9. Derivadas de ordem superior

Se uma função f for derivável, então f' é chamada a derivada primeira de f (ou de ordem 1). Se a derivada de f' existir, então ela será chamada derivada segunda de f (ou de ordem 2), e assim por diante.

Notações: $f'(x)$ ou $\dfrac{df}{dx}$ (derivada de primeira ordem de f em relação a x)

$f''(x)$ ou $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ (derivada de segunda ordem de f em relação a x)

$f'''(x)$ ou $\dfrac{d^3 f}{dx^3}$ (derivada de terceira ordem de f em relação a x)

$\vdots$

$f^{(n)}(x)$ ou $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ (derivada de ordem n de f em relação a x)

Exemplos:

1) Se $f(x) = 8x^4 + 5x^3 - x^2 + 7$, encontre as derivadas de todas as ordens de f.

$f'(x) = 32x^3 + 15x^2 - 2x$

$f''(x) = 96x^2 + 30x - 2$

$f'''(x) = 192x + 30$

$f^{iv}(x) = 192$

$f^{v}(x) = 0$

$f^{(n)}(x) = 0,\ n \geq 5$

2) Se $f(x) = 2\,sen(x) + 3\cos(x) - x^3$, calcule $f'''(x)$.

$f'(x) = 2\cos(x) - 3sen(x) - 3x^2$

$f''(x) = -2\,sen(x) - 3\cos(x) - 6x$

$f'''(x) = -2\cos(x) + 3sen(x) - 6$

3) Se $f(x) = e^{x/2}$, calcule $f^{(n)}(x)$.

$f'(x) = \dfrac{1}{2}e^{x/2}$; $f''(x) = \dfrac{1}{4}e^{x/2}$; $f'''(x) = \dfrac{1}{8}e^{x/2}$; .... , $f^{(n)}(x) = \dfrac{1}{2^n}e^{x/2}$

4) Se $f(x)=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$, determine $f^{(n)}(x)$.

$$f'(x)=(-1)x^{-2}=-x^{-2}$$

$$f''(x)=(-1)(-2)x^{-3}=2x^{-3}$$

$$f'''(x)=(-3)(-2)(-1)x^{-4}=-3\cdot 2\cdot 1x^{-4}$$

$$f^{iv}(x)=(-4)(-3)(-2)(-1)x^{-5}=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1x^{-5}$$

$$f^{v}(x)=(-5)(-4)(-3)(-2)(-1)x^{-6}=-5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1x^{-6}$$

$$\ldots\quad f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\,x^{-(n+1)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{(n+1)}}.$$

Aplicação física da segunda derivada: aceleração

Já vimos que se uma função $s(t)$ descreve a posição de um objeto em movimento no instante t, então $s'(t)$ fornece a taxa de variação instantânea do movimento, ou seja, a velocidade deste objeto no instante t. O que seria então, a segunda derivada de $s(t)$? Pelo mesmo raciocínio, $s''(t)$ fornece a taxa de variação instantânea de $s'(t)$, ou seja, a taxa de variação da velocidade, que é conhecida como aceleração instantânea. Se $s''(t)>0$, o objeto está acelerando e se $s''(t)<0$, o objeto está desacelerando.

Exemplo: Uma partícula move-se ao longo de uma reta de acordo com a seguinte equação de movimento: $s(t)=\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{4t}{t+1}$, onde s cm é a distância orientada da partícula até a origem em t seg. Se v cm/seg for a velocidade instantânea e a cm/seg^2 for a aceleração em t seg, determine t, s e v quando a aceleração é nula.

Solução: $v=\dfrac{ds}{dt}=t+\dfrac{4}{(t+1)^2}$ e $a=\dfrac{dv}{dt}=1-\dfrac{8}{(t+1)^3}$

Tomando $a=0$ teremos

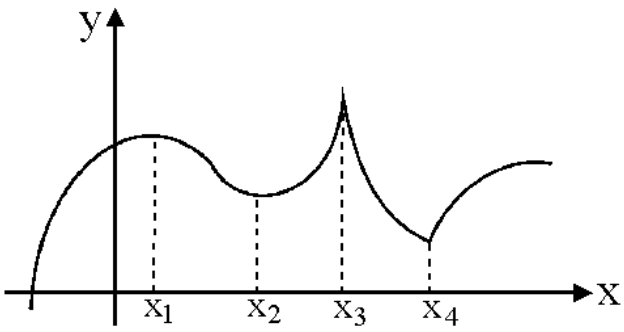
$$\frac{(t+1)^3-8}{(t+1)^3}=0 \iff (t+1)^3-8=0 \iff (t+1)^3=8 \iff (t+1)=2 \iff t=1.$$

Quando $t=1$, temos $s(1)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{1+1}=\dfrac{5}{2}$ e $v(1)=1+\dfrac{4}{(1+1)^2}=2$.

Portanto, a aceleração é nula 1 seg após o início do movimento, quando a partícula está a 5/2 cm da origem, movendo-se para a direita, com uma velocidade de 2 cm/seg.

10 Máximos e Mínimos

A figura abaixo mostra o gráfico de uma função $y = f(x)$, onde assinalamos os pontos de abscissas x_1, x_2, x_3 e x_4.



Esses pontos são chamados **pontos extremos** da função. Os pontos x_1 e x_3 são **pontos de máximo relativos** (ou local), enquanto que $f(x_1)$ e $f(x_3)$ são **valores máximos relativos**. Os pontos x_2 e x_4 são chamados **pontos de mínimo relativos** (ou local), enquanto que $f(x_2)$ e $f(x_4)$ são os **valores mínimos relativos**. Além disso, observamos que f é **crescente** para $x < x_1$, $x \in (x_2, x_3)$ e $x > x_4$, e **decrescente** para $x \in (x_1, x_2)$ e $x \in (x_3, x_4)$. A formalização destas definições é apresentada a seguir:

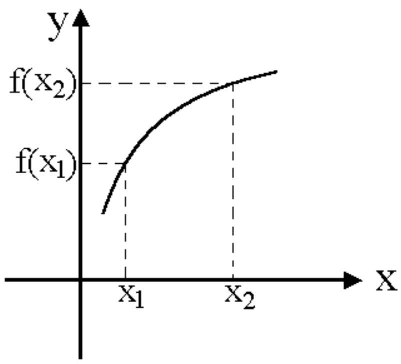
***Definição* 10.1**: Uma função f tem um máximo relativo em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in$ I.

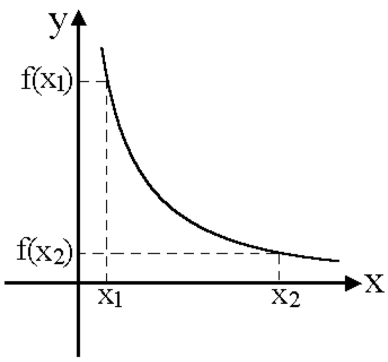
***Definição* 10.2**: Uma função f tem um mínimo relativo em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in$ I.

Definição* 10.3*: Seja f uma função definida em um intervalo I:

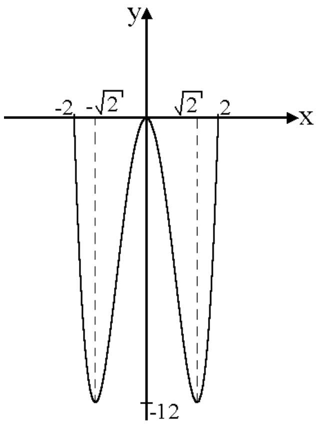
(i) f é **crescente** nesse intervalo se, para quaisquer $x_1, x_2 \in$ I tais que $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;

(ii) f é **decrescente** nesse intervalo se, para quaisquer $x_1, x_2 \in$ I tais que $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.





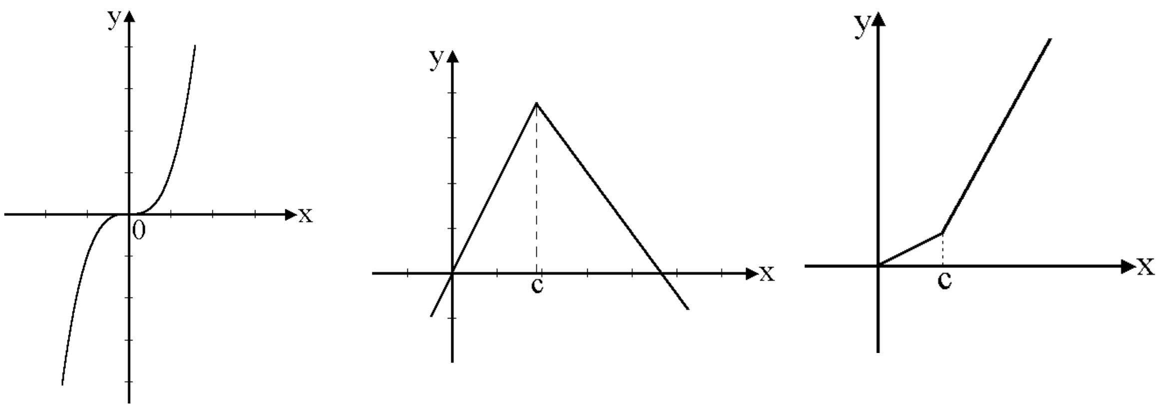
Exemplo: A função $f(x) = 3x^4 - 12x^2$ tem um máximo relativo em $c_1 = 0$, pois existe o intervalo (-2, 2) tal que $f(0) \geq f(x)$ para todo $x \in (-2, 2)$. Em $c_2 = -\sqrt{2}$ e $c_3 = +\sqrt{2}$, f tem mínimos relativos pois $f(-\sqrt{2}) \leq f(x)$ para todo $x \in (-2, 0)$ e $f(\sqrt{2}) \leq f(x)$ para todo $x \in (0, 2)$. f é crescente nos intervalos $(-\sqrt{2}, 0)$ e $(\sqrt{2}, 2)$ e decrescente nos intervalos $(-2, -\sqrt{2})$ e $(0, \sqrt{2})$.



Proposição 10.1: Suponha que $f(x)$ exista para todos os valores de $x \in (a, b)$ e que f tenha um extremo relativo em c, onde $a < c < b$. Se $f'(c)$ existe, então $f'(c) = 0$.

Geometricamente esta proposição indica que se f tem um extremo relativo em c e se $f'(c)$ existe, então o gráfico de f tem uma reta tangente horizontal no ponto onde $x = c$.

Observação: Não vale a recíproca da proposição 10.1, ou seja, $f'(c) = 0$ não implica que c seja um extremo de f. O exemplo mais simples que ilustra este fato é a função $f(x) = x^3$. Vemos claramente que $f\,'(0) = 0$, porém f não tem extremo em $x = 0$. Da mesma forma, observamos nas figuras abaixo que quando $f\,'(c)$ não existe, f pode ter ou não um extremo relativo em c.

