5.2.1 Pontos de não-diferenciabilidade

A derivada nem sempre existe, por razões geométricas particulares: a reta tangente não é sempre bem definida. Vejamos alguns exemplos:

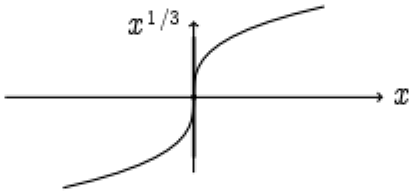
Exemplo 5.4. Considere $f(x) := x^{1/3}$, definida para todo $x \in \mathbb{R}$ (veja Seção 2.4.2). Para um $a \neq 0$ qualquer, calculemos (com a mudança $t = x^{1/3}$)

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^{1/3} - a^{1/3}}{x - a} = \lim_{t \to a^{1/3}} \frac{t - a^{1/3}}{t^3 - a} = \lim_{t \to a^{1/3}} \frac{1}{t^2 + a^{1/3}t + a^{2/3}} = \frac{1}{3a^{2/3}} .$$

Se $a = 0$, é preciso calcular:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^{1/3} - 0^{1/3}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2/3}} = +\infty .$$

De fato, a reta tangente ao gráfico em $(0, 0)$ é vertical:



Assim, $x^{1/3}$ é derivável em qualquer $a \neq 0$, mas não em $a = 0$.

Exemplo 5.5. Considere agora $f(x) = |x|$, também definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $a > 0$, então

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{|x| - |a|}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{x - a} = +1 .$$

Por outro lado, se $a < 0$,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{|x| - |a|}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{-x - (-a)}{x - a} = -1 .$$

Então $|x|$ é derivável em qualquer $a \neq 0$. Mas observe que em $a = 0$,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = +1 , \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = -1 .$$

Como os limites laterais não coincidem, o limite bilateral não existe, o que significa que $f(x) = |x|$ *não é derivável (apesar de ser contínua) em* $a = 0$. De fato, o gráfico mostra que na origem $(0, 0)$, a reta tangente não é bem definida: