CÁLCULO I

Prof. Marcos Diniz | Prof. André Almeida| Prof. Edilson Neri Júnior | Prof. Emerson Veiga | Prof. Tiago Coelho

Aula nº 15: Aproximações Lineares e Diferenciais. Regra de L'Hôspital.

Objetivos da Aula

- Definir e calcular a aproximação linear de uma função derivável;
- Conhecer e determinar a diferencial;
- Apresentar e aplicar a Regra de L'Hôspital.

1 Aproximações Lineares

Considere uma curva derivável $f(x)$ e um ponto $(p, f(p))$ sobre ela. Em seguida, considere a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ (veja a figura abaixo), que possui equação $L(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$.

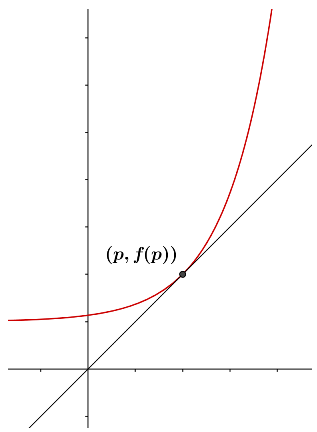

Figura 1: Gráfico de uma função f.

Se dermos um "zoom"na região próxima do ponto $(p, f(p))$, notamos que a curva se aproxima bastante da reta tangente, como podemos observar abaixo:

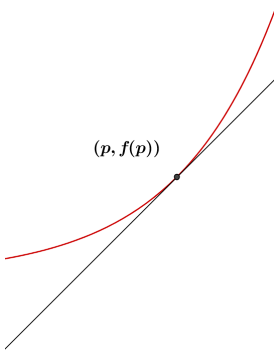

Figura 2: Zoom no gráfico da função f.

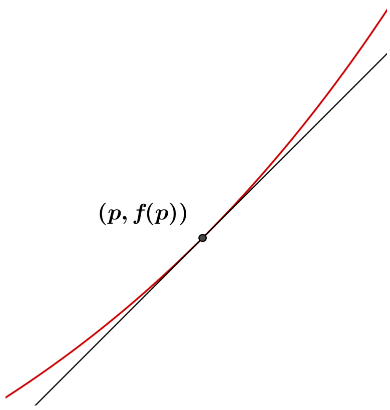

Figura 3: Zoom no gráfico da função f.

Dizemos então que a reta tangente é uma boa aproximação para o gráfico de f (de fato, num certo sentido, dizemos que a função L é a função polinomial de primeiro grau **que melhor aproxima, localmente, a função** f). Denotamos esta aproximação por $f(x) \approx L(x)$, para x suficientemente próximos de p. Assim,

$$f(x) \approx f(p) + f'(p)(x - p)$$

Essa aproximação é chamada de **aproximação linear de f em torno de** p. A função dada por

$$L(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$$

é chamada de **linearização** de f em p.

Exemplo 1. *Considere $f(x) = \operatorname{sen} x$. Determine a linearização de f em $p = 0$. Utilize essa linearização para determinar uma aproximação de $\operatorname{sen}(0{,}1)$. Utilize uma calculadora para determinar o erro cometido.*

Solução: Note que $f'(x) = \cos x$ e que $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$. Sendo assim, a linearização desejada é

$$L(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = 0 + 1.(x - 0) = x$$

Assim, para determinar uma aproximação para $\operatorname{sen}(0{,}1)$, basta lembrar que $L(x) \approx f(x)$. Sendo assim, como $L(0{,}1) = 0{,}1$, temos que

$$\operatorname{sen}(0{,}1) \approx 0{,}1$$

Utilizando uma calculadora, obtemos que $|\operatorname{sen}(0{,}1) - 0{,}1| \approx 0{,}000166583$. Desse modo, o erro obtido na aproximação é de $0{,}016\%$. ■

Exemplo 2. *Na física, costuma-se trabalhar com aproximações lineares como a do exemplo anterior. Quando deduzimos a fórmula para o período de um pêndulo, encontramos a seguinte equação para a aceleração tangencial*

$$a_T = -g \operatorname{sen} \theta$$

Sendo que em geral, utilizamos a aproximação linear acima e definimos que sempre que θ assume valores pequenos (próximos de zero), obtemos

$$a_T = -g\theta$$

■

Exemplo 3. *Encontre a linearização de $f(x) = 5x - 2$ em $p = 2$.*

Solução: Note que $f'(x) = 5$ e que $f(2) = 10 - 2 = 8$. Logo,

$$L(x) = 8 + 5(x - 2) = 5x - 2$$

■

Observação 1. *Quando se trata de uma função* afim *(polinomial de grau 1), a linearização coincide com a própria função.*

Observação 2. *Em geral, quando fazemos aproximações, cometemos algum tipo de erro, sendo importante sua determinação (ou ao menos saber estimá-lo!). No caso de aproximarmos uma função pela sua linearização,*

$$f(x) \approx L(x)$$

o erro cometido em x é dado por

$$|f(x) - L(x)|$$

Exemplo 4. *Encontre a aproximação linear da função $g(x) = \sqrt[3]{1 + x}$ em torno de $x = 0$ e use-a para aproximar os números $\sqrt[3]{0{,}95}$ e $\sqrt[3]{1{,}1}$.*

Solução: Primeiramente, precisamos determinar a linearização de $g(x)$. Sendo assim, note que $g'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}$. Logo, $g'(0) = \dfrac{1}{3}$ e como $g(0) = 1$, temos que

$$L(x) = 1 + \frac{1}{3}(x - 0) = 1 + \frac{x}{3}$$

Assim, para valores de x próximos de $x = 0$, a aproximação linear é dada por

$$\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{3}$$

Logo,

$$\sqrt[3]{0{,}95} = \sqrt[3]{1 - 0{,}05} \approx L(-0{,}05) = 1 - \frac{0{,}05}{3} = \frac{2{,}95}{3} \approx 0{,}983333$$

e

$$\sqrt[3]{1{,}1} = \sqrt[3]{1 + 0{,}1} \approx L(0{,}1) = 1 + \frac{1}{30} = \frac{31}{30} \approx 1{,}033333$$

Utilizando uma calculadora, podemos determinar o erro cometido nas aproximações acima. Dessa forma, observe que

$$|f(-0{,}05) - L(-0{,}05)| = |\sqrt[3]{0{,}95} - L(-0{,}05)| \approx |0{,}983047 - 0{,}983333| \approx 0{,}000286$$

e

$$|f(0{,}1) - L(0{,}1)| = |\sqrt[3]{1{,}1} - L(1)| \approx |1{,}032280 - 1{,}033333| \approx 0{,}001053$$

■

Exemplo 5. *Encontre a linearização da função* $f(x) = \dfrac{1}{2x}$ *em* $p = 7$. *Determine a aproximação linear correspondente.*

Solução: Note que a derivada de $f(x)$ é dada por $f'(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$. Sendo assim, $f(7) = \dfrac{1}{14}$ e $f'(7) = -\dfrac{1}{98}$. Portanto,

$$L(x) = f(7) + f'(7)(x - 7) = \frac{1}{14} - \frac{1}{98}(x - 7) = \frac{1}{7} - \frac{x}{98}$$

A aproximação linear correspondente é dada por

$$\frac{1}{2x} \approx \frac{1}{7} - \frac{x}{98}$$

para valores de x próximos a 7. ■

2 Diferencial

Durante nosso estudo, destacamos que $\dfrac{dy}{dx}$ representa apenas uma notação para a derivada. O que faremos a seguir é interpretar $\dfrac{dy}{dx}$ como um quociente entre dois acréscimos. Consideremos o gráfico de uma função derivável $y = f(x)$. Agora, tomemos um ponto $(x, f(x))$ sobre o gráfico e denotemos por Δx um acréscimo em x, como mostrado abaixo:

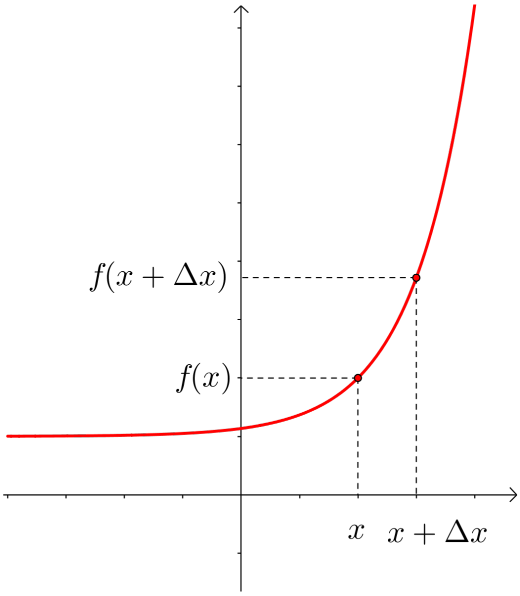

Figura 4:

Chamando dy a variação sofrida pela linearização L de f em p (cujo gráfico é a reta tangente ao gráfico de f em p!), correspondente ao acréscimo $dx = \Delta x$, a partir do ponto p, como ilustrado abaixo

