PROJETO Newton

CÁLCULO I

Prof. Marcos Diniz | Prof. André Almeida | Prof. Edilson Neri Júnior | Prof. Emerson Veiga | Prof. Tiago Coelho

Aula nº 28: Integrais Trigonométricas. Substituição Trigonométrica.

Objetivos da Aula

- Calcular integrais envolvendo funções trigonométricas;
- Apresentar a substituição trigonométrica.

1 Integrais Trigonométricas

Iniciaremos com o seguinte exemplo:

Exemplo 1. *Calcule a integral indefinida*

$$\int sen^3 x\, dx.$$

Solução: Note que não podemos fazer a substituição $u = sen\, x$, pois teríamos de obter que $du = \cos x\, dx$, isto é, precisaríamos ter uma função extra $\cos x$. Com isso, uma forma de contornar esse problema é utilizar as relações trigonométricas do tipo $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, porque assim podemos isolar o termo $\operatorname{sen}^2 x$:

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$$

Dessa forma, podemos escrever a integral do nosso exemplo como

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x\, dx &= \int \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int \operatorname{sen} x (1 - \cos^2 x)\, dx \\
&= \int \operatorname{sen} x\, dx - \int \operatorname{sen} x \cos^2 x\, dx \\
&= -\cos x - \int \operatorname{sen} x \cos^2 x\, dx
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $u = \cos x$, temos que $du = -\operatorname{sen} x\, dx$. Logo,

$$\int \operatorname{sen}^3 x\, dx = -cos x + \int u^2\, du = -\cos x + \frac{u^3}{3} + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$$

■

Dessa forma, podemos estabelecer algumas regras para calcular as primitivas de potências de seno e cosseno. Seja n um número natural. Então

$$\int \cos^n x\, dx = \begin{cases} \text{Se n for ímpar faça } u = \operatorname{sen} x \text{ e } \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x \\ \text{Se n for par faça } \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) \end{cases}$$

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = \begin{cases} \text{Se n for ímpar faça } u = \cos x \text{ e } \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \\ \text{Se n for par faça } \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) \end{cases}$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2. *Calcule* $\int \cos^5 x\, dx.$

Solução: Note que

$$\begin{aligned}
\int \cos^5 x\, dx &= \int \cos^4 x\, \cos x\, dx = \int (\cos^2 x)^2 \cos\, dx \\
&= \int \left(1-\text{sen}^2 x\right)^2 \cos x\, dx \\
&= \int \left(1-2\text{sen}^2 x+\text{sen}^4 x\right) \cos x\, dx \\
&= \int \left(\cos x-2\text{sen}^2 x\cos x+\text{sen}^4 x\cos x\right)\, dx \\
&= \int \cos x\, dx - 2\int \text{sen}^2 x\cos x\, dx + \int \text{sen}^4 x\, cos x\, dx \\
&= \text{sen}\, x - 2\int \text{sen}^2 x\cos x\, dx + \int \text{sen}^4 x\, cos x\, dx
\end{aligned}$$

Fazendo $u = \text{sen}\, x$, temos que $du = \cos x\, dx$. Sendo assim,

$$\int \cos^5 x\, dx = \text{sen}\, x - 2\int u^2\, dx + \int u^4\, du = \text{sen} x - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C = \text{sen}\, x - \frac{\text{sen}^3 x}{3} + \frac{\text{sen}^5 x}{5} + C$$

■

Exemplo 3. *Calcule* $\int sen^4 x\, dx.$

Solução: Note que

$$\begin{aligned}
\int (\text{sen}^2\, x)^2\, dx &= \int \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)^2\, dx \\
&= \int \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{4}\cos^2(2x)\right)\, dx \\
&= \frac{1}{4}\int (1-2\cos(2x)+\cos^2(2x)), dx
\end{aligned}$$

Como $\cos^2(2x) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(4x)$, então

$$\int \text{sen}^4\, x\, dx = \frac{x}{4} - \frac{\text{sen}\,(2x)}{4} + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(4x)\right)\, dx = \frac{3x}{8} - \frac{\text{sen}\,(2x)}{4} + \frac{\text{sen}\,(4x)}{32} + C$$

■

Exemplo 4. *Calcule* $\int \cos^4 x\, dx.$

Note que

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x\, dx &= \int (\cos^2 x)^2\, dx = \int \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)\right)^2\, dx \\
&= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{4}\cos^2(2x)\right)\, dx \\
&= \frac{x}{4}+\frac{\text{sen}\,(2x)}{4}+\frac{1}{4}\int \cos^2(2x)\, dx \\
&= \frac{x}{4}+\frac{\text{sen}\,(2x)}{4}+\frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(4x)\right)\, dx \\
&= \frac{3x}{8}+\frac{\text{sen}\,(2x)}{4}+\frac{\text{sen}\,(4x)}{32}+C
\end{aligned}$$

Em busca de uma generalização para a integral das potências de seno e cosseno temos as seguintes fórmulas de recorrência que podem ser provadas utilizando integral por partes. Sendo $n \geq 2$, temos que

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^n x\,dx &= -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx \\
\int \cos^n x\,dx &= \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx
\end{aligned}$$

Exemplo 5. *Calcule* $\int \cos^5 x\,dx$.

Solução: Usando a fórmula de recorrência, temos que

$$\int \cos^5 x\,dx = \frac{\cos^4 x \operatorname{sen} x}{5} + \frac{4}{5}\int \cos^3 x\,dx$$

Usando mais uma vez, temos que

$$\int \cos^3 x\,dx = \frac{\cos^2 x \operatorname{sen} x}{3} + \frac{2}{3}\int \cos x\,dx = \frac{\cos^2 x \operatorname{sen} x}{3} + \frac{2 \operatorname{sen} x}{3} + C$$

Logo,

$$\int \cos^5 x\,dx = \frac{\cos^4 x \operatorname{sen} x}{5} + \frac{4\cos^2 x \operatorname{sen} x}{15} + \frac{8 \operatorname{sen} x}{15} + C$$

■

Agora, vamos determinar regras para calcular a integral de produtos de potências de seno e cosseno. Sejam m e n números naturais e considere a seguinte integral

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\,dx$$

(i) Se n for ímpar, faça $u = cos\,x$;

(ii) Se m for ímpar, faça $u = \operatorname{sen} x$;

(iii) Se n e m forem pares não nulos, faça $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ ou $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$. Ou então, faça $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$ e $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$.

Vejamos os seguintes exemplos:

Exemplo 6. *Determine* $\int sen^3(3x)\cos^3(3x)\,dx$.

Solução: Faremos a substituição $v = 3x$, com $dv = 3\,dx$. Logo,

$$\int \operatorname{sen}^3(3x)\cos^3(3x)\,dx = \frac{1}{3}\int \operatorname{sen}^3 v \cos^3 v\,dv$$

Como ambos os expoentes são ímpares, podemos escolher fazer $u = \cos v$ ou $u = \operatorname{sen} v$. Escolhemos $u = \operatorname{sen} v$ e, assim, $du = \cos v\,dv$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 v \cos^3 v\,dv &= \int \operatorname{sen}^3 v \cos^2 v \cos v\,dv \\
&= \int \operatorname{sen}^3 v(1 - \operatorname{sen}^2 v)\cos v\,dv \\
&= \int \operatorname{sen}^3 v \cos v\,dv - \int \operatorname{sen}^5 v \cos v\,dv \\
&= \int u^3\,du - \int u^5\,du \\
&= \frac{u^4}{4} - \frac{u^6}{6} + C \\
&= \frac{\operatorname{sen}^4 v}{4} - \frac{\operatorname{sen}^6 v}{6} + C \\
&= \frac{\operatorname{sen}^4(3x)}{4} - \frac{\operatorname{sen}^6(3x)}{6} + C
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int \operatorname{sen}^3(3x)\cos^3(3x)\,dx = \frac{\operatorname{sen}^4(3x)}{12} - \frac{\operatorname{sen}^6(3x)}{18} + C$$

■

Exemplo 7. *Calcule* $\int sen^2\, x \cos^2 x\, dx$.

Solução: Note que

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2\, x\, dx &= \int \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right]\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\right] dx \\
&= \int \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2(2x)\right] dx \\
&= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2(2x))\, dx \\
&= \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2(2x)\, dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4x)\right) dx \\
&= \frac{x}{8} - \frac{\operatorname{sen}(4x)}{32} + C
\end{aligned}$$

Existem outras formas de resolver essa questão? Verifique!!! ■

Exemplo 8. *Determine* $\int sen^5\, x \cos^2\, x\, dx$.

Solução: Observe que

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \operatorname{sen} x \cos^2 x\, dx \\
&= \int (1-\cos^2\, x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $u = \cos x$, temos que $du = -\operatorname{sen} x\, dx$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\, dx &= -\int (1-u^2)^2 u^2\, du = -\int (1-2u^2+u^4)u^2\, du \\
&= \int (-u^2+2u^4-u^6)\, du = -\frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + C \\
&= -\frac{\cos^3\, x}{3} + \frac{2\cos^5\, x}{5} - \frac{\cos^7\, x}{7} + C
\end{aligned}$$

■

Em alguns casos, podemos calcular integrais de produto de senos e cossenos da forma

$$\int \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)\, dx \qquad \int \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)\, dx \qquad \int \cos(mx)\cos(nx)\, dx$$

Para isso, utilize as identidades

(i) $\operatorname{sen}(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(m-n)x + \operatorname{sen}(m+n)x\right]$

(ii) $\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]$

(iii) $\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right]$

Exemplo 9. *Calcule* $\int sen\,(4x)\cos(5x)\,dx.$

Solução: Observe que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(4x)\cos(5x) &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(4-5)x+\operatorname{sen}(4+5)x\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(-x)+\operatorname{sen}(9x)\right]=\frac{1}{2}(\operatorname{sen}(9x)-\operatorname{sen}(x))\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}\,(4x)\cos(5x)\,dx &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(9x)-\operatorname{sen}(x))\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}9x\,dx-\frac{1}{2}\int \operatorname{sen}x\,dx\\ &= \frac{\cos x}{2}-\frac{\cos(9x)}{18}+C\end{aligned}$$

■

Exemplo 10. *Calcule* $\int sen\,(3x)sen\,(6x)\,dx.$

Como

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}3x\cos\,6x &= \frac{1}{2}\left[\cos(2-6)\,x-\cos(3+6)\,x\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\cos(-3x)-\cos(9x)\right]\\ &= \frac{1}{2}(\cos(3x)-\cos(9x))\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}\,(3x)\operatorname{sen}\,(6x)\,dx &= \frac{1}{2}\int(\cos(3x)-\cos(9x))\,dx\\ &= \frac{\operatorname{sen}3x}{6}-\frac{\operatorname{sen}9x}{18}+C\end{aligned}$$

■

Exemplo 11. *Calcule* $\int \cos(4\pi\,x)\cos(\pi\,x)\,dx.$

Solução: Note que

$$\cos(4\pi\,x)\cos(\pi\,x)=\frac{1}{2}(\cos(4\pi-\pi)x+\cos(4\pi+\pi)x)=\frac{1}{2}(\cos(3\pi\,x)+\cos(5\pi\,x))$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \cos(4\pi\,x)\cos(\pi\,x)\,dx &= \frac{1}{2}\int(cos(3\pi\,x)+\cos(5\pi\,x))\,dx\\ &= \frac{1}{2}(\frac{\operatorname{sen}3\pi\,x}{3\pi}+\frac{\operatorname{sen}5\pi\,x}{5\pi})\\ &= \frac{\operatorname{sen}3\pi\,x}{6\pi}+\frac{\operatorname{sen}5\pi\,x}{10\pi}\end{aligned}$$

■

Agora, vamos verificar técnicas para calcular as integrais de potências de secante e tangente. Considere as integrais da forma:

$$\int \sec^m x \operatorname{tg}^n x \, dx$$

Então,

(i) Se m é par, então mantenha um fator $\sec^2 x$ e use a relação $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ para expressar os fatores restantes. Em seguida, faça $u = \operatorname{tg} x$.

(ii) Se n é ímpar, mantenha um fator $\sec x \operatorname{tg} x$ e utilize a relação $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ para expressar os outros fatores. Em seguida faça a substituição $u = \sec x$.

(iii) Os outros casos não possuem regras tão simples e talvez seja necessário utilizar as integrais indefinidas de tangente e secante.

Vejamos alguns exemplos

Exemplo 12. *Calcule* $\int tg^5 x \sec^2 x \, dx$.

Solução: Fazendo $u = \operatorname{tg} x$, temos que $du = \sec^2 x \, dx$, temos que

$$\int \operatorname{tg}^5 x \sec^2 x \, dx = \int u^5 \, du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} + C$$

■

Exemplo 13. *Calcule* $\int \sec^5 x \, tg \, x \, dx$.

Solução: Note que

$$\int \sec^5 x \operatorname{tg} x \, dx = \int \sec^4 x \sec x \operatorname{tg} x \, dx$$

Logo, fazendo $u = \sec x$, temos que $du = \sec x \operatorname{tg} x \, dx$, temos que

$$\int \sec^5 x \operatorname{tg} x \, dx = \int u^4 \, du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sec^5 x}{5} + C$$

■

Exemplo 14. *Calcule* $\int tg^3 \, x \, dx$.

