7.4 Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

Nesta seção mostraremos como integrar qualquer função racional (um quociente de polinômios) expressando-a como uma soma de frações mais simples, chamadas *frações parciais*, que já sabemos como integrar. Para ilustrarmos o método, observe que, levando as frações $2/(x-1)$ e $1/(x+2)$ a um denominador comum, obtemos

$$\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}=\frac{2(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{x+5}{x^2+x-2}$$

Se agora revertermos o procedimento, veremos como integrar a função no lado direito desta equação:

$$\int\frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx=\int\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=2\ln|x-1|-\ln|x+2|+C$$

Para vermos como o método de frações parciais funciona em geral, consideremos a função racional

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde P e Q são polinômios. É possível expressar f como uma soma de frações mais simples, desde que o grau de P seja menor que o grau de Q. Essa função racional é denominada *própria*. Lembre-se de que se

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

onde $a_n\neq 0$, então o grau de P é n e escrevemos $\text{gr}(P)=n$.

Se f for *imprópria*, isto é, $\text{gr}(P)\geqslant\text{gr}(Q)$, então devemos fazer uma etapa preliminar, dividindo Q por P (por divisão de polinômios) até o resto $R(x)$ ser obtido com $\text{gr}(R)<\text{gr}(Q)$. O resultado da divisão é

$$\boxed{1}\qquad f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

onde S e R também são polinômios.

Como o exemplo a seguir mostra, algumas vezes essa etapa preliminar é tudo de que precisamos.

EXEMPLO 1 Encontre $\displaystyle\int\frac{x^3+x}{x-1}\,dx$.

$$\begin{array}{r|l} & x^2+x+2 \\ \hline x-1 & x^3\qquad\;+x \\ & x^3-x^2 \\ & \quad x^2+x \\ & \quad x^2-x \\ & \qquad 2x \\ & \qquad 2x-2 \\ & \qquad\quad 2 \end{array}$$

SOLUÇÃO Como o grau do numerador é maior que o grau do denominador, primeiro devemos realizar a divisão. Isso nos permite escrever

$$\int\frac{x^3+x}{x-1}\,dx=\int\left(x^2+x+2+\frac{2}{x-1}\right)dx$$
$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+2\ln|x-1|+C$$

A próxima etapa é fatorar o denominador $Q(x)$ o máximo possível. É possível demonstrar que qualquer polinômio Q pode ser fatorado como um produto de fatores lineares (da forma $ax+b$) e fatores quadráticos irredutíveis (da forma ax^2+bx+c, onde $b^2-4ac<0$). Por exemplo, se $Q(x)=x^4-16$, poderíamos fatorá-lo como

$$Q(x)=(x^2-4)(x^2+4)=(x-2)(x+2)(x^2+4)$$

A terceira etapa é expressar a função racional própria $R(x)/Q(x)$ (da Equação 1) como uma soma das **frações parciais** da forma

$$\frac{A}{(ax+b)^i} \quad \text{ou} \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^j}$$

Um teorema na álgebra garante que é sempre possível fazer isso. Explicamos os detalhes para os quatro casos que ocorrem.

CASO I O denominador $Q(x)$ é um produto de fatores lineares distintos.

Isso significa que podemos escrever

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_kx + b_k)$$

onde nenhum fator é repetido (e nenhum fator é múltiplo constante do outro). Nesse caso, o teorema das frações parciais afirma que existem constantes $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tais que

$$\boxed{2} \qquad \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx+b_k}$$

Essas constantes podem ser determinadas como no exemplo seguinte.

EXEMPLO 2 Calcule $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx.$

SOLUÇÃO Como o grau do numerador é menor que o grau do denominador, não precisamos dividir. Fatoramos o denominador como

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x-1)(x+2)$$

Como o denominador tem três fatores lineares distintos, a decomposição em frações parciais do integrando $\boxed{2}$ tem a forma

$$\boxed{3} \qquad \frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{x+2}$$

Um outro método para encontrar A, B e C é dado na observação após este exemplo.

