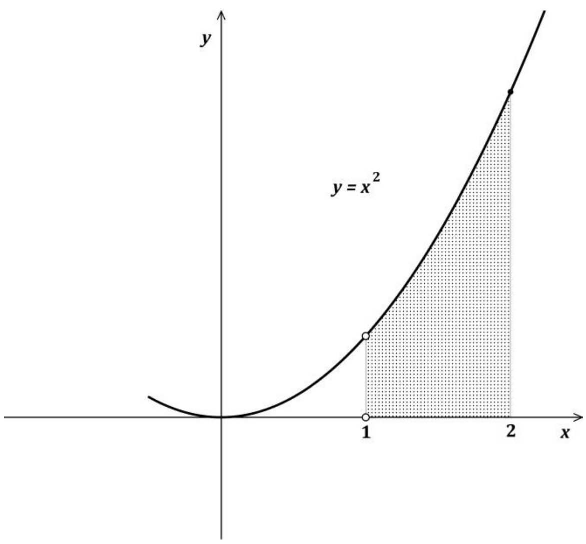


Fig. B

O exemplo visto sugere uma forma de se estender o conceito de *Área de área sob curva* ou, mais geral, o de *Integral Definida* para funções contínuas em intervalos não fechados. Essas integrais são denominadas *Integrais Impróprias*. Um fato importante a ser observado é que a forma sugerida pelo exemplo envolve a existência de um limite. Portanto, torna-se necessário a seguinte definição:

Definição 8.6

Seja $y = f(x)$ uma função contínua em $]a, b]$ e α um número satisfazendo a condição $a < \alpha \leq b$. Nessas condições, se existir o limite:

$$\lim_{\alpha \to a_+} \int_\alpha^b f(x)dx$$

então existirá a *Integral Imprópria* de $y = f(x)$ de a até b, denotada por

$$\int_a^b f(x)dx,$$

e, além disso

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \to a_+} \int_\alpha^b f(x)dx.$$

Quando a *Integral Imprópria* existe dizemos, também, que ela é *Convergente*. Em caso contrário dizemos que a *Integral Imprópria* é *Divergente.* Definições similares à Definição 8.6 podem ser formuladas para funções contínuas em intervalos da forma $[a, b[$ e $]a, b[$, assim como para intervalos nos quais um dos extremos, ou os dois, forem infinitos. Para o caso em que a função está definida num intervalo aberto, seja de extremos finitos ou não, deve-se tomar um cuidado especial, como o exemplo a seguir irá esclarecer.

Exemplo 8.17

Dada a função $f(x) = x^2 + 1$, definida no intervalo $]1,3[$, calcular a integral imprópria de 1 até 3.

A solução, para casos como esses, envolve a escolha de um valor qualquer no intervalo $]1,3[$ e o cálculo da integral imprópria como soma de duas outras integrais, também, impróprias.

Para tanto, seja c um número tal que $1 < c < 3$ e, assim, teremos:

$$\int_1^3 (x^2 + 1)dx = \int_1^c (x^2 + 1)\,dx + \int_c^3 (x^2 + 1)\,dx.$$

As integrais do segundo membro da igualdade anterior são ambas impróprias, sendo a primeira referente ao intervalo $]1, c]$ e a segunda ao intervalo $[c, 3[$. Como a escolha de c é livre podemos, por exemplo, tomar $c = 2$ e, assim, teremos:

$$\int_1^3 (x^2+1)dx = \int_1^2 (x^2+1)\,dx + \int_2^3 (x^2+1)\,dx.$$

ou

$$\int_1^3 (x^2+1)dx = \lim_{\alpha\to 1^+} \int_\alpha^2 (x^2+1)dx + \lim_{\beta\to 3^-} \int_2^\beta (x^2+1)\,dx$$

daí

$$\int_1^3 (x^2+1)dx = \lim_{\alpha\to 1^+} \left[\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_\alpha^2\right] + \lim_{\beta\to 3^-} \left[\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_2^\beta\right] = \lim_{\alpha\to 1^+} \left(\frac{14}{3} - \frac{\alpha^3+3\alpha}{3}\right) + \lim_{\beta\to 3^-} \left(\frac{\beta^3+3\beta}{3} - \frac{14}{3}\right)$$

e, finalmente

$$\int_1^3 (x^2+1)dx = \left(\frac{14}{3} - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{36}{3} - \frac{14}{3}\right) = \frac{32}{3}\cdot$$

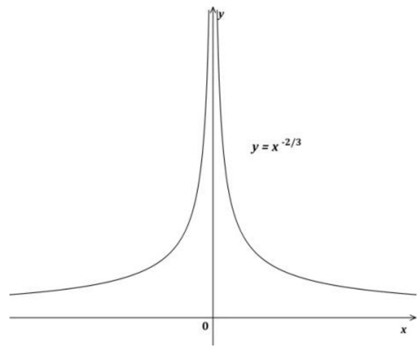
Com este novo conceito de integral, o cálculo de área fica notavelmente enriquecido. Apresentaremos a seguir alguns exemplos bastante interessantes a respeito do assunto.