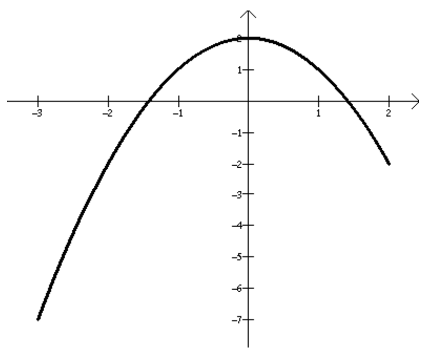


***Definição* 10.4**: O ponto $c \in D(f)$ tal que $f\,'(c) = 0$ ou $\nexists\, f\,'(c)$, é chamado **ponto crítico** de f.

A figura acima ilustra o fato de que um ponto crítico pode ser ou não um ponto extremo. Porém, uma condição necessária para a existência de um extremo relativo em um ponto c é que c seja um **ponto crítico**. Em outras palavras, todo ponto extremo é ponto crítico, porém nem todo ponto crítico é ponto extremo.

É importante observar que uma função definida em um dado intervalo pode admitir diversos extremos relativos. O maior valor da função neste intervalo é chamado **máximo absoluto** e o menor valor, **mínimo absoluto**.

Exemplo: A função $f(x) = -x^2 + 2$ possui um valor máximo absoluto igual a 2 em (-3, 2), o qual é atingido quando $x = 0$. Também podemos dizer que –7 é o valor mínimo absoluto em [-3, 2], o qual é atingido quando $x = -3$.



Proposição 10.2: Seja f:[a, b] $\rightarrow \Re$ uma função contínua, definida em um intervalo fechado [a, b]. Então f possui máximo e mínimo absoluto em [a, b].

Proposição 10.3: Seja f uma função contínua no intervalo [a, b] e derivável em (a, b).

i) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f e crescente em [a, b];

ii) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f e decrescente em [a, b].

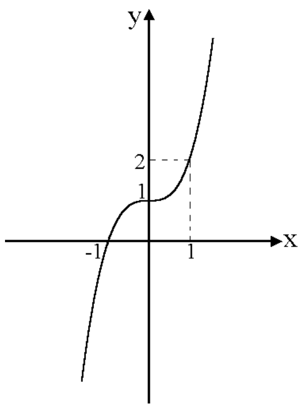
Exemplos: Determine os intervalos nos quais as funções seguintes são crescentes ou decrescentes.

1) $f(x) = x^3 + 1$.

Basta derivar a função e analisar os pontos $x \in$ D(f) tais que $f'(x) > 0$ e os pontos onde $f'(x) < 0$.

Temos: $f'(x) = 3x^2$. Como $3x^2 > 0$, para todo $x \neq 0$, concluímos que a função é sempre crescente.

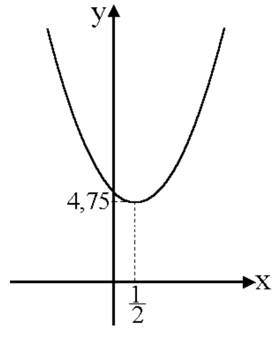
Verifique isso no seu gráfico:



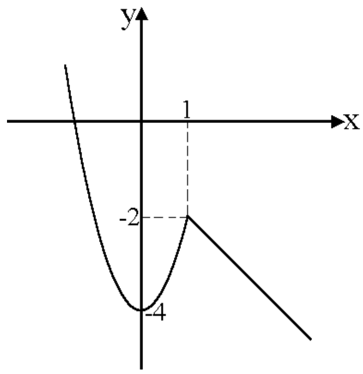
2) $f(x) = x^2 - x + 5$

Temos $f'(x) = 2x - 1$. Então, para $2x - 1 > 0$, ou seja, para $x > \frac{1}{2}$ a função é crescente.

Para $2x - 1 < 0$ ou $x < \frac{1}{2}$ a função é decrescente.



3) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4, & se \;\; x \le 1 \\ -x-1, & se \;\; x > 1. \end{cases}$



Note que f não é diferenciável em $x = 1$. Assim, se $x < 1$, então $f'(x) = 4x$ e, portanto:

$4x > 0$ para $x \in (0, 1)$ e $4x < 0$ para $x \in (-\infty, 0)$.

Se $x > 1$, então $f'(x) = -1$. Logo, $f'(x) < 0$ para todo $x \in (1, +\infty)$.

Concluímos com isso que f é crescente em $(0, 1)$ e decrescente em $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

$x = 0$ e $x = 1$ são pontos críticos de f.

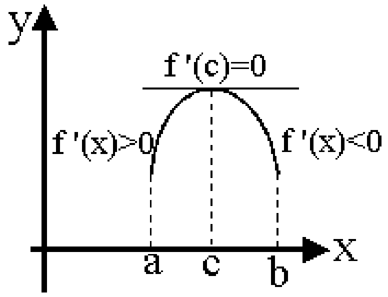
Critérios para determinar a natureza dos extremos de uma função

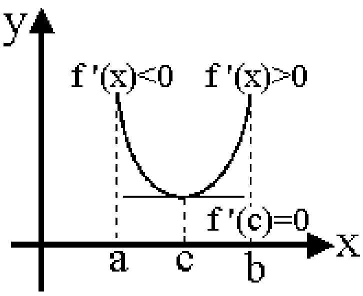
A determinação e análise dos pontos críticos de uma função, bem como das regiões de crescimento ou decrescimento, permite a construção de seu gráfico de modo confiável. Faremos alguns exemplos simples aqui, porém nossa ênfase principal é a percepção destes conceitos na visualização gráfica e a aplicação desta teoria na resolução de problemas que exigem a determinação e análise dos extremos de uma função. Como exemplo, podemos citar a necessidade de uma empresa determinar a produção que fornece seu lucro máximo, as medidas que permitem o custo mínimo de um determinado objeto e assim por diante. Para isso, a primeira medida é sempre encontrar os pontos críticos da função e em seguida, analisar se são de máximo, de mínimo ou nenhum, nem outro. Existem dois teoremas que são essenciais nesta tarefa:

Teorema 10.1 (Teste da derivada primeira). Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$, que possui derivada em todo ponto do intervalo aberto (a, b), exceto possivelmente num ponto c.

i) Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f tem um máximo relativo em c.

ii) Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f tem um mínimo relativo em c.



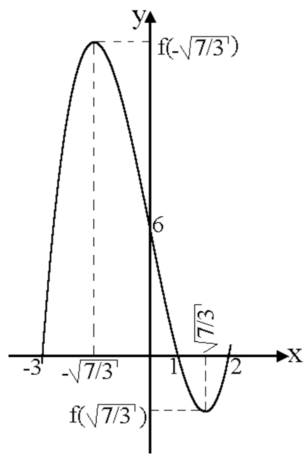


Exemplo: Encontre os intervalos de crescimento, decrescimento, máximos e mínimos relativos da função $f(x) = x^3 - 7x + 6$.

Solução: $f'(x) = 3x^2 - 7$. Fazendo $f'(x) = 0$, obtemos $x = \pm\sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

Portanto , os pontos cítricos de f são $x_1 = +\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ e $x_2 = -\sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

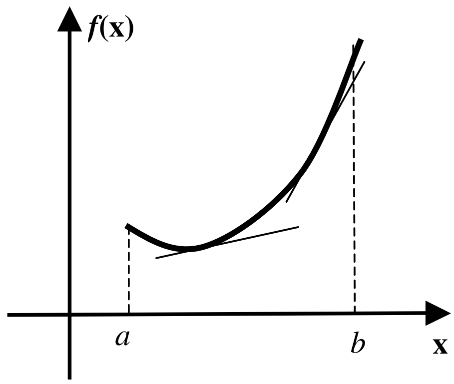
É fácil verificar que se $x < -\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ ou $x > \sqrt{\dfrac{7}{3}}$, tem-se $f'(x) > 0$, o que implica que f é crescente nos intervalos $\left(-\infty, -\sqrt{\dfrac{7}{3}}\right)$ e $\left(\sqrt{\dfrac{7}{3}}, \infty\right)$. Para $-\sqrt{\dfrac{7}{3}} < x < \sqrt{\dfrac{7}{3}}$, tem-se $f'(x) < 0$, logo f é decrescente em $\left(-\sqrt{\dfrac{7}{3}}, \sqrt{\dfrac{7}{3}}\right)$. Assim, pelo critério da derivada primeira, concluímos que f tem um máximo relativo em $x_1 = -\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ e um mínimo relativo em $x_2 = +\sqrt{\dfrac{7}{3}}$. Observe o gráfico:



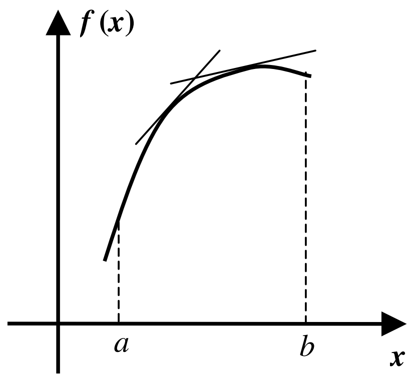
Observamos que este teste informa as regiões do domínio onde a função cresce e onde ela decresce, porém não diz de que modo isso ocorre, ou seja, não diz nada sobre a curvatura do gráfico, o qual pode ser côncavo para baixo, para cima, ou reto, por exemplo. Quem fornece estas informações é a segunda derivada da função. Vejamos:

Concavidade e pontos de inflexão

Seja f uma função diferenciável (pelo menos até a segunda derivada) em um intervalo (a, b). Se $\boldsymbol{f''(x) > 0}$ para todo x em (a, b), então a função primeira derivada $f'(x)$ é crescente em (a, b) e a **concavidade do seu gráfico é voltada para cima**, conforme mostra a figura abaixo:

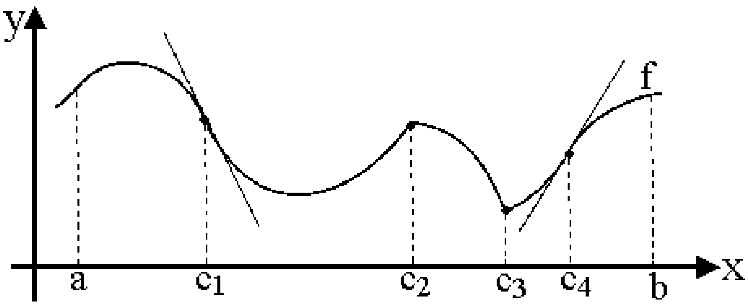


Analogamente, se $\boldsymbol{f''(x) < 0}$ para todo x em (a, b), então a função primeira derivada $f'(x)$ é decrescente em (a, b) e a **concavidade do seu gráfico é voltada para baixo**:



Definição 10.5: Um ponto $P(c, f(c))$ do gráfico de uma função contínua f é chamado **ponto de inflexão** se a concavidade do gráfico muda neste ponto.

