II.4 - Técnicas de Integração
Integração de funções racionais:

Nesta aula, em complemento ao da aula anterior iremos resolver integrais de funções racionais utilizando expandindo estas funções em frações parciais.

O uso deste procedimento é útil para resolução de equações diferenciais através da transformada de Laplace que é muito utilizada em engenharia.

Nesta aula serão mostradas algumas formas.

1. Expressão quadrática

   É o método utilizado para completar os quadrados.

Dado:

$$x^2 + kx \qquad (1)$$

Para completar o quadrado da expressão (1) basta lembrar-se do trinômio quadrado perfeito.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

No caso, da expressão (1) tem-se: $k = 2b$ supondo que $a = x$. Portando $b = \frac{k}{2}$

Para completar o quadrado basta somar e subtrair a expressão por:

$$\frac{k^2}{4} = \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

Dessa forma (1) fica:

$$x^2 + kx + \left(\frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

Exemplificando:

$$x^2 + 5x = x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

Exemplo 1:

$$I = \int \frac{dx}{36x^2 + 12x + 5}$$

Para se completar o quadrado no denominador

$$k = \frac{2}{2} = 1$$

Portanto:

$$I = \int \frac{dx}{36x^2 + 12x + 1 - 1 + 5} = \int \frac{dx}{36x^2 + 12x + 1 + 4} = \int \frac{dx}{(6x+1)^2 + 2^2}$$

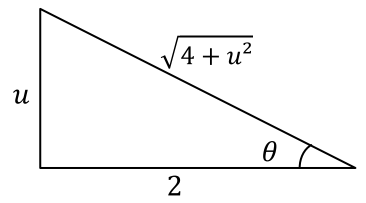
Esta integral pode ser resolvida por substituição trigonométrica. Fazendo:

$$u = 6x + 1 \rightarrow du = 6dx$$

Dessa forma I fica:

$$I = \frac{1}{6} \int \frac{du}{u^2 + 2^2}$$

Fazendo a substituição trigonométrica:



$$\frac{u}{2} = tg\theta$$

$$du = 2\sec^2\theta$$

Substituindo θ em I:

$$I = \frac{1}{6} \int \frac{2sec^2\theta d\theta}{(4tg^2 + 4)} = \frac{1}{12} \int \frac{sec^2\theta d\theta}{sec^2\theta}$$

Lembrando que $sec^2\theta = 1 + tg^2\theta$.

$$I = \frac{1}{12} \int d\theta = \frac{1}{12}\theta$$

Substituindo θ por u.

$$\theta = arctg\frac{u}{2}$$

Portanto I fica:

$$I = \frac{1}{12} arctg\frac{u}{2}$$

Sabendo que $u = 6x + 1$ o resultado final da integral fica:

II.4 - Técnicas de Integração

Integração de funções racionais:

$$I = \frac{1}{12} arctg \, \frac{6x+1}{2} + c$$

É importante observar que a integral do tipo $x^2 + a^2$ não foi resolvida por substituição trigonométrica, no entanto, ela também válida.

Exemplo 2.

Calcule:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{12x - 4x^2 - 8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(4x^2 - 12x + 8)}}$$

Verificando k.

$$2k = 6 \text{ logo } k = 3$$

Portanto I:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{-(4x^2 - 12x + 9 - 9 + 18)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-[(2x-3)^2 - 1]}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (2x-3)^2}}$$

É uma integral por substituição trigonométrica do tipo: $\sqrt{a^2 - u^2}$, a solução é:

$$I = \frac{1}{2} arcsen(2x - 3)$$

2. Funções do tipo $\frac{f(x)}{g(x)}$ onde $f(x)$ possui grau menor do que $g(x)$, essa fração é própria, se for imprópria o grau de $f(x)$ é maior do que o grau de $g(x)$. É possível reduzir as frações próprias realizando-se uma simples divisão.

Nesse caso, frações próprias, podem ser decompostas em frações parciais.

Caso1- O denominador da função é um produto de fatores distintos.

Exemplo 3: Calcule:

$$f(x) = \frac{9x^2 - 28x + 12}{x^3 - 5x^2 + 6x}$$

Nesse caso é necessário fatorar o denominador.

$$d = x^3 - 5x^2 + 6x = x(x^2 - 5x + 6)$$

II.4 - Técnicas de Integração

Integração de funções racionais:

O termo entre parênteses pode se resolver a equação do segundo ou fatorar por soma e produto.

$$x^2 - sx + p$$

Nesse caso $s = 5;\ p = 6\ \ \rightarrow\ \ a + b = 5;\ ab = 6$. Então $a = 2\ e\ b = 3$.