Exemplo 8.18

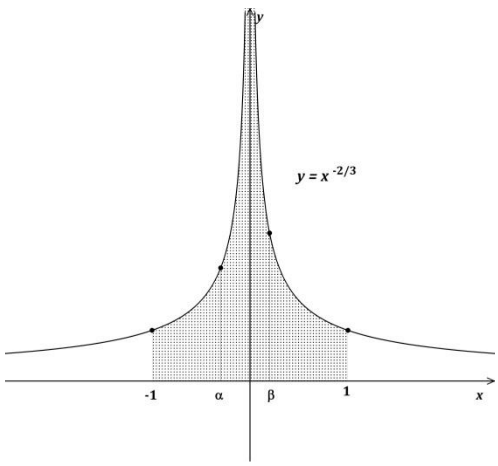
A função

$$f(x) = \frac{1}{x^{2/3}}$$

é contínua para todo $x \neq 0$ e quando x se aproxima de zero os valores de $f(x)$ crescem arbitrariamente. O seu gráfico é o da figura ao lado.



Tomemos um intervalo contendo zero, por exemplo, $[-1,1]$ e consideremos a região compreendida pelo eixo x e pelas verticais passando por -1 e 1, conforme figura a seguir:



A pergunta que surge é a seguinte: será que a região assinalada possui área?

Para verificar, tomemos os valores α e β próximos de zero, conforme está na figura e vamos calcular a soma

$$\int_{-1}^{\alpha} x^{-2/3}dx + \int_{\beta}^{1} x^{-2/3}dx.$$

É claro que a primeira integral nos dá a área sob a curva $f(x) = x^{-2/3}$, de -1 a α e, a segunda, a área sob a mesma curva de β a 1. Assim, existindo os limites, a área sob a curva $f(x) = x^{-2/3}$ de -1 a 1 será dada por:

$$A_{-1}^{1}\left(x^{-2/3}\right) = \lim_{\alpha\to 0^-}\int_{-1}^{\alpha} x^{-2/3}dx + \lim_{\beta\to 0^+}\int_{\beta}^{1} x^{-2/3}dx.$$

Como

$$\lim_{\alpha\to 0^-}\int_{-1}^{\alpha} x^{-2/3}dx = \lim_{\alpha\to 0^-}\left(3x^{1/3}\Big|_{-1}^{\alpha}\right) = \lim_{\alpha\to 0^-}\left(3\alpha^{1/3}+3\right) = 3$$

e

$$\lim_{\beta\to 0^+}\int_{\beta}^{1} x^{-2/3}dx = \lim_{\beta\to 0^+}\left(3x^{1/3}\Big|_{\beta}^{1}\right) = \lim_{\alpha\to 0^-}\left(3-3\beta^{1/3}\right) = 3$$

teremos, portanto, que a região assinalada possui área e a sua medida é dada por:

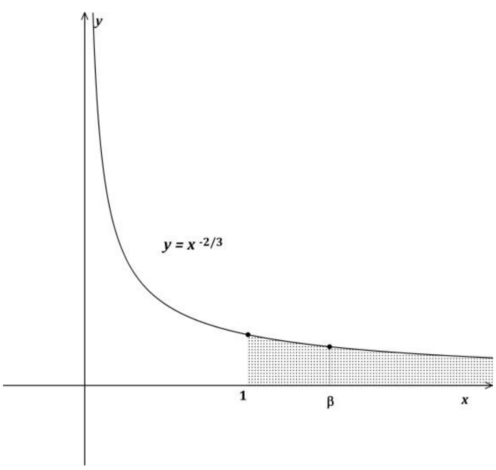
$$A_{-1}^{1}\left(x^{-2/3}\right) = 6.$$

Exemplo 8.19

Para esse exemplo, vamos considerar a restrição da função do exemplo anterior definida por:

$$g:]0,\infty[\to R \ tal\ que\ g(x) = x^{-2/3}\ .$$

Para essa função vamos considerar a região compreendida pela curva, o eixo x e a vertical passando por $x = 1$, conforme se encontra assinalada na figura a seguir. Essa região possui área?



Ao indagar a respeito da existência da área da região assinalada, na figura ao lado, estaremos indagando da convergência da integral imprópria:

$$\int_{1}^{\infty} x^{-2/3}\, dx.$$

Entretanto,

$$\int_1^{\infty} x^{-2/3}\,dx = \lim_{\beta\to\infty}\int_1^{\beta} x^{-2/3}\,dx = \lim_{\beta\to\infty}\left(3x^{1/3}\Big|_1^{\beta}\right) = \lim_{\beta\to\infty}\left(3\beta^{1/3} - 3\right)\cdot$$

Logo a integral imprópria é divergente e, consequentemente, a região assinalada não possui área.

Exemplo 8.20

Consideremos as funções

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \;\text{ e }\; g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$$

ambas definidas para $x \neq 0$.

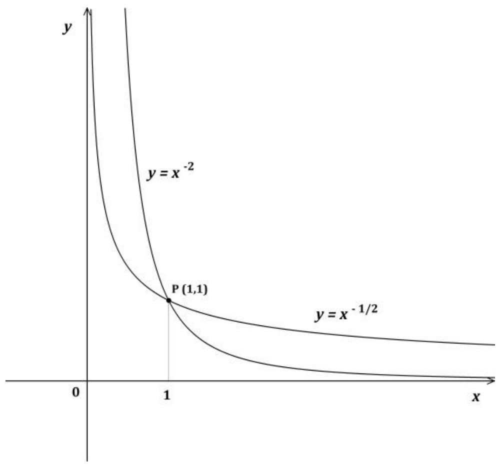
Os gráficos dessas funções, exibidos a seguir, são muito parecidos com o gráfico da função dada no Exemplo 8.19. Restringiremos o estudo apenas aos valores de x maiores do que zero (como no caso do Exemplo 8.19).

Inicialmente, observemos que:

1) se $0 < x < 1$, teremos: $x^2 < x^{1/2}$ e, daí $\dfrac{1}{x^{1/2}} < \dfrac{1}{x^2}$;

2) se $x > 1$, teremos: $x^2 > x^{1/2}$ e, daí $\dfrac{1}{x^{1/2}} > \dfrac{1}{x^2}\cdot$

É claro que para $x = 1$ as funções possuem o mesmo valor. Deste modo, colocados no mesmo sistema de eixos, seus gráficos estão exibidos ao lado.

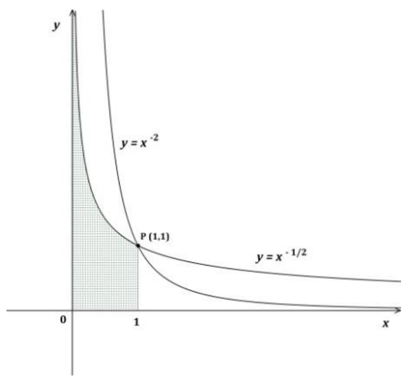


No gráfico dado podemos destacar as seguintes regiões:

Região 1: compreendida pela curva

$$y = x^{-1/2}$$

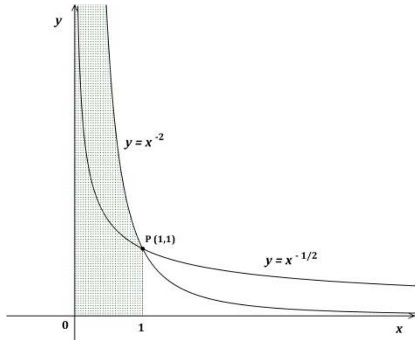
o eixo y, o eixo x e a vertical $x = 1$.



Região 2: compreendida pela curva

$$y = x^{-2}$$

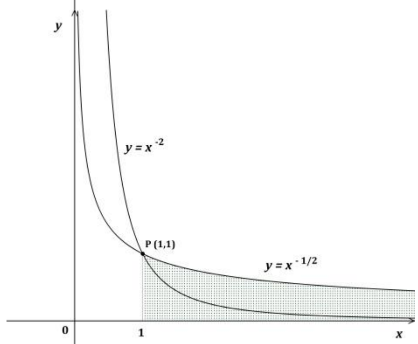
o eixo y, o eixo x e a vertical $x = 1$.