Solução: Note que

$$\operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x \operatorname{tg}^2 x = (\sec^2 x - 1)\operatorname{tg} x = \sec^2 x \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x$$

Logo,

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \int (\sec^2 x \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x) \, dx = \int \sec^2 x \operatorname{tg} x \, dx + ln|\cos x|$$

Fazendo $u = \operatorname{tg} x$, temos que $du = \sec^2 x \, dx$. Então

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \int u \, du - ln|\cos x| = \frac{u^2}{2} - \ln|\cos x| + C = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$$

■

Exemplo 15. *Determine* $\int \sec^4 x \, dx$.

Solução: Observe que

$$\sec^4 x = (\sec^2 x)\sec^2 x = (1 + \operatorname{tg}^2 x)\sec^2 x = \sec^2 x + \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x$$

Logo,

$$\int \sec^4 x\,dx = \int \sec^2 x\,dx + \int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + \int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x\,dx$$

Fazendo a mudança $u = \operatorname{tg} x$, temos que $du = \sec^2 x\,dx$. Logo,

$$\int \sec^4 x\,dx = \operatorname{tg} x + \int u^2\,du = \operatorname{tg} x + \frac{u^3}{3} + C = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C$$

■

Para calcular as integrais de potências de tangente e secante, utilizamos as seguintes fórmulas de recorrência para $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \int \sec^n x\,dx &= \frac{\sec^{n-2} x \operatorname{tg} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\,dx \\ \int \operatorname{tg}^n x\,dx &= \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx \end{aligned}$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 16. *Calcule* $\int tg^3\, x\,dx$.

Solução: Utilizando a fórmula de recorrência, temos que

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \int \operatorname{tg} x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$$

■

Exemplo 17. *Calcule* $\int \sec^3 x\,dx$.

Solução: Utilizando a fórmula de recorrência, temos que

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{2} + \frac{1}{2}\int \sec x\,dx = \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

■

Exemplo 18. *Calcule* $\int tg^2\, x \sec x\,dx$.

Solução: Note que

$$\operatorname{tg}^2 x \sec x = (\sec^2 x - 1)\sec x = \sec^3 x - \sec x$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^2 x \sec x\,dx &= \int \sec^3 x\,dx - \int \sec x\,dx \\ &= \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{2} - \frac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C \end{aligned}$$

■

2 Substituição Trigonométrica

Ao resolver certas integrais

$$\int f(x)\,dx$$

não conseguiremos fazer uma substituição comum, como fizemos em aulas passadas. Sendo assim, se faz necessário escrever a variável x como uma função inversível e derivável φ em função de uma variável u, com inversa derivável. Logo, fazendo a mudança $x = \varphi(u)$, então $du = \varphi'(u)\,du$ e assim:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du$$

Após calcular a integral indefinida no 2º membro, deve-se voltar à variável x, através da inversa de φ. Essa técnica é chamada também de **substituição inversa**. Nesta seção, estamos interessados nos casos em que a função φ é trigonométrica, chamando essa técnica de **substituição trigonométrica**.

As principais substituições trigonométricas são as exibidas nos seguintes exemplos.

Exemplo 19. *Calcule* $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$

Solução: Como $1 - \operatorname{sen}^2 u = \cos^2 u$, então podemos fazer a substituição trigonométrica $x = \operatorname{sen} u$ e assim, obtemos que

$$x = \operatorname{sen} u \quad \left(-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}\right), \quad dx = \cos u\,du$$

Então,

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}\cos u\,du = \int \sqrt{\cos^2 u}\,\cos u\,du$$

Como

$$\sqrt{\cos^2 u} = |\cos u| = \cos u$$

pois $u \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Desse modo,

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \cos^2 u\,du \\
&= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2u)\right)\,du \\
&= \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2u) + C \\
&= \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} u\cos u + C
\end{aligned}$$

Agora, devemos retornar à variável x, logo, vamos utilizar o fato de que se $x = \operatorname{sen} u$ então $u = \operatorname{arcsen} x$ e também que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} u &= \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x \\
\cos u &= \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u} = \sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C \quad -1 < x < 1$$

■

Exemplo 20. *Calcule* $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx$

Solução: Fazendo $x = \operatorname{tg} u$, temos que $du = \sec^2 u\, du$, com $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Então,

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+x^2}\, dx &= \int \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}\sec^2 u\, du \\
&= \int \sqrt{\sec^2 u}\sec^2 u\, du \\
&= \int \sec^3 u\, du \\
&= \frac{\sec u \operatorname{tg} u}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C
\end{aligned}$$

Agora, se $x = \operatorname{tg} u$ então $u = \operatorname{arctg} u$, e também,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} u &= \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \\
\sec u &= \sec(\operatorname{arctg} x) = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \sqrt{1+x^2}
\end{aligned}$$

Então,

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + C$$

■

Exemplo 21. *Calcule* $\int \sqrt{x^2-1}\, dx$.