Para determinarmos os valores de A, B e C, multiplicamos os lados dessa equação pelo produto dos denominadores, $x(2x-1)(x+2)$, obtendo

$$\boxed{4} \qquad x^2 + 2x - 1 = A(2x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(2x-1)$$

Expandindo o lado direito da Equação 4 e escrevendo-a na forma padrão para os polinômios, temos

$$\boxed{5} \qquad x^2 + 2x - 1 = (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A$$

Os polinômios na Equação 5 são idênticos, então seus coeficientes devem ser iguais. O coeficiente x^2 do lado direito, $2A + B + 2C$, deve ser igual ao coeficiente de x^2 do lado esquerdo, ou seja, 1. Do mesmo modo, os coeficientes de x são iguais e os termos constantes também. Isso resulta no seguinte sistema de equações para A, B e C:

$$\begin{aligned} 2A + B + 2C &= 1 \\ 3A + 2B - C &= 2 \\ -2A &= -1 \end{aligned}$$

Poderíamos conferir nosso resultado calculando o denominador comum dos termos e depois somando-os.

A Figura 1 mostra os gráficos do integrando no Exemplo 2 e de sua integral indefinida (com $K = 0$). Qual é qual?

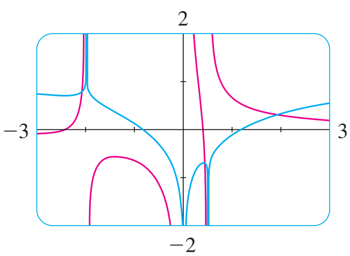

FIGURA 1

Resolvendo, obtemos $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{5}$ e $C = -\frac{1}{10}$, e assim

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\, dx = \int \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{10}\,\frac{1}{x + 2} \right) dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \ln |x| + \tfrac{1}{10} \ln |2x - 1| - \tfrac{1}{10} \ln |x + 2| + K$$

Ao integrarmos o termo do meio, fizemos mentalmente a substituição $u = 2x - 1$, que resulta em $du = 2\, dx$ e $dx = du/2$.

OBSERVAÇÃO Podemos usar um método alternativo para encontrar os coeficientes A, B e C no Exemplo 2. A Equação 4 é uma identidade; é verdadeira para cada valor de x. Vamos escolher valores de x que simplificam a equação. Se colocarmos $x = 0$ na Equação 4, então o segundo e terceiro termos do lado direito desaparecerão, e a equação será $-2A = -1$, ou $A = \frac{1}{2}$. Da mesma forma, $x = \frac{1}{2}$ dá $5B/4 = \frac{1}{4}$ e $x = -2$ resulta em $10C = 1$, assim, $B = \frac{1}{5}$ e $C = -\frac{1}{10}$. (Você pode argumentar que a Equação 3 não é válida para $x = 0, \frac{1}{2}$ ou -2, então, por que a Equação 4 deveria ser válida para aqueles valores? Na verdade, a Equação 4 é válida para todos os valores de x, até para $x = 0, \frac{1}{2}$ e -2. Veja o Exercício 71 para obter uma explicação.)

EXEMPLO 3 Encontre $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$, onde $a \neq 0$.

SOLUÇÃO O método das frações parciais fornece

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x - a)(x + a)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a}$$

e, portanto, $$A(x + a) + B(x - a) = 1$$

Usando o método da observação anterior, colocamos $x = a$ nessa equação e obtemos $A(2a) = 1$, assim, $A = 1/(2a)$. Se colocarmos $x = -a$, obteremos $B(-2a) = 1$, assim, $B = -1/(2a)$. Logo,

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2a} \left(\ln |x - a| - \ln |x + a| \right) + C$$

Como $\ln x - \ln y = \ln(x/y)$, podemos escrever a integral como

6 $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$$

Veja os Exercícios 57–58 para obter formas de usar a Fórmula 6.

CASO II $Q(x)$ é um produto de fatores lineares, e alguns dos fatores são repetidos.

Suponha que o primeiro fator linear $(a_1 x + b_1)$ seja repetido r vezes; isto é, $(a_1 x + b_1)^r$ ocorre na fatoração de $Q(x)$. Então, em vez de um único termo $A_1/(a_1 x + b_1)$ na Equação 2, usaríamos

7 $$\frac{A_1}{a_1 x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1 x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(a_1 x + b_1)^r}$$

Para ilustrarmos, poderíamos escrever

$$\frac{x^3 - x + 1}{x^2 (x - 1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{(x - 1)^2} + \frac{E}{(x - 1)^3}$$

mas é preferível detalhar um exemplo mais simples.

EXEMPLO 4 Encontre $\displaystyle\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx$.