Região 3: compreendida pela curva

$$y = x^{-1/2}$$

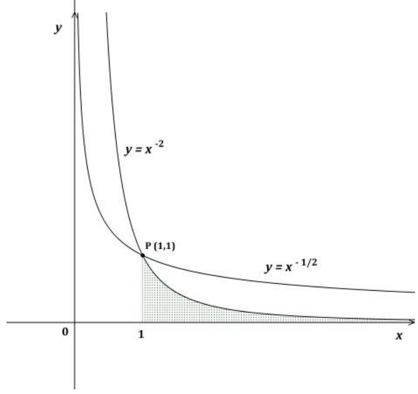
o eixo x e limitada à esquerda pela vertical $x = 1$.



Região 4: compreendida pela curva

$$y = x^{-2}$$

o eixo x e limitada à esquerda pela vertical $x = 1$.



O que podemos dizer das áreas dessas regiões?

Como foi visto no Exemplo 8.18, a existência ou não das áreas dessas regiões está diretamente ligada à convergência ou divergência das seguintes integrais impróprias:

$$\int_0^1 x^{-1/2}dx, \qquad \int_0^1 x^{-2}dx, \qquad \int_1^\infty x^{-1/2}dx \qquad \text{e} \qquad \int_1^\infty x^{-2}dx$$

Escolhendo α e β satisfazendo as condições $0 < \alpha < 1$ e $\beta > 1$, teremos:

1) $\int_0^1 x^{-1/2}dx = \lim\limits_{\alpha\to 0^+}\int_\alpha^1 x^{-1/2}dx = \lim\limits_{\alpha\to 0^+}\left(2x^{1/2}\Big|_\alpha^1\right) = \lim\limits_{\alpha\to 0^+}\left(2 - 2\alpha^{1/2}\right) = 2,$ portanto, convergente;

2) $\int_0^1 x^{-2}dx = \lim\limits_{\alpha\to 0^+}\int_\alpha^1 x^{-2}dx = \lim\limits_{\alpha\to 0^+}\left(-x^{-1}\big|_\alpha^1\right) = \lim\limits_{\alpha\to 0^+}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) = \infty,$ portanto, divergente;

3) $\int_1^{\infty} x^{-1/2}dx = \lim_{\beta\to\infty}\int_1^{\beta} x^{-1/2}dx = \lim_{\beta\to\infty}\left(2x^{1/2}\Big|_1^{\beta}\right) = \lim_{\beta\to\infty}\left(2\beta^{1/2}-2\right) = \infty,$ portanto, divergente;

4) $\int_1^{\infty} x^{-2}dx = \lim_{\beta\to\infty}\int_1^{\beta} x^{-2}dx = \lim_{\beta\to\infty}\left(-x^{-1}\Big|_1^{\beta}\right) = \lim_{\beta\to\infty}\left(1-\frac{1}{\beta}\right) = 1,$ portanto, convergente.

Como conclusão temos que as regiões 2 e 3 não possuem área, enquanto as áreas das regiões 1 e 2 existem e valem, respectivamente:

$$A_0^1\left(x^{-1/2}\right) = 2 \text{ e } A_1^{\infty}\left(x^{-2}\right) = 1.$$

Os exemplos 8.18, 8.19 e 8.20, além de apresentarem um estudo interessante acerca de áreas, tratam de funções que, embora apresentem gráficos parecidos, possuem comportamentos bem distintos. Na realidade elas fazem parte de um conjunto de funções bastante peculiar para o estudo de convergência de integrais impróprias. As funções desse conjunto são da forma $f(x) = x^{-p}$, onde p é um número positivo. Os casos vistos foram para $p = 2/3$, $p = 1/2$ e $p = 2$. Quando $p = 1$, temos a função $f(x) = x^{-1}$. Essa função apresenta uma situação diferenciada em relação às demais que ficará esclarecida no estudo que faremos em seguida. Antes, deixamos como exercício para o leitor a demonstração de que são *divergentes* as duas integrais impróprias:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx \quad \text{e} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx.$$

Em vista dos valores de x e de p as funções da forma $f(x) = x^{-p}$ podem ser classificadas do seguinte modo:

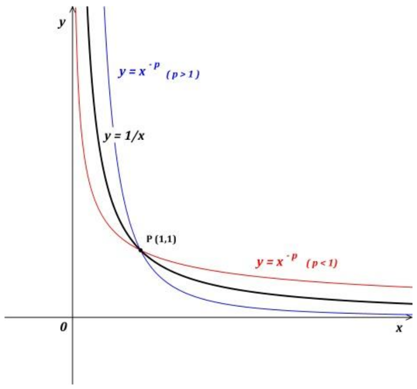
1) se $p < 1$, teremos:

a) para $0 < x < 1$ $\quad \frac{1}{x^p} < \frac{1}{x}$; b) para $x > 1$ $\quad \frac{1}{x^p} > \frac{1}{x}\cdot$

2) se $p > 1$, teremos:

a) para $0 < x < 1$ $\quad \frac{1}{x^p} > \frac{1}{x}$; b) para $x > 1$ $\quad \frac{1}{x^p} < \frac{1}{x}\cdot$

No caso 1) o significado geométrico da relação mostrada no item a) é que, no intervalo $]\,0,1\,[$, o gráfico de $f(x) = x^{-p}$ está mais próximo do eixo vertical que o gráfico da função $f(x) = x^{-1}$; enquanto no item b), a relação nos diz que para $x > 1$ o gráfico de $f(x) = x^{-p}$ está mais afastado do eixo horizontal do que o gráfico da função $f(x) = x^{-1}$. Deixamos para o leitor a interpretação geométrica do caso 2).



Os aspectos abordados nos dois casos anteriores estão ilustrados pelo gráfico ao lado.

O fato bastante interessante que queremos destacar é que, quanto à convergência ou divergência, as integrais impróprias dessas funções classificam-se da seguinte maneira:

$$1)\ se\ p < 1\text{:}\ \int_0^1 x^{-p} dx, converge\ e\ \int_1^{\infty} x^{-p} dx\ diverge;$$

$$2)\ se\ p > 1\text{:}\ \int_0^1 x^{-p} dx, diverge\ e\ \int_1^{\infty} x^{-p} dx\ converge.$$

A função $f(x) = x^{-1}$ assume um papel importante porque constitui, no caso, uma "fronteira", visto que sendo divergente nos dois intervalos ela "separa" em cada um desses intervalos as funções que proporcionam integrais impróprias convergentes daquelas cujas integrais divergem. Equivalentemente, podemos afirmar que a função da forma $f(x) = x^{-p}$ $(p \neq 1)$ possui integral imprópria convergente no intervalo em que seu gráfico estiver compreendido entre a curva $f(x) = x^{-1}$ e um dos eixos coordenados.

Exercício 8.8

1) Mostre que as integrais impróprias divergem.

A) $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ B) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$

C) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx, \quad (p < 1)$ D) $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx, \quad (p > 1)$

2) Mostre que as integrais impróprias convergem.

A) $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx, \quad (p < 1)$ B) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx, \quad (p > 1)$

3) Verifique se as integrais impróprias convergem ou não.

A) $\int_2^{\infty} \frac{1}{xlnx} dx$ B) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-2)^2} dx$

C) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^{4/3}} dx$ D) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{cosx} dx$

E) $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{lnx}} dx$ F) $\int_{-4}^{4} \frac{1}{(x-2)^{1/3}} dx$

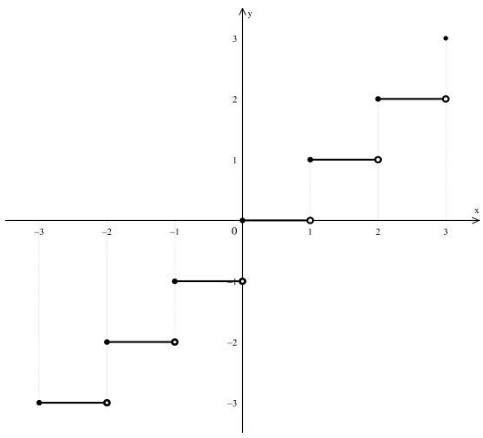
G) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x(lnx)^2} dx$

8.6 Integrais de Funções Contínuas Por Partes

A exemplo do que fizemos para *Integrais Impróprias* introduziremos, agora, a extensão do conceito de Integral Definida para outro conjunto de funções. Desta feita trataremos de funções não contínuas que apresentam particularidades comuns quando aos aspectos da descontinuidade. Uma função que se presta muito bem para exemplificar essa particularidade é a seguinte:

$$f: [-3,3]: \to R$$

$$f(x) = [x] \;\; (onde, \;\; [x] = maior\ inteiro\ menor\ ou\ igual\ a\ x)$$



Essa função pode ser definida para todos os números reais. No nosso exemplo, por motivos práticos, estamos limitando o seu domínio apenas ao intervalo $[-3,3]$. O gráfico dessa função encontra-se ao lado.