Na figura abaixo, os pontos de abscissa c_1, c_2, c_3 e c_4 são pontos de inflexão. Vale observar que c_2 e c_3 são pontos extremos relativos de *f* e que *f* não é derivável nestes pontos. Nos pontos c_1 e c_4 existem derivadas $f'(c_1)$ e $f'(c_4)$. Nos correspondentes pontos $(c_1, f(c_1))$ e $(c_4, f(c_4))$ a reta tangente corta o gráfico de *f*.



Exemplos:

1) No exemplo anterior tínhamos $f(x) = x^3 - 7x + 6$ e $f'(x) = 3x^2 - 7$. Para estudar a concavidade, tomamos a segunda derivada, $f''(x) = 6x$, e observarmos que $f''(x) < 0$ se $x < 0$ e $f''(x) > 0$ se $x > 0$. Logo, a concavidade do gráfico é voltada para baixo para todos os reais negativos e para cima, para os reais positivos. $x = 0$ é, portanto, um ponto de inflexão do gráfico de *f*, conforme já visto em seu gráfico.

2) $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \, para \; x \le 1 \\ 1-(x-1)^2 & , \, para \; x > 1 \end{cases}$

Para $x < 1$, $f'(x) = 2x$ e $f''(x) = 2$.

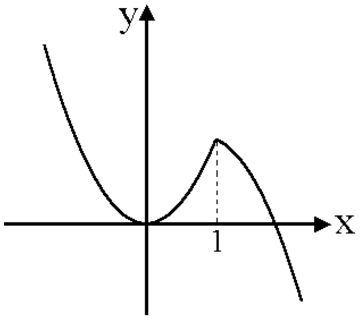
Para $x > 1$, $f'(x) = -2(x-1)$ e $f''(x) = -2$.

Logo, para $x \in (-\infty, 1)$, $f''(x) > 0$ e portanto *f* é côncava para cima neste intervalo. No intervalo $(1, +\infty)$, $f''(x) < 0$. Portanto, neste intervalo *f* é côncava para baixo. Assim, no ponto c = 1, a concavidade muda, o que significa que este é um ponto de inflexão. Analisando a primeira derivada, notamos que:

$x < 1 \Rightarrow f'(x) < 0$ para $x < 0$ e $f'(x) > 0$ para $0 < x < 1$;

$x > 1 \Rightarrow f'(x) < 0$ para todo x.

Portanto, f é crescente para $0 < x < 1$ e decrescente para $x < 0$ e $x > 1$. Associando isso à análise da concavidade, podemos construir seu gráfico, onde podemos também observar que no ponto c = 1 f tem um máximo relativo.



Observação: um ponto $c \in D(f)$ onde f'' é contínua e tal que $f''(c) = 0$ é um ponto de inflexão de f (exemplo 1).

Teorema 10.2 - (Teste da derivada segunda). Sejam f uma função derivável num intervalo (a, b) e c um ponto crítico de f neste intervalo, isto é, $f'(c) = 0$, com $a < c < b$. Se f admite a derivada segunda em (a, b) então:

i) Se $f''(c) < 0$, f tem um valor máximo relativo em c.

ii) Se $f''(c) > 0$, f tem um valor mínimo relativo em c.

Exemplos: Encontre os máximos e mínimos relativos de f, aplicando o teste da derivada segunda.

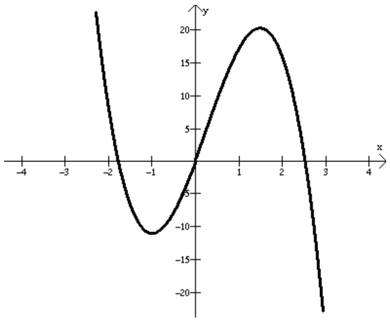
1) $f(x) = 18x + 3x^2 - 4x^3$.

Temos, $f'(x) = 18 + 6x - 12x^2$ e $f''(x) = 6 - 24x$.

Fazendo $f'(x) = 0$, obtemos $18 + 6x - 12x^2 = 0$. Resolvendo esta equação obtemos os pontos críticos de f, que são $x_1 = \frac{3}{2}$ e $x_2 = -1$.

Como $f''\left(\frac{3}{2}\right) = -30 < 0$, segue que $x_1 = \frac{3}{2}$ é um ponto de máximo relativo de f. Seu valor máximo relativo em x_1 é dado por $f\left(\frac{3}{2}\right) = 20{,}25$.

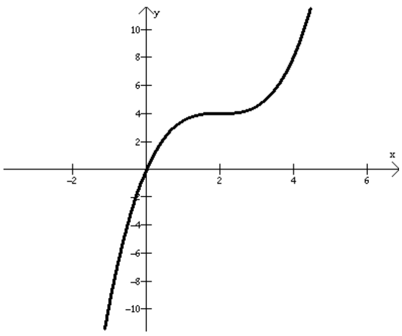
Analogamente, como $f''(-1) = 30 > 0$, segue que $x_2 = -1$ é um ponto de mínimo relativo de f. Seu valor mínimo relativo em x_2 é dado por $f(-1) = -11$.



2) $f(x) = 6x - 3x^2 + \frac{1}{2}x^3$

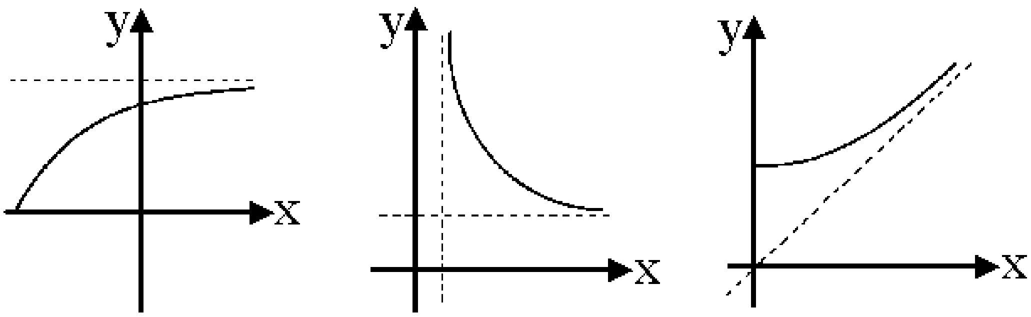
Temos $f'(x) = 6 - 6x + \frac{3}{2}x^2$ e $f''(x) = -6 + 3x$.