SOLUÇÃO A primeira etapa é dividir. O resultado da divisão de polinômios é

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

A segunda etapa é fatorar o denominador $Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. Como $Q(1) = 0$, sabemos que $x - 1$ é um fator e obtemos

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 &= (x - 1)(x^2 - 1) = (x - 1)(x - 1)(x + 1) \\ &= (x - 1)^2(x + 1) \end{aligned}$$

Como o fator linear $x - 1$ ocorre duas vezes, a decomposição em frações parciais é

$$\frac{4x}{(x - 1)^2(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 1}$$

Multiplicando pelo mínimo denominador comum, $(x - 1)^2(x + 1)$, temos

$$\boxed{8} \qquad \begin{aligned} 4x &= A(x - 1)(x + 1) + B(x + 1) + C(x - 1)^2 \\ &= (A + C)x^2 + (B - 2C)x + (-A + B + C) \end{aligned}$$

Agora igualamos os coeficientes:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B - 2C = 4 \\ -A + B + C = 0 \end{cases}$$

Outro método para encontrar os coeficientes:
Faça $x = 1$ em $\boxed{8}$: $B = 2$.
Faça $x = -1$: $C = -1$.
Faça $x = 0$: $A = B + C = 1$.

Resolvendo, obtemos $A = 1$, $B = 2$ e $C = -1$; assim

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx &= \int \left[x + 1 + \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{(x - 1)^2} - \frac{1}{x + 1}\right] dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x - 1| - \frac{2}{x - 1} - \ln|x + 1| + K \\ &= \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x - 1} + \ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| + K \end{aligned}$$

CASO III $Q(x)$ contém fatores quadráticos irredutíveis, nenhum dos quais se repete.

Se $Q(x)$ tiver o fator $ax^2 + bx + c$, onde $b^2 - 4ac < 0$, então, além das frações parciais nas Equações 2 e 7, a expressão para $R(x)/Q(x)$ terá um termo da forma

$$\boxed{9} \qquad \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

onde A e B são constantes a serem determinadas. Por exemplo, a função dada por $f(x) = x/[(x - 2)(x^2 + 1)(x^2 + 4)]$ tem uma decomposição em frações parciais da forma

$$\frac{x}{(x - 2)(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{x^2 + 4}$$

O termo dado em $\boxed{9}$ pode ser integrado completando o quadrado (se necessário) e usando a fórmula

10
$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C}$$

EXEMPLO 5 Calcule $\displaystyle\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx$.

SOLUÇÃO Como $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$ não pode ser mais fatorado, escrevemos

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 4)$, temos

$$\begin{aligned} 2x^2 - x + 4 &= A(x^2 + 4) + (Bx + C)x \\ &= (A + B)x^2 + Cx + 4A \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes, obtemos

$$A + B = 2 \qquad C = -1 \qquad 4A = 4$$

Então $A = 1$, $B = 1$ e $C = -1$ e, assim,

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4}\right) dx$$

Para integrarmos o segundo termo, o dividimos em duas partes:

$$\int \frac{x - 1}{x^2 + 4}\,dx = \int \frac{x}{x^2 + 4}\,dx - \int \frac{1}{x^2 + 4}\,dx$$

Fazemos a substituição $u = x^2 + 4$ na primeira das integrais de modo que $du = 2x\,dx$. Calculamos a segunda integral usando a Fórmula 10 com $a = 2$:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x}{x^2 + 4}\,dx - \int \frac{1}{x^2 + 4}\,dx \\ &= \ln|x| + \tfrac{1}{2}\ln(x^2 + 4) - \tfrac{1}{2}\tan^{-1}(x/2) + K \end{aligned}$$

EXEMPLO 6 Calcule $\displaystyle\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}\,dx$.

SOLUÇÃO Como o grau do numerador *não é menor que* o grau do denominador, primeiro dividimos e obtemos

$$\frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} = 1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}$$

Observe que o termo quadrático $4x^2 - 4x + 3$ é irredutível, porque seu discriminante é $b^2 - 4ac = -32 < 0$. Isso significa que este não pode ser fatorado, então não precisamos usar a técnica da frações parciais.