Solução: Fazendo $u = \sec u$, onde $0 < u < \dfrac{\pi}{2}$ ou $\pi < u < \dfrac{3\pi}{2}$. Logo, temos que $du = \sec u \operatorname{tg} u\, du$. Dessa forma

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2-1}\, dx &= \int \sqrt{sec^2 u - 1}\sec u \operatorname{tg} u\, du \\
&= \int \sqrt{\operatorname{tg}^2 u}\operatorname{tg} u \sec u\, du \\
&= \int \operatorname{tg}^2 u \sec u\, du \\
&= \frac{\sec u \operatorname{tg} u}{2} - \frac{1}{2}\ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C
\end{aligned}$$

Como $x = \sec u$, então $u = \operatorname{arcsec} x$, logo,

$$\begin{aligned}
\sec u &= \sec(\operatorname{arcsec} x) = x \\
\operatorname{tg} u &= \operatorname{tg}(\operatorname{arcsec} x) = \sqrt{\sec^2(\operatorname{arcsec} x) - 1} = \sqrt{x^2-1}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int \sqrt{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C$$

■

Generalizando, podemos adotar:

Expressão	Substituição
$\sqrt{a^2-x^2},\ a>0$	$x = a \operatorname{sen} u \quad -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}$
$\sqrt{a^2+x^2},\ a>0$	$x = a \operatorname{tg} u \quad -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$
$\sqrt{x^2-a^2},\ a>0$	$x = a \sec u\ 0 \le u < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \le u < \frac{3\pi}{2}$

Vejamos mais alguns exemplos:

Exemplo 22. *Calcule a área do círculo de raio r e centro na origem.*

Solução: Pela simetria do círculo podemos afirmar que

$$\text{Área} = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

Logo,

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int_0^r \sqrt{r^2\left(1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2\right)}\, dx = r\int_0^r \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\, dx$$

Agora, fazendo a mudança

$$\frac{x}{r} = \operatorname{sen} u \quad \Rightarrow \quad x = r \operatorname{sen} u$$

Logo,

$$dx = r\cos u\, du, \quad x = r \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}, \quad x = 0 \Rightarrow u = 0$$

E assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx &= r\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - sen^2 u} r\cos u\, du \\
&= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\, du \\
&= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2u)\right) du \\
&= r^2 \left[\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{Área} = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 4\frac{\pi r^2}{4} = \pi r^2$$

■

Exemplo 23. *Encontre* $\displaystyle\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{\frac{3}{2}}}\, dx.$

Solução: Inicialmente faremos a mudança $v = 2x$ e obteremos que $dv = 2\, dx$ e também,

$$x = 0 \Rightarrow v = 0 \quad x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow v = 3\sqrt{3}$$

Logo, podemos reescrever a integral como

$$\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{\frac{3}{2}}}\, dx = \frac{1}{16}\int_0^{3\sqrt{3}} \frac{v^3}{(v^2+9)^{\frac{3}{2}}}\, dv$$

Utilizando a tabela apresentada acima, fazemos $v = 3\operatorname{tg} u$. Logo, $dv = 3\sec^2 u\, du$ e

$$v = 3\sqrt{3} \Rightarrow u = \frac{\pi}{3} \quad v = 0 \Rightarrow u = 0$$

Assim:

$$\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{\frac{3}{2}}}\, dx = \frac{1}{16}\frac{1}{\cancel{27}}.\cancel{27}.3\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 u}{\sec^3 u}\sec^2 u\, du = \frac{3}{16}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen}^3 u}{\cos^2 u}\, du$$

Logo:

$$\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{3}{16}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos^2 u}{\cos^2 u}\operatorname{sen} u\,du$$

Fazendo a substituição $w = \cos u$, temos que $dw = -\operatorname{sen} u\,du$ e os novos limites de integração inferior e superior são 1 e $\frac{1}{2}$, respectivamente. Então,

$$\int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{3}{16}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1-u^2}{u^2}\,du = -\frac{3}{16}\left[u+\frac{1}{u}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{3}{32}$$

■

Resumo

Faça um resumo dos principais resultados vistos nesta aula, destacando as definições dadas.

Aprofundando o conteúdo

Leia mais sobre o conteúdo desta aula nas páginas $420-423$ do livro texto.

Sugestão de exercícios

Resolva os exercícios das páginas $423-425$ na seção de apêndices do livro texto.