Fazendo $f'(x) = 0$ e resolvendo a equação, obtemos $x = 2$, que neste caso é o único ponto crítico de f. Como $f''(2) = 0$ e $f''(x)$ é uma função polinomial e, portanto, contínua, segue da observação acima que $x = 2$ é um ponto de inflexão de f. Usando o critério da derivada primeira, concluímos que esta função é sempre crescente em $\Re$. Portanto não existem máximos nem mínimos relativos. Vejamos o gráfico:



Assíntotas horizontais e verticais

Em aplicações práticas, encontramos com muita freqüência gráficos que se aproximam de uma reta à medida que x cresce ou decresce. Estas retas são chamadas de **assíntotas**.



Observação: Na figura acima tem–se a ocorrência de assíntota oblíqua, as quais não serão estudadas aqui. Vamos analisar apenas as **assíntotas horizontais** e as **verticais**.

Definição 10.6: A reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico de f se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

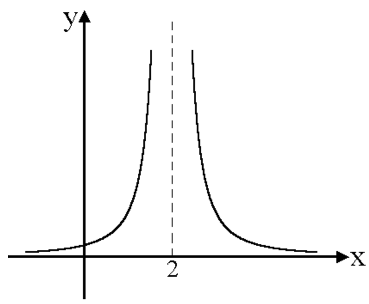
i) $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ ii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

iii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ iv) $\lim_{x \to a-} f(x) = -\infty$

Exemplo:

A reta $x = 2$ é uma assíntota vertical do gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$.

De fato, $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$, e $\lim_{x \to 2^-} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$



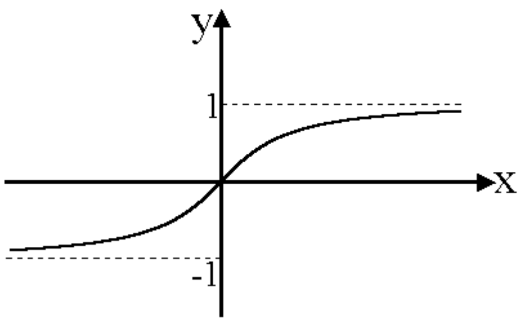
Definição 10.7: A reta y = b é uma assíntota horizontal do gráfico f se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

i) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \text{b}$ ii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \text{b}$

Exemplo:

As retas $y = 1$ e $y = -1$ são assíntotas horizontais do gráfico de $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$, pois

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} = -1$$



Esboço de gráficos

Utilizando todos os itens citados na análise de uma função, podemos fazer um resumo de atividades que nos levarão ao esboço de gráficos.

Etapas	Procedimento
1ª	Encontrar D(*f*)
2ª	Calcular os pontos de intersecção com os eixos. (Quando não requer muito cálculo)
3ª	Determinar os pontos críticos
4ª	Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento
5ª	Encontrar os máximos e mínimos relativos
6ª	Determinar a concavidade e os pontos de inflexão
7ª	Encontrar as assíntotas horizontais e verticais, se existirem
8ª	Esboçar o gráfico

Exemplos: Esboçar os gráficos das funções abaixo:

1) $f(x) = x^2 + x - 2$.

Seguindo as etapas propostas temos:

1ª etapa: D (f) = $\mathbb{R}$

2ª etapa: intersecção com o eixo y: $f(0) = -2$.

intersecção com o eixo x: $x^2 + x - 2 = 0 \iff x = -2$ ou $x = 1$.

3ª etapa: $f\,'(x) = 2x + 1$

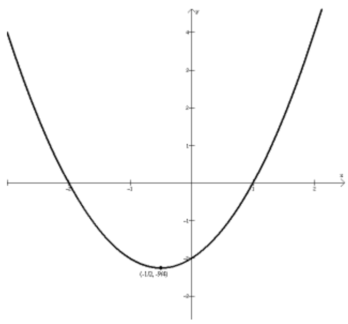
Resolvendo $2x + 1 = 0$, encontramos $x = \dfrac{-1}{2}$, que é o ponto crítico.

4ª etapa: fazendo $f\,'(x) > 0$, obtemos que $2x + 1 > 0$ quando $x > -1/2$. Portanto, f é crescente para todo $x > -1/2$. Fazendo $f\,'(x) < 0$, obtemos que $2x + 1 < 0$ quando $x < -1/2$. Portanto f é decrescente para $x < -1/2$.

5ª etapa: $f\,''(x) = 2 > 0$. Logo, a concavidade do gráfico está sempre voltada para cima e assim, $x = \dfrac{-1}{2}$ é ponto de mínimo de f. $f(\dfrac{-1}{2}) = \dfrac{-9}{4}$: valor mínimo assumido pela função.

7ª etapa: não existem assíntotas ($\lim\limits_{x \to \pm\infty} = +\infty$ e D (f) = $\mathbb{R}$).

8ª etapa: esboço do gráfico.