É claro que essa função não é contínua e suas descontinuidades ocorrem em todos os valores inteiros do intervalo $[-3,3]$. Entretanto as descontinuidades dessa função são "controladas" no seguinte sentido:

1) as descontinuidades da função ocorrem em apenas um número finito de pontos;

2) em cada ponto x_0 de descontinuidades existem os limites laterais:

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} f(x_0 + \Delta x) \text{ e } \lim_{\Delta x \to 0^+} f(x_0 + \Delta x)\ .$$

(nunca é demais reafirmar que nos extremos do intervalo de definição de uma função somente tem sentido um dos limites laterais).

As condições 1) e 2) dadas constituem as particularidades comuns dessas funções que designaremos por *Funções Contínuas por Parte*.

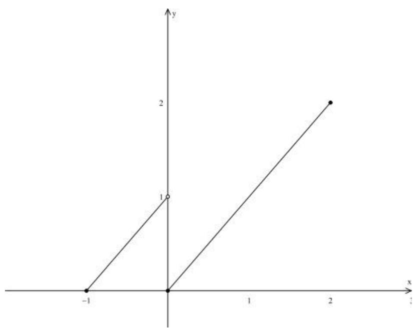
Definição 8.7

Diz-se que uma função $y = f(x)$, definida em $[a, b]$, é uma *função contínua por partes* nesse intervalo se ela for contínua exceto em um número finito de pontos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de $[a, b]$, de tal modo que seus limites laterais existam para cada x_i, $i = 1, 2, \cdots, n$.

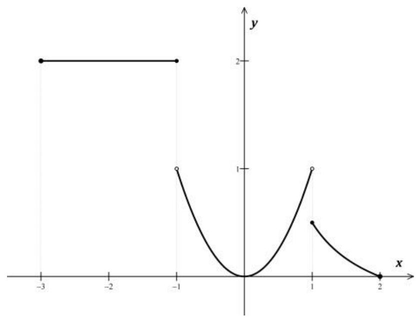
O exemplo a seguir exibe funções que são contínuas por partes.

Exemplo 8.21

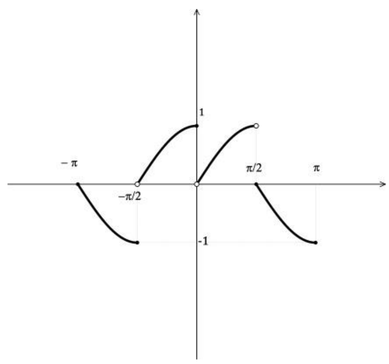
1. $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$



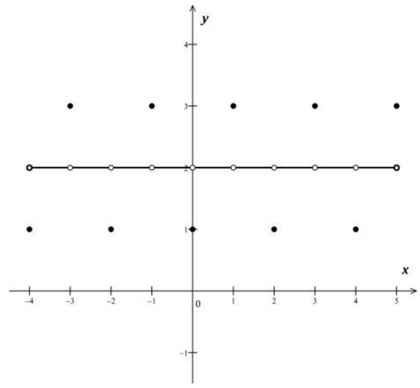
2. $f(x) = \begin{cases} 2, & -3 \leq x \leq -1 \\ x^2, & -1 < x < 1 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$



3. $f(x) = \begin{cases} senx, & \pi \leq x \leq -\dfrac{\pi}{2} \\ cosx, & -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \\ senx, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ cosx, & \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$

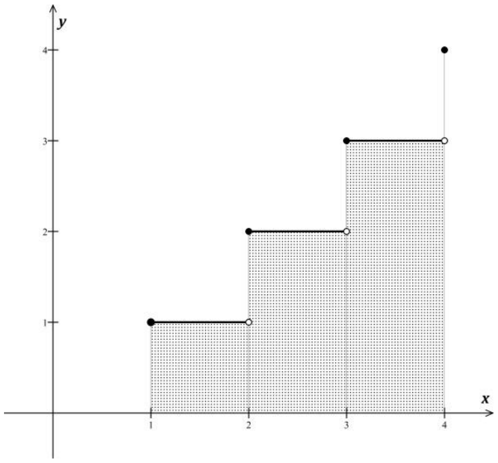


4. $$f(x) = \begin{cases} 2, & x \in [-4,5] \text{ e } x \notin \mathbb{Z} \\ 1, & x = -4, -2, 0, 2, 4 \\ 3, & x = -3, -1, 1, 3, 5 \end{cases}$$