Portanto:

$$d = x(x-2)(x-3)$$

Dessa forma a função pode ser escrita:

$$f(x) = \frac{9x^2 - 28x + 12}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)}$$

O objetivo é achar valores de A, B e C que satisfaçam a equação. Para isto, é necessário determinar o denominador comum do segundo membro da equação.

$$f(x) = \frac{9x^2 - 28x + 12}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + C(x-2)x}{x(x-2)(x-3)}$$

Dessa forma tem-se:

$$9x^2 - 28x + 12 = A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2)$$

Deve-se, escolher valores de x que elimine dois termos e resolva um entre A, B e C.

$x = 0$

$$12 = A(-2)(-3)$$

$$A = 2$$

$x = 2$

$$36 - 56 + 12 = B\ 2(-1)$$

$$-8 = -2B$$

$$B = 4$$

$x = 3$

$$81 - 84 + 12 = 3C$$

$$9 = 3C$$

$$C = 3$$

Nessas condições $f(x)$ fica:

$$f(x) = \frac{2}{x} + \frac{4}{x-2} + \frac{3}{x-3}$$

Agora é possível integrar-se e, portanto:

$$\int f(x)dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{4}{x-2} + \frac{3}{x-3}\right) dx$$

$$= 2\int \frac{dx}{x} + 4\int \frac{dx}{(x-2)} + 3\int \frac{dx}{(x-3)}$$

A segunda e a terceira, integrais são por substituição de modo que $u = x - 2$ e

$v = x - 3$ respectivamente. A solução é:

$$\int f(x)dx = 2\,ln|x| + 4\ln|x-2| + 3\ln|x-3| + c$$

Caso 2.- O denominador da função é um produto de fatores da forma $(x + a)$ e alguns repetidos.

Dessa forma a expansão é do tipo:

$$\frac{A_1}{(x+a)} + \frac{A_2}{(x+a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x+a)^n}$$

Exemplo 4:

Decompor a função abaixo em funções parciais e calcule a integral de $f(x)$.

II.4 - Técnicas de Integração

Integração de funções racionais:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 21x + 31}{(x-2)(x-3)^2}$$

Então:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 21x + 31}{(x-2)(x-3)^2} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-3)} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

O procedimento de solução é semelhante ao do caso 1 de modo que:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 21x + 31}{(x-2)(x-3)^2} = \frac{A(x-3)^2 + B(x-2)(x-3) + C(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

Portanto:

$$3x^2 - 21x + 31 = A(x-3)^2 + B(x-2)(x-3) + C(x-2)$$

$x = 2$

$$12 - 42 + 31 = A$$

$$A = 1$$

$x = 3$

$$27 + 63 + 31 = C$$

$$C = -5$$

$x = 0$

$$31 = 3A + 6B - 2C$$

Substituindo os valores de A e C

$$31 = 3 + 6B + 10$$

$$B = \frac{31 - 13}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

Fazendo a integral de $f(x)$:

$$\int f(x) = \int \left(\frac{1}{(x-2)} + \frac{3}{(x-3)} - \frac{5}{(x-3)^2}\right) dx$$

II.4 - Técnicas de Integração

Integração de funções racionais:

$$= \int \frac{dx}{(x-2)} + 3\int \frac{dx}{x-3} - 5\int \frac{dx}{(x-5)^2}$$

$$= ln|x-2| + 3ln|x-3| - 5\int \frac{dx}{(x-5)^2}$$

Para última integral $u = x - 5 \; e \; du = dx$

$$\int \frac{dx}{(x-5)^2} = \int u^{-2}\, du = \frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{(x-3)}$$

Portanto:

$$\int f(x) = ln|x-2| + 3\ln|x-3| + \frac{5}{x-3} + c$$

Acima foram desenvolvidos métodos de resolução de integrais de funções racionais envolvendo expressões quadráticas, com denominador de frações tipo $(x+a)$ distintos e repetidos. Abaixo está sendo dada continuidade ao processo o partir do caso 3.

Caso 3- O denominador da função racional própria contém fatores quadráticos irredutíveis, nenhum dos quais é repetido. Cada fator irredutível da forma $x^2 + px + q$ do denominador da origem, na decomposição em frações parciais da função racional própria, a uma parcela da forma:

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

Exemplo 5:

Decompor em frações parciais a função racional própria e calcular a integral.

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2+4x+5)}$$

No denominador a parcela $(x-1)$ pode ser escrita como $\frac{A}{(x-1)}$. Já a parcela (x^2+4x+5) é um fator quadrático não redutível, sendo necessário escrevê-lo de forma que $\frac{Bx+C}{x^2+4x+5}$, Portanto a função fica:

II.4 - Técnicas de Integração

Integração de funções racionais:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+4x+5)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{Bx+C}{(x^2+4x+5)}$$

Determinando o mesmo denominador comum tem-se:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+4x+5)}=\frac{A(x^2+4x+5)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+4x+5)}$$

Se os denominadores são iguais, então os numeradores podem se escrito como:

$$1=A(x^2+4x+5)+(Bx+C)(x-1)$$

Fazendo-se $x=1$, eliminando o 2º termo do membro à direita da equação tem-se:

$$1=A(1+4+5)$$

$$A=\frac{1}{10}$$

$x=0$, elimina B e:

$$1=5A+C(-1)$$

Substituindo-se o valor de A, obtido.

$$1=\frac{5}{10}-C$$

$$C=\frac{1}{2}-1$$

$$C=-\frac{1}{2}$$

Aplicando a propriedade distributiva em $1=A(x^2+4x+5)+(Bx+C)(x-1)$:

$$1=Ax^2+4Ax+5A+Bx^2-Bx+Cx-C$$

II.4 - Técnicas de Integração

Integração de funções racionais:

Agrupando-se:

$$1 = (A + B)x^2 + (4A - B + C)x + (5A - C)$$

Qualquer um dos termos basta para resolver o valor de B, escolhendo para termo quadrático em x:

$$A + B = 0$$

$$B = -A$$

$$B = -\frac{1}{10}$$

A expressão fica:

$$f(x) = \frac{1}{10(x-1)} + \frac{-\frac{1}{10}x - \frac{1}{2}}{x^2 + 4x + 5}$$

$$= \frac{1}{10(x-1)} - \frac{(5+x)}{10(x^2+4x+5)} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{(x-1)} - \frac{(5+x)}{(x^2+4x+5)}\right)$$

Calculando-se a integral de $f(x)$:

$$\int f(x) = \frac{1}{10}\left[\int \frac{dx}{(x-1)} - \int \frac{(5+x)dx}{(x^2+4x+5)}\right]$$

$$= \frac{1}{10}\left[\ln|x-1| - \int \frac{(5+x)dx}{(x^2+4x+5)}\right]$$

Logo $I_1 = \int \frac{(5+x)dx}{(x^2+4x+5)}$ pode ser resolvida completando-se o quadrado do denominador.

$$\frac{k}{2} = 2$$

$$k = 4$$

Integração de funções racionais:

Desta forma o denominado fica:

$$x^2 + 4x + 5 + 4 - 4 =$$

$$x^2 + 4x + 4 + 1$$

$$(x+2)^2 + 1$$

$$I_{1=} \int \frac{x+5}{(x+2)^2+1} dx$$

Fazendo $u = x + 2$, $du = dx$. Portanto I_1:

$$I_1 = \int \frac{u-2+5}{u^2+1}\, du = \int \frac{u+3}{u^2+1}\, du = \int \frac{u\, du}{(u^2+1)} + 3 \int \frac{du}{(u^2+1)}$$

A primeira integral do último membro é por substituição simples $(v = u^2 + 1)$, portanto $dv = udu$ e a segunda é por substituição trigonométrica e já foi resolvida na aula 6.

Dessa forma:

$$\int f(x) = \frac{1}{2} \ln|(x+2)^2 + 1| + 3arctg\ (x+2)$$

A solução desta integral fica a cargo do aluno como exercício.

Caso-4 Denominador da função racional própria contém fatores quadráticos irredutíveis, alguns dos quais repetidos. O fator $x^2 + px + q$ de multiplicidade M deve ser substituído como segue:

$$\frac{A_1 + B_1\, x}{x^2+px+q} + \frac{A_2 + B_2 x}{(x^2+px+q)^2} + \cdots \frac{A_m + B_m x}{(x^2+px+q)^2}$$

Exemplo 6:

Calcular a integral

$$I = \int \frac{3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 2}{(x-1)(x^2+1)^2} dx$$

II.4 - Técnicas de Integração

Integração de funções racionais:

Inicialmente vamos fatorar o integrado em frações parciais:

$$\frac{3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 2}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

Reduzindo ao mesmo denominador:

$$3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 2 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+1) + (Dx+E)(x-1)$$

Fazendo $x = 1$:

$$3 - 3 + 4 - 2 + 2 = A4$$

$$A = 1$$

$$3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 2 = (x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+1) + (Dx+E)(x-1)$$

Aplicando a propriedade distributiva no segundo membro da expressão e fatorando em relação aos expoentes de x tem-se:

$$3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 2 = x^4 + 2x^2 + 1 + (Bx+C)(x^3 + x - x^2 - 1) + Dx^2 - Dx + Ex - E$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 + Bx^4 + Bx^2 - Bx^3 - Bx + Cx^3 + Cx - Cx^2 - C + Dx^2 - Dx + Ex - E$$

$$= (B+1)x^4 + (C-B)x^3 + (2+B-C+D)x^2 + (-B+C-D+E)x + (1-C-E)$$

$$B + 1 = 3$$

Portanto $B = 2$

$$C - B = -3$$

Portanto $C = -1$

$$2 + B - C + D = 4$$

$$2 + 2 + 1 + D = 4$$

Portanto $D = -1$

$$-B + C - D + E = -2$$

$$-2 - 1 + 1 + E = -2$$

Portanto $E = 0$

II.4 - Técnicas de Integração

Integração de funções racionais:

$$1 - C - E = 2$$

Desta forma integral I fica:

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)} + \int \frac{2x-1}{x^2+1}dx - \int \frac{xdx}{(x^2-1)^2}$$

$$= ln|x-1| + \int \frac{2xdx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{xdx}{(x^2-1)^2}$$

A primeira e a terceira, integrais podem ser resolvidas por substituição simples. Já a segunda integral é resolvida por substituição trigonométrica.

Portanto

:

$$\int \frac{2xdx}{x^2+1} = \int \frac{du}{u} = ln|u| = ln|x^2+1|$$

$$u = x^2 + 1$$

$$du = 2xdx$$

$$\frac{du}{2} = xdx$$

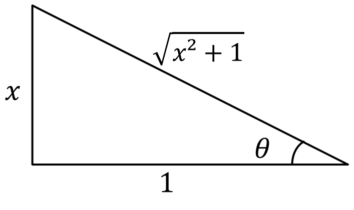
$$\int \frac{xdx}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2}\int u^{-2}\,du = -\frac{1}{2}u^{-1} = -\frac{1}{2u} = \frac{-1}{2(x^2-1)}$$

$$u = (x^2-1) \quad \rightarrow \quad du = 2xdx$$

Portanto:

$$\frac{du}{2} = xdx$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)} = \int \frac{sec^2\theta d\theta}{tg^2\theta + 1} = \int \frac{sec^2\theta d\theta}{sec^2\theta} = \int d\theta = \theta$$



$$x = tg\theta$$

$$dx = \sec^2\theta$$

$$\theta = arctgx$$

II.4 - Técnicas de Integração

Integração de funções racionais:

Desta forma a integral final:

$$I = ln|x-1| + ln|x^2-1| + \frac{1}{2(x^2+1)} - arctgx + C$$

Exercícios:

Calcule as integrais:

1. $\int \frac{9x^2+6x-6}{(x-1)(x^2+x+1)} dx$

2. $\int \frac{x^2}{(x+2)(x^2+4)} dx$

3. $\int \frac{dx}{x^5+x^3}$

4. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$

5. $\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2} dx$

6. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$

7. $\int \frac{dx}{36x^2+12x+5}$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-4x^2-8}}$

9. $\int \frac{dx}{2x^2-4x}$

10. $\int \frac{5dx}{x^2+x-6}$

11. $\int \frac{4x^2+9x+6}{x^3+3x^2+2x} dx$

12. $\int \frac{(6x^2+22x+18)}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx$

II.4 - Técnicas de Integração

Integração de funções racionais:

13. $\int \frac{\left(2x^3-3x^2-x-1\right)}{(x^2-1)(x^2+2x)} dx$

14. $\int \frac{(3x-1)}{x(x-1)^2} dx$

15. $\int \frac{4x^2-9x+1}{x^3-2x^2+x} dx$

16. $\int \frac{(2x^3+6x^2-9x+4)}{x^3(4-x)} dx$