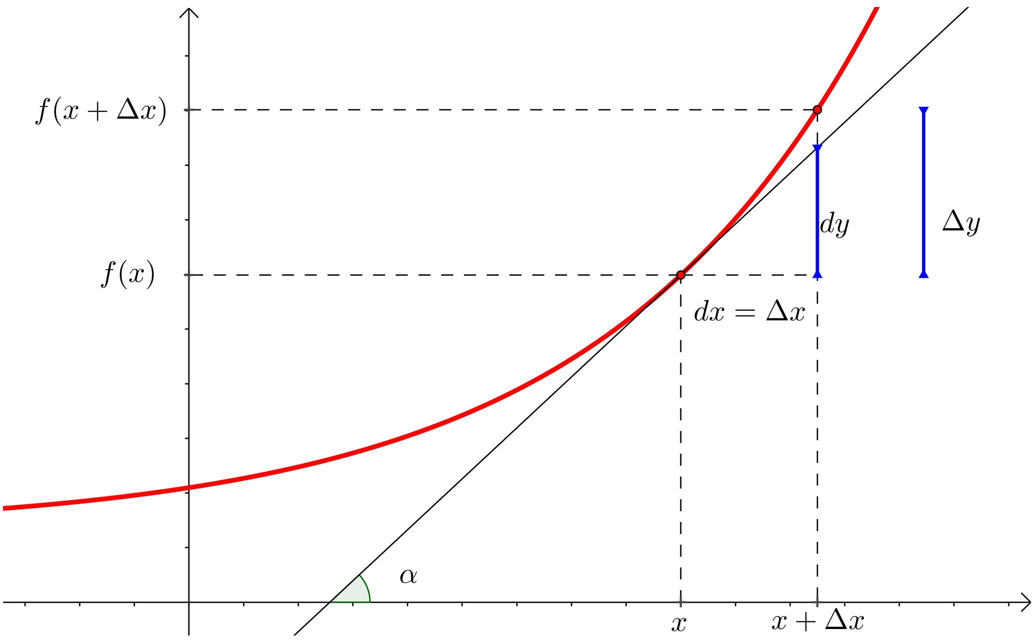

Figura 5:

Lembrando que a derivada é o coeficiente angular da reta tangente, temos que

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{\Delta x}$$

e portanto

$$dy = f'(x)\Delta x \ . \tag{1}$$

Fazendo $\Delta x = dx$, obtemos que

$$dy = f'(x).dx \quad \text{ou simplesmente} \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) \tag{2}$$

Na aula de número 10, exibimos a variação em y como sendo

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

e que a taxa de variação média da função f é dada por

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Como a taxa de variação instantânea de f em relação a x é dada pelo limite da taxa média de variação, tomando Δx cada vez mais próximo de zero e que este limite é a derivada, teremos que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Logo, para Δx muito próximo de zero, podemos considerar

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x) \quad \text{ou ainda} \quad \Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

Dessa forma, para $\Delta x = dx$, obtemos a seguinte aproximação:

$$\Delta y \approx dy = f'(x)dx \tag{3}$$

Segue então que dy é uma boa aproximação para Δy sempre que Δx for muito pequeno. Fixando x, podemos entender (2) como uma função que associa cada valor de $dx \in \mathbb{R}$ a um único $dy \in \mathbb{R}$ dado por $dy = f'(x)dx$. Essa função é chamada **diferencial** de f em x ou de $y = f(x)$. Vejamos alguns exemplos da utilização da diferencial.

Exemplo 6. *Compare os valores de Δy e dy se $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ e x varia de 2 para $2,05$.*

Solução: Calculando Δy. Precisamos determinar $f(2)$ e $f(2,05)$. Sendo assim,

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - 2.2 + 1 = 8 + 4 - 4 + 1 = 9$$

e

$$f(2,05) = (2,05)^3 + (2,05)^2 - 2.(2,05) + 1 = 9,717625$$

Logo,

$$\Delta y = f(2,05) - f(2) = 0,717625$$

Agora, faremos o cálculo de dy. Para isso, note que $dx = 2,05 - 2 = 0,05$. Logo, como $f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$, temos que

$$dy = f'(x)dx = (3x^2 + 2x - 2)dx$$

Em particular, para $x = 2$ e $dx = 0,05$, obtemos que

$$dy = f'(x)dx = (3\,.\,2^2 + 2\,.\,2 - 2)0{,}05 = 14\,.\,0{,}05 = 0{,}7$$

■

Exemplo 7. *A aresta de um cubo tem 10 cm , com um possível erro de medida de 0,1 cm. Use a diferencial para estimar o erro máximo possível no cálculo do volume do cubo.*

Observação 3. *Definimos o erro absoluto cometido em uma medição como sendo*

$$|Valor\ Real - Valor\ Medido\ ou\ aproximado|$$

E o erro relativo é dado por

$$\frac{|Valor\ Real - Valor\ Medido\ ou\ aproximado|}{Valor\ Medido\ ou\ aproximado}$$

Se a medição de tais valores é dada por uma função $y = f(x)$, então o erro absoluto é dado por Δy.

Solução: O volume de um cubo de aresta x é dado por $V = x^3$. O erro absoluto cometido no cálculo do volume do cubo é dado por ΔV e o erro cometido na medição da aresta é $dx = 0{,}1$. Dessa forma, utilizando a aproximação $\Delta V \approx dV$, temos que uma aproximação para o valor de ΔV é:

$$dV = V'(10).dx = 3.10^2\,.\,0{,}1 = 30$$

Então, o erro máximo no cálculo do volume é de $30cm^3$. O erro relativo é dado por

$$\varepsilon = \frac{30}{V(10)} = \frac{30}{1000} = 0{,}03$$

Logo o erro cometido é de 3%. ■

Exemplo 8. *Utilizando a diferencial, calcule um valor aproximado para o acréscimo Δy que a função $y = x^2$ sofre quando passa de $x = 1$ a $x = 1,001$. Calcule o erro cometido na aproximação.*

Solução: A diferencial de y é dada por $dy = f'(x)dx = 2xdx$. Em $x = 1$, temos que $dy = 2dx$. Como $dx = 0,001$, então

$$dy = 0,002$$

O erro que se comete na aproximação $\Delta y \approx dy$ é dado por

$$|\Delta y - dy|$$

Como $\Delta y = (1,001)^2 - 1^2 = 1,002001$, então o erro cometido na aproximação é dado por

$$|1,002001 - 0,002| = 0,000001 = 10^{-6}.$$

■

3 Regra de l'Hôspital

A regra de l'Hôspital, que enunciaremos a seguir, aplica-se a cálculos de limites que apresentam indeterminações do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ e $\dfrac{0}{0}$.

Teorema 1 (Regra de l'Hôspital). *Suponha que f e g sejam deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a (exceto possivelmente em a). Suponha que:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

ou que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad e \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty.$$

Então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou for $+\infty$ ou $-\infty$).

Em outras palavras: A Regra de l'Hôspital diz que o limite de uma função quociente é igual ao limite dos quocientes de suas derivadas, desde que as condições dadas sejam satisfeitas. É muito importante verificar as condições relativas aos limites de f e g antes de usar a Regra de l'Hospital.

Observação 4. *A Regra de l'Hôspital é válida também para os limites laterais e para os limites no infinito.*

Exemplo 9. *Calcule*

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}.$$

Solução: Note que
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]$$
Aplicando a Regra de l'Hôspital, temos:
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}3x^2=12.$$
■

Exemplo 10. *Calcule*
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-6x^3+8x-3}{x^4-1}.$$
Solução: Note que
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-6x^3+8x-3}{x^4-1}=\left[\frac{0}{0}\right]$$
Aplicando a Regra de l'Hôspital, temos:
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-6x^3+8x-3}{x^4-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^5-6x^3+8x-3)'}{(x^4-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{5x^4-18x^2+8}{4x^3}=-\frac{5}{4}.$$
■

Exemplo 11. *Calcule*
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}.$$
Solução: Note que
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]$$
Aplicando a Regra de l'Hôspital, temos:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a.\cos(ax)}{1}=a.$$
■

Observação 5. *Algumas vezes é necessário aplicarmos várias vezes a Regra até eliminarmos a indeterminação, como no exemplo a seguir.*

Exemplo 12. *Calcule*
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-x^3-3x^2+5x-2}{x^3-3x^2+3x-1}.$$
Solução: Veja que
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-x^3-3x^2+5x-2}{x^3-3x^2+3x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]$$
Aplicando a Regra de l'Hôspital, temos:
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-x^3-3x^2+5x-2}{x^3-3x^2+3x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{4x^3-3x^2-6x+5}{3x^2-6x+3}=\left[\frac{0}{0}\right]$$
Aplicando novamente a Regra de l'Hôspital no resultado anterior, temos:
$$\lim_{x\to 1}\frac{4x^3-3x^2-6x+5}{3x^2-6x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{12x^2-6x-6}{6x-6}=\left[\frac{0}{0}\right]$$
Aplicando mais uma vez a Regra de l'Hôspital no resultado anterior, temos:
$$\lim_{x\to 1}\frac{12x^2-6x-6}{6x-6}=\lim_{x\to 1}\frac{24x-6}{6}=\frac{18}{6}=3.$$
■

Exemplo 13. *Calcule*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3}.$$

Solução: Como $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg}(x) - x = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$, temos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Aplicando a Regra de l'Hôspital, temos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Aplicando a Regra de l'Hôspital no resultado anterior, temos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2(x) - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2(x)\operatorname{tg}(x)}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}.\frac{\sec^2(x)\operatorname{tg}(x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Aplicando a Regra de l'Hôspital, temos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{3}.\frac{\sec^2(x)\operatorname{tg}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}.\frac{\left(\sec^4(x) + 2\sec^2(x)\operatorname{tg}^2(x)\right)}{1} = \frac{1}{3}.$$

■

Observação 6. *É importante verificar se o quociente de fato tem a forma* $\frac{0}{0}$ *ou* $\frac{\infty}{\infty}$ *antes de aplicarmos a regra, para não incorrermos em erro.*

Exemplo 14. *Calcule*

$$\lim_{x\to \pi^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1 - \cos(x)}.$$

Solução: Temos que:

$$\lim_{x\to \pi^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1 - \cos(x)} = \frac{0}{2} = 0.$$

Portanto, não há indeterminação.

■

Exemplo 15. *Calcule*

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right).$$

Solução: Veja que:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right) = [\infty - \infty]$$

e portanto nada podemos afirmar inicialmente. Observe, no entanto, que

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x\operatorname{sen}(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Aplicando então a Regra de l'Hôspital, temos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{\operatorname{sen}(x) + x\cos(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Aplicando então novamente a Regra de l'Hôspital, obtemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{\operatorname{sen}(x) + x\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x) + \cos(x) - x\operatorname{sen}(x)} = \frac{0}{2} = 0.$$

■

Exemplo 16. *Calcule* $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

Solução: Note que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$$

Pela regra de l'Hôspital, temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} \quad = \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1} = 1$$

Logo, como $g(u) = \ln u$ é contínua em $u = 1$, temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \ln 1 = 0$$

■

Exemplo 17. *Calcule*

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\text{sen}(x)}\right).$$

Solução: Observe que

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\text{sen}(x)}\right) = [\infty - \infty]$$

Portanto inicialmente nada podemos concluir. No entanto, reescrevendo o limite dado, obtemos

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\text{sen}(x)}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{x^2}{\text{sen}(x)}\right).$$

Temos agora que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Como, utilizando a Regra de l'Hôspital, temos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\text{sen}(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{\cos(x)} = \frac{0}{2} = 0,$$

segue que

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1 - \frac{x^2}{\text{sen}(x)}\right) = 1 - 0 = 1$$

e portanto que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{x^2}{\text{sen}(x)}\right) = [+\infty \cdot 1] = +\infty.$$

■

Exemplo 18. *Calcule*

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\sec(x) - \text{tg}(x)).$$

Solução: Como

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\sec(x) - \text{tg}(x)) = [\infty - \infty]$$

vamos reescrever o limite dado:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\sec(x) - \text{tg}(x)) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{1}{\cos(x)} - \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\right) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - \text{sen}(x)}{\cos(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Aplicando a Regra de l'Hôspital, temos:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - \text{sen}(x)}{\cos(x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{-\cos(x)}{-\text{sen}(x)} = \frac{0}{1} = 0.$$

■

Exemplo 19 (Limite Trigonométrico Fundamental). *Verifique, utilizando a Regra de L'Hôspital, que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=1.$$

Solução: Observe que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Aplicando a Regra de l'Hôspital, temos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1}=1.$$

■

Exemplo 20. *Calcule o limite:*

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{e^{-x}}{x^3}$$

Solução: Note que

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{e^{-x}}{x^3}=\left[\frac{+\infty}{-\infty}\right]$$

Logo, pela Regra de l'Hôspital, temos que

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{e^{-x}}{x^3}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-e^{-x}}{3x^2}=\left[\frac{-\infty}{+\infty}\right]$$

Aplicando novamente a regra, obtemos que

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{-e^{-x}}{3x^2}=\lim_{x\to -\infty}\frac{e^{-x}}{6x}=\left[\frac{+\infty}{-\infty}\right]$$

Finalmente, utilizando a Regra uma última vez, temos que

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{e^{-x}}{6x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-e^{-x}}{6}=-\infty$$

■

Resumo

Faça um resumo dos principais resultados vistos nesta aula, destacando as definições dadas.

Aprofundando o conteúdo

Leia mais sobre o conteúdo desta aula nas páginas $226-229$ do livro texto.

Sugestão de exercícios

Resolva os exercícios das páginas $229-231$ do livro texto.