É evidente que a definição de área sob uma curva não se aplica a nenhum desses exemplos. Entretanto, abstraindo-se os pontos onde essas funções são descontínuas, o conceito de área sob a curva se aplica em cada uma das "partes" contínuas, que na forma da definição (função contínua num intervalo fechado), quer segundo a abordagem de integrais impróprias (função contínua em intervalos semiabertos). Para fixar, tomemos a função

$$f(x) = [x], \qquad 1 \leq x \leq 4$$



Conforme a figura ao lado, a área da região "abaixo" da curva é obtida pela soma das áreas dos retângulos de bases dadas pelos comprimentos dos intervalos $[1,2], [2,3]$ e $[3,4]$ e alturas 1, 2 e 3, respectivamente. Essa área é igual a $1 + 2 + 3 = 6$.

Idêntico valor é obtido com o uso de integrais como é feito a seguir:

$$\int_1^2 dx + \int_2^3 2dx + \int_3^4 dx = 1 + 2 + 3 = 6.$$

Em outras palavras, diremos que

$$A_1^4([x]) = \int_1^4 [x]dx = \int_1^2 dx + \int_2^3 2dx + \int_3^4 dx = 6.$$

Este aspecto geométrico evidencia o lado prático que essas funções oferecem para a extensão do cálculo de áreas por meio de integrais definidas. No entanto, deve ser ressaltado que essa extensão somente torna-se possível em razão das duas propriedades presentes na definição de uma função contínua por partes que são: a descontinuidade ocorre em um número finito de pontos e nesses pontos os limites laterais da função existem. O primeiro nos possibilita expressar a integral da função como uma soma finita de integrais, correspondentes ao número de partes contínuas da função; o segundo nos garante que cada parte contínua pode ser considerada como uma função contínua definida num intervalo fechado. Para isso é bastante estender a função dada definindo o seu valor no extremo do intervalo, onde ele é aberto, como sendo igual ao valor do limite lateral correspondente.

Para tornar claras essas observações vamos, por exemplo, considerar a função do item 3 do Exemplo 8.22:

$$f(x) = \begin{cases} senx, & -\pi \leq x \leq -\dfrac{\pi}{2} \\ cosx, & -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \\ senx, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ cosx, & \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Cada parte da função dada por ser considerada do seguinte modo:

$$f_1(x) = senx, \qquad x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$$

$$f_2(x) = cosx, \qquad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$$

$$f_3(x) = senx, \qquad x \in \left]\, 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$f_4(x) = cosx, \qquad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Enquanto as partes f_1 e f_4 estão definidas em intervalos fechados o mesmo não acontece com f_2 e f_3. Entretanto temos que:

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f_2(x) = 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} f_3(x) = 0, \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} f_3(x) = 1.$$

Logo, as partes f_2 e f_3 podem ser estendidas de forma a ficarem definidas nos extremos em que o intervalo é aberto da seguinte forma:

$$F_2(x) = \begin{cases} f_2(x), & x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right] \\ 0, & x = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad ou \quad F_2(x) = cosx, \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$$

$$F_3(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ f_3(x), & x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\\ 1, & x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad ou \quad F_3(x) = senx, \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Assim, $F_2(x)$ e $F_3(x)$ são continuas num intervalo fechado e a integral de $f(x)$ será dada por:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} f_1(x)dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} F_2(x)dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} F_3(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f_4(x)dx$$

ou

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} senxdx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} cosxdx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} senxdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} cosxdx = 0$$

Exercício 8.9

Com base no exposto calcule a integral definida das demais funções dadas no Exemplo 8.21.

Para concluir o presente tópico estabelecemos, como síntese, o seguinte:

se $y = f(x)$ for uma função contínua por partes num intervalo $[a, b]$, com descontinuidades nos pontos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de $[a, b]$, então a integral definida de $y = f(x)$, em $[a, b]$, existe e é dada por

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{x_1} f_1(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f_2(x)dx + \cdots + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_{i+1}(x)dx + \cdots + \int_{x_n}^{b} f_{n+1}(x)dx,$$

onde $f_{i+1}(x)$ é a parte da função $y = f(x)$ no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$.