2) $f(x) = \ln x$

Temos, D (f) = $\{x \in R : x > 0\}$

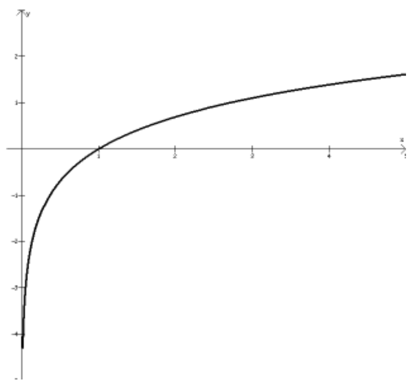
$f\,'(x) = \dfrac{1}{x} > 0, \forall\ x > 0$. Logo, f é crescente em todo o seu domínio.

$f\,''(x) = \dfrac{-1}{x^2} < 0, \forall\ x > 0$. Logo, a concavidade do gráfico é sempre voltada para baixo.

$\ln x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1$. Logo, o gráfico intercepta o eixo-*x* em *x* = 1.

$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. Logo, *x* = 0 é uma assíntota vertical do gráfico de *f*.

De posse destas informações, o gráfico se torna natural:



3) $f(x) = \exp(x) = e^x$

Temos, D (*f*) = ℝ

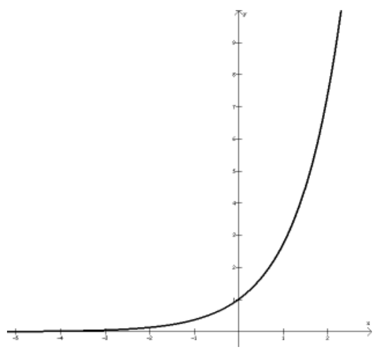
$f\,'(x) = e^x > 0, \forall\, x \in R$. Logo, *f* é crescente em todos os reais.

$f\,''(x) = e^x > 0, \forall\, x \in R$. Logo, a concavidade do gráfico é sempre voltada para cima.

$f(x) > 0, \forall\, x \in R$. Logo, o gráfico não intercepta o eixo-*x*.

$f(0) = 1$. Logo, o gráfico intercepta o eixo-*y* em *y* = 1.

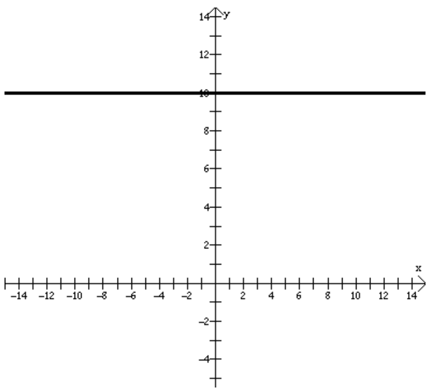
$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ *e* $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$. Logo, a reta y = 0 é uma assíntota horizontal do gráfico de *f*.

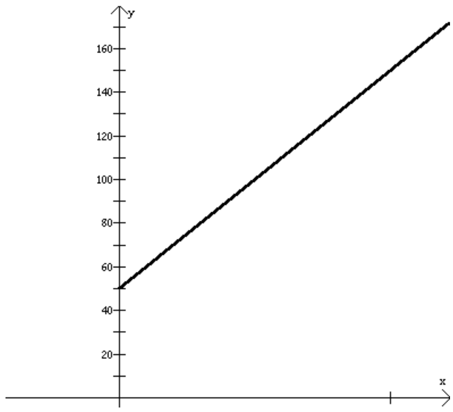


4) Nas áreas aplicadas, é muito comum se ter o conhecimento da taxa de variação de uma função ou de sua velocidade e, a partir daí, querer saber como é o comportamento da função. Existem métodos algébricos para resolver estes problemas, os quais serão vistos mais adiante, porém, a visão geométrica destes fenômenos já pode ser explorada com a teoria que acabamos de ver.

Suponha, por exemplo, que se saiba que a população de uma determinada espécie vem crescendo a uma taxa constante de 10 indivíduos por ano. Supondo que esta taxa se mantenha e que no momento existam 50 indivíduos, como visualizar graficamente o comportamento desta população ao longo do tempo?

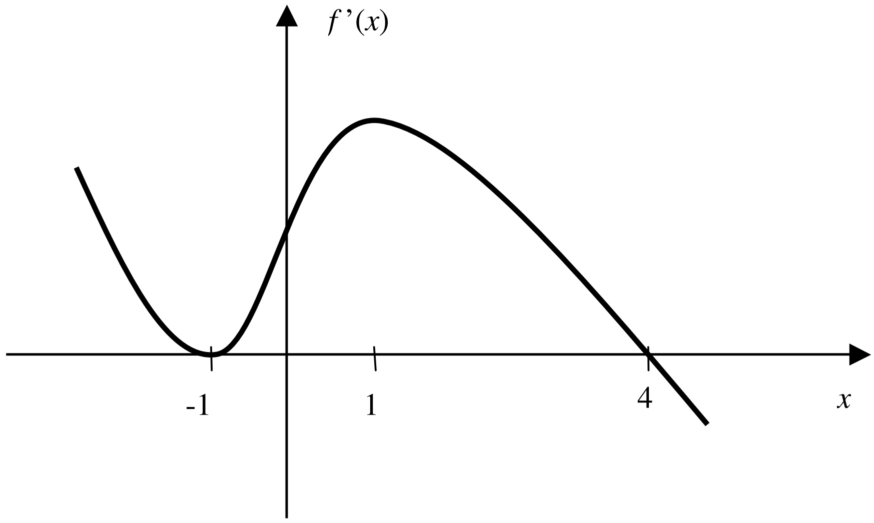
Chamando o tamanho da população, no instante *t*, de $p(t)$, sabemos que $p'(t)=10$ e conseqüentemente, $p''(t)=0$, o que significa que a população $p(t)$ será sempre crescente e seu gráfico possui curvatura nula. Logo, é uma reta. Como tempo é positivo e sempre consideramos $t = 0$ no início de um experimento, temos $p(0)=50$. Com isso obtemos o gráfico da função ao longo do tempo, o qual é mostrado abaixo (direita), juntamente com o de sua derivada (esquerda):