Para integrarmos a função dada completamos o quadrado no denominador:

$$4x^2 - 4x + 3 = (2x - 1)^2 + 2$$

Isso sugere que façamos a substituição $u = 2x - 1$. Então $du = 2\,dx$ e $x = \frac{1}{2}(u + 1)$, assim

$$\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}\,dx = \int \left(1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}\right) dx$$

$$= x + \tfrac{1}{2}\int \frac{\tfrac{1}{2}(u+1) - 1}{u^2+2}\,du = x + \tfrac{1}{4}\int \frac{u-1}{u^2+2}\,du$$

$$= x + \tfrac{1}{4}\int \frac{u}{u^2+2}\,du - \tfrac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+2}\,du$$

$$= x + \tfrac{1}{8}\ln(u^2+2) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= x + \tfrac{1}{8}\ln(4x^2 - 4x + 3) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

OBSERVAÇÃO O Exemplo 6 ilustra o procedimento geral para se integrar uma fração parcial da forma

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} \qquad \text{onde } b^2 - 4ac < 0$$

Completamos o quadrado no denominador e então fazemos uma substituição que traz a integral para a forma

$$\int \frac{Cu+D}{u^2+a^2}\,du = C\int \frac{u}{u^2+a^2}\,du + D\int \frac{1}{u^2+a^2}\,du$$

Então, a primeira integral é um logaritmo, e a segunda é expressa em termos de tg^{-1}.

CASO IV $Q(x)$ contém fatores quadráticos irredutíveis repetidos.

Se $Q(x)$ tiver um fator $(ax^2 + bx + c)^r$, onde $b^2 - 4ac < 0$, então, em vez de uma única fração parcial $\boxed{9}$, a soma

$$\boxed{11} \qquad \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_rx+B_r}{(ax^2+bx+c)^r}$$

ocorre na decomposição em frações parciais de $R(x)/Q(x)$. Cada um dos termos de $\boxed{11}$ pode ser integrado usando uma substituição ou completando primeiramente o quadrado, se necessário.

EXEMPLO 7 Escreva a forma da decomposição em frações parciais da função

$$\frac{x^3+x^2+1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}$$

SOLUÇÃO

$$\frac{x^3+x^2+1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{Ex+F}{x^2+1} + \frac{Gx+H}{(x^2+1)^2} + \frac{Ix+J}{(x^2+1)^3}$$

Seria extremamente entediante o cálculo manual dos valores numéricos dos coeficientes no Exemplo 7. A maioria dos sistemas de computação algébrica, no entanto, consegue encontrar os valores numéricos muito rapidamente. Por exemplo, o comando do Maple

```
Convert(f, parfrac, x)
```

ou o comando do Mathematica

```
Apart [f]
```

fornecem os seguintes valores:

$$A = -1 \quad B = \tfrac{1}{8} \quad C = D = -1$$

$$E = \tfrac{15}{8} \quad F = -\tfrac{1}{8} \quad G = H = \tfrac{3}{4}$$

$$I = -\tfrac{1}{2} \quad J = \tfrac{1}{2}$$

EXEMPLO 8 Calcule $\displaystyle\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx$.

SOLUÇÃO A forma da decomposição em frações parciais é

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 1)^2$, temos

$$\begin{aligned} -x^3 + 2x^2 - x + 1 &= A\,(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x(x^2 + 1) + (Dx + E)x \\ &= A\,(x^4 + 2x^2 + 1) + B(x^4 + x^2) + C(x^3 + x) + Dx^2 + Ex \\ &= (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A. \end{aligned}$$

Se igualarmos os coeficientes, obteremos o sistema

$$A + B = 0, \qquad C = -1, \qquad 2A + B + D = 2, \qquad C + E = -1, \qquad A = 1,$$

que tem a solução $A = 1$, $B = -1$, $C = -1$, $D = 1$ e $E = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x + 1}{x^2 + 1} + \frac{x}{(x^2 + 1)^2} \right) dx \\ &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2 + 1}\,dx - \int \frac{dx}{x^2 + 1} + \int \frac{x\,dx}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1) - \operatorname{tg}^{-1}x - \frac{1}{2(x^2 + 1)} + K \end{aligned}$$

No segundo e no quarto termos, fizemos mentalmente a substituição $u = x^2 + 1$.