Exercício 8.10

Calcule

1) $\int_{-1}^{2} f(x)dx$ onde $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & -1 \le x \le 0 \\ 2 - x, & 0 < x < 1 \\ 3 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

2) $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ onde $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2}, & -1 \le x < 0 \\ \dfrac{1}{2-x}, & 0 < x \le 1 \end{cases}$

Exercício 8.11 (Revisão Geral do Capítulo 8)

I) Calcular usando a definição de Integral Definida

1) $\int_{1}^{2} (x - 1)\, dx$

2) $\int_{0}^{2} (x^2 + 1)\, dx$

II) Use o Teorema Fundamental do Cálculo para encontrar as seguintes integrais:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{cosx}{a^2 + sen^2 x} dx$

2) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+25}} dx$

3) $\int_0^{\pi} |cosx|\, dx$

4) $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} xcos(x^2)\, dx$

5) $\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - cos2x}\, dx$

6) $\int_1^2 \frac{1}{x(x^2+4)} dx$

7) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} xcosx\, dx$

8) $\int_{-\pi}^{\pi} (senx + |cosx|)\, dx$

9) $\int_0^{\pi} \frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{2} dx$

10) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cotg} x\, dx$

III) Encontre as áreas das regiões limitadas pelas curvas:

1) $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ e o eixo x

2) $y = x \;\; e \;\; y = -x^2 + 2$

3) $y = x^2 - 4 \;\; e \;\; y = -x + 2$

4) $y = -x^2 + 8 \;\; e \;\; y = 2x^2 - 1$

5) $y = -x^2 + 1 \;\; e \;\; y = x^2$

6) $x = 4 - y^2 \;\; e \;\; 2x = 3 - y^2$

7) $y = x; \;\; y = \frac{1}{x}; \;\; y = -x + \frac{5}{2} \;\; e \;\; y \leq x$

8) $y = x; \;\; y = \frac{1}{x}; \;\; y = -x + \frac{5}{2} \;\; e \;\; y \geq x$

9) $y = x; \;\; y = \frac{1}{x}; \;\; y = -x + \frac{5}{2} \;\; e \;\; y = 0$

10) $x - 2y^2 \;\; e \;\; x = 1 - 3y^2$

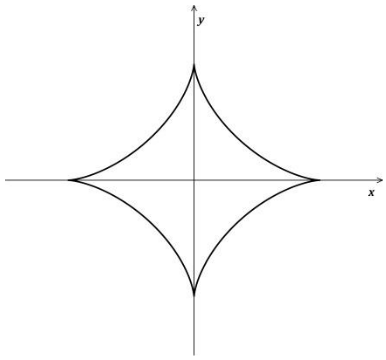
11) $y = x^2 + 1 \;\; e \;\; x + y = 3$

12) $x^2 = 4y \;\; e \;\; y = \frac{8}{x^2+4}$

13) $y = -x^2 - 2x + 3;$ sua reta tangente em $(2, -5)$ e o eixo x

14) $y = x^2 - 2x + 1; \;\; y = x^2 + 2x + 1 \;\; e \;\; y = x^2 - 1$

IV) Calcule a área da região limitada pela curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, cujo está representado pela figura ao lado



V) Resolva os exercícios seguintes:

1) Mostre que:

$$\int_a^b \frac{|x|}{x} dx = |b| - |a|, \quad a < b$$

2) Mostre que:

$$\frac{32}{5\sqrt[5]{65}} \leq \int_0^2 \frac{x^4}{\sqrt[5]{1 + x^6}} dx \leq \frac{32}{5}$$

3) Mostre que:

$$-2 \leq \int_1^3 sen\left(e^{x^2}\right) dx \leq 2$$

4) Mostre que:

$$\frac{\sqrt{2}}{8} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{senx}{x} dx \leq \frac{\sqrt{3}}{6}$$

5) Prove que para quaisquer duas funções f e g integráveis em $[a, b]$, temos:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\, dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx \int_a^b g^2(x)\, dx}$$

Sugestão: Analise o discriminante do trinômio do segundo graus em γ que é o primeiro membro da desigualdade

$$\int_a^b |\boldsymbol{f(x) - \gamma g(x)}|^2\, \boldsymbol{dx} \geq \mathbf{0}$$

6) Obtenha as derivadas de:

a) $$F(x) = \int_0^x \frac{sen(\pi t)}{1 + t} dt$$

b) $$F(x) = \int_1^{x^4} \frac{sent}{t} 4dt$$

c) $F(x) = \int_{x}^{x^2} lnt\, dt, \;\; x > 0$

d) $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} cos(t^2 + 1)\, dt$

7) Mostre que:

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\frac{z-a}{b-a}\right) dz$$

8) Calcule

$$\int_a^b f(x)dx$$

onde:

a) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \pi senx & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{7x-6}} & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$