Algebricamente raciocinamos do seguinte modo: se a derivada é constante, então a função necessariamente é linear, ou seja, se $p'(t)=10$ então $p(t)=10\,t+C$, onde C é uma constante, pois derivando $p(t)$ encontramos $p'(t)=10$. Sabendo que $p(0) = 50$, encontramos $C = 50$ e assim, obtemos a expressão da população em um tempo *t* qualquer: $p(t)=10\,t+50$.

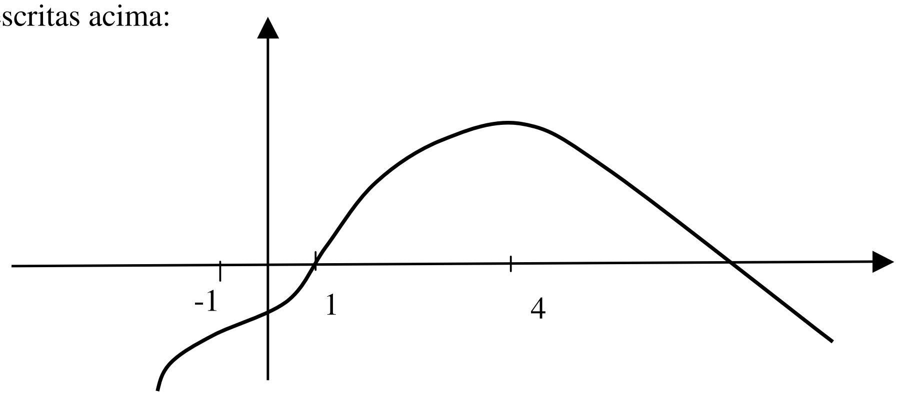
5) A figura a seguir mostra o gráfico da derivada primeira $f'(x)$ de uma função $f(x)$. Baseado neste gráfico, determine os intervalos em que f é uma função crescente e decrescente, as concavidades e todos os extremos relativos e pontos de inflexão da função. Em seguida, esboce a curva de f.



Observando o gráfico, notamos:

x	**Descrição de** $f'(x)$	**Descrição de** $f(x)$
$x < -1$	positiva; decrescente	crescente; concavidade para baixo
$-1 < x < 1$	positiva; crescente	crescente; concavidade para cima
$x = -1$	tangente horizontal ($f''(-1) = 0$)	ponto de inflexão
$1 < x < 4$	positiva; decrescente	crescente; concavidade para baixo
$x = 1$	tangente horizontal ($f''(1) = 0$)	ponto de inflexão
$x > 4$	negativa; decrescente	decrescente; concavidade para baixo
$x = 4$	$f'(4) = 0$	tangente horizontal (máximo local)

Como não foram fornecidos os valores de f, faremos o gráfico apenas respeitando as características descritas acima:



5) Esboce o gráfico de uma função que tenha as seguintes características:

$f(0) = 0;$

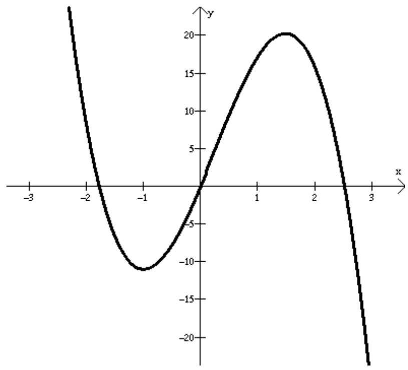
$f'(x) < 0 \quad se \quad x < -1 \quad ou \quad x > 3/2$

$f'(x) > 0 \quad se \quad -1 < x < 3/2$

$f'(-1) = f'(3/2) = 0$

$f''(x) < 0 \quad se \quad x > 0{,}25$

$f''(x) > 0 \quad se \quad x < 0{,}25$



EXERCÍCIOS:

1) Faça uma análise completa das funções abaixo, envolvendo a determinação do domínio, pontos críticos, extremos, região de crescimento e decrescimento, concavidade e assíntotas e, a partir dela, construa, manualmente, seus respectivos gráficos. Faça-os posteriormente no *winplot*, a fim de comparar os resultados.

a) $f(x) = \ln(2x+3)$ b) $f(x) = 4 - x^2$

c) $f(x) = e^{-x}$ d) $f(x) = x^3 + 1$

2) Dada a derivada $f'(x) = x^2 - 2x - 8$ de uma certa função $f(x)$:

a) Determine os intervalos em que $f(x)$ é crescente e decrescente.

b) Determine os intervalos em que a concavidade de $f(x)$ é para cima e para baixo.

c) Determine as coordenas x dos extremos relativos e ponto de inflexão de $f(x)$.

d) Esboce um possível gráfico de $f(x)$.

3) Faça um esboço de uma função com as seguintes propriedades:

a) $f'(x) > 0 \quad para \quad x < -1 \quad e \quad x > 3$

b) $f'(x) < 0 \quad para \quad -1 < x < 3$

c) $f''(x) < 0 \quad para \quad x < 2$

d) $f''(x) > 0 \quad para \quad x > 2$