Observamos que algumas vezes as frações parciais podem ser evitadas na integração de funções racionais. Por exemplo, embora a integral

$$\int \frac{x^2 + 1}{x(x^2 + 3)}\,dx$$

possa ser calculada pelo método do Caso III, é muito mais fácil observar que se $u = x(x^2 + 3) = x^3 + 3x$, então $du = (3x^2 + 3)\,dx$ e, assim,

$$\int \frac{x^2 + 1}{x(x^2 + 3)}\,dx = \tfrac{1}{3}\ln|x^3 + 3x| + C$$

Substituições Racionalizantes

Algumas funções não racionais podem ser transformadas em funções racionais por meio de substituições apropriadas. Em particular, quando um integrando contém uma expressão da forma $\sqrt[n]{g(x)}$, então a substituição $u = \sqrt[n]{g(x)}$ pode ser eficaz. Outros exemplos aparecem nos exercícios.

EXEMPLO 9 Calcule $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x + 4}}{x}\,dx\,dx$.

SOLUÇÃO Seja $u = \sqrt{x + 4}$. Então $u^2 = x + 4$, de modo que, $x = u^2 - 4$ e $dx = 2u\,du$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x + 4}}{x}\,dx &= \int \frac{u}{u^2 - 4}\,2u\,du = 2\int \frac{u^2}{u^2 - 4}\,du \\ &= 2\int \left(1 + \frac{4}{u^2 - 4} \right) du \end{aligned}$$

Podemos calcular essa integral fatorando $u^2 - 4$ em $(u - 2)(u + 2)$ e usando as frações parciais ou usando a Fórmula 6 com $a = 2$:

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = 2\int du + 8\int \frac{du}{u^2 - 4}$$

$$= 2u + 8 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{u-2}{u+2} \right| + C$$

$$= 2\sqrt{x+4} + 2\ln \left| \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+4} + 2} \right| + C$$

7.4 Exercícios

1–6 Escreva as formas de decomposição em frações parciais da função (como no Exemplo 7). Não determine os valores numéricos dos coeficientes.

1. (a) $\dfrac{1+6x}{(4x-3)(2x+5)}$ (b) $\dfrac{10}{5x^2 - 2x^3}$

2. (a) $\dfrac{x}{x^2 + x - 2}$ (b) $\dfrac{x^2}{x^2 + x + 2}$

3. (a) $\dfrac{x^4 + 1}{x^5 + 4x^3}$ (b) $\dfrac{1}{(x^2 + 9)^2}$

4. (a) $\dfrac{x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1}$ (b) $\dfrac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x}$

5. (a) $\dfrac{x^6}{x^2 - 4}$ (b) $\dfrac{x^4}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 2)^2}$

6. (a) $\dfrac{t^6 + 1}{t^6 + t^3}$ (b) $\dfrac{x^5 + 1}{(x^2 - x)(x^4 + 2x^2 + 1)}$

7–38 Calcule a integral.

7. $\displaystyle\int \frac{x}{x-6}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{r^2}{r+4}\,dr$

9. $\displaystyle\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{(t+4)(t-1)}\,dt$

11. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{2x^2 + 3x + 1}\,dx$

12. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-4}{x^2 + 5x + 6}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{ax}{x^2 - bx}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\,dx$

15. $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^3 - 2x^2 - 4}{x^3 + 2x^2}\,dx$

16. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3 - 4x - 10}{x^2 - x - 6}\,dx$

17. $\displaystyle\int_1^2 \frac{4y^2 - 7y - 12}{y(y+2)(y-3)}\,dy$

18. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{(x-3)(x-2)^2}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 5x + 16}{(2x+1)(x-2)^2}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{x^3 + 4}{x^2 + 4}\,dx$

22. $\displaystyle\int \frac{ds}{s^2(s-1)^2}$

23. $\displaystyle\int \frac{10}{(x-1)(x^2 + 9)}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 6}{x^3 + 3x}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{4x}{x^3 + x^2 + x + 1}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)^2}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2(x^2 + 1)}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2 + 2x + 5}\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{3x^2 + x + 4}{x^4 + 3x^2 + 2}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 - 1}\,dx$

32. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 4x + 13}\,dx$

33. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3 + 2x}{x^4 + 4x^2 + 3}\,dx$

34. $\displaystyle\int \frac{x^5 + x - 1}{x^3 + 1}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2 + 4)^2}$

36. $\displaystyle\int \frac{x^4 + 3x^2 + 1}{x^5 + 5x^3 + 5x}\,dx$

37. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3x + 7}{(x^2 - 4x + 6)^2}\,dx$

38. $\displaystyle\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x - 2}{(x^2 + 2x + 2)^2}\,dx$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com