Integral Definida

Integral definida

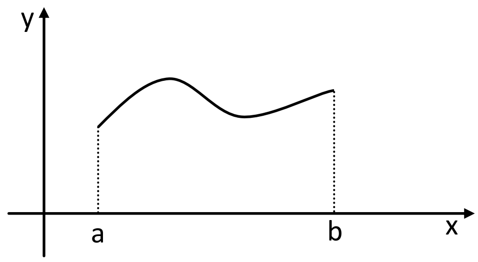
- Cálculo de área
- Teorema Fundamental do cálculo

A integral definida origina-se do problema para determinação de áreas. Historicamente, como descrito na anteriormente, constitui-se no método da exaustão para o cálculo de área.

Nesta apresentação será definido o conceito de integral definida a partir da soma de Riemann, realizada algumas integrações de área bem com destacado o teorema fundamental do cálculo.

Definição:

Dada uma função f não negativa no intervalo [a,b], a<b, isto é, $f(x) \geq 0$ neste intervalo, queremos achar a área da região limitada pelo gráfico de f, pelas retas x=a e x=b, e pelo eixo x.

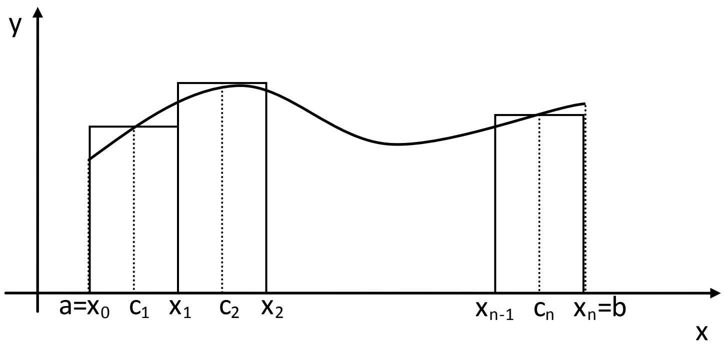


O ideal é dividir [a,b] em sub intervalos

$$\underbrace{f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ \dots + f(c_2)\Delta x_2}_{\text{Soma de Riemann}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Para o cálculo da área divide-se a figura em pequenos retângulos Δx_i calcula-se a área de cada retângulo intervalo e finalmente soma-se estas áreas obtendo-se área sob a função.



Para se aproximar da área real calcula-se o limite da função:

$$Área = \lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

$max\Delta x_i \to 0$ corresponde à amplitude da divisão, e indica que aumenta o número de divisões. Desta forma

$$\lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f\ dx$$

Que é a integral definida de f no [a,b].
Fala-se integral de f de a até b.
A função f é dita integrável em [a,b], onde f é o integrando

Pela definição observa-se que:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)\,dx \qquad (a < b)$$

Propriedades:

Sejam f e g integráveis em [a,b] e k constante, então:

a) f+g é integrável em [a,b] então:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Prova:

Lembrando da definição de integral definida:

$$\lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f\ dx$$

Então se f e g são integráveis em [a,b]

$\lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\ dx$ e $\lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\Delta x_i = \int_a^b g(x)\ dx$

Escrevendo-se a integral de f+g:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \lim_{max\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(c_i) + g(c_i)]\Delta x_i$$

$$= \lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\ \Delta x_i + \lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\ \Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Observa-se que esta propriedade é válida para um número infinito de funções.

b) kf é integrável em [a,b] então:

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

c) Se $f(x) \geq 0$ em [a,b], então:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

d) Se $c \in]a,b[$ e f é integrável em [a,c] e em [c,b], então:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

e) Se f e g são integráveis em [a,b] e $f(x) \geq g(x)$ para todo x em [a,b], então:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

Prova: Fazendo

$$I = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

Pode-se provar que $I \geq 0$. Usando a propriedade (a).

$$I = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$$= \int_a^b [f(x) - g(x)]dx =$$

Como $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ tem-se que $f(x) - g(x) \geq 0$, para todo $x \in [a,b]$. Baseando-se na propriedade (c), conclui-se que $I \geq 0$.

f) Se f é uma função contínua em [a,b], então:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

As provas das propriedades de b a d e f serão deixadas a cargo de pesquisa do aluno na bibliografia básica.

Teorema Fundamental do Cálculo

Se f for integrável em [a,b] se F for uma primitiva de f em [a,b], então:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

Neste momento já é possível calcular-se áreas sob curvas desde que se conheça a função. Desta forma serão apresentados alguns exemplos de integrais definidas de algumas funções, cálculo de áreas simples e problemas envolvendo cálculo de área.

O cálculo de integrais definidas será retomado posteriormente quando o aluno estiver aprendido todas as técnicas de integração a serem apresentadas nas próximas aulas.

Vamos aos exemplos:

Exemplo 1: Calcule:

$$\int_1^3 x\ dx$$

Resolvendo-se a integral aplicando-se o Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int_1^3 x\ dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^3 = \frac{1}{2}(3^2 - 1^2) = \frac{1}{2}(9-1) = \frac{8}{2} = 4$$

Exemplo 2: Calcule

$$\int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 1)dx$$

Resolvendo

$$\int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 1)dx \ = \int_0^1 x^3 dx - 4\int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 dx$$

$$= \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 - 4.\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + x\Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{4} - 0\right) - \left(\frac{4}{3} - 0\right) + (1-0) = \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + 1 = \frac{3-16+12}{12}$$

$$= -\frac{1}{12}$$

Exemplo 3: Calcule a integral

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+1}$$

É uma integral por substituição, então, chamando-se

$$I = \int \frac{x\,dx}{x^2+1}$$

$$u = x^2 + 1 \quad \rightarrow \quad du = 2xdx, então \quad xdx = du/2$$

$$I = \int \frac{\frac{du}{2}}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ 1n\ |u| + c$$

$$= \tfrac{1}{2}\ 1n\ (x^2+1) + c.$$

Substituindo-se este resultado na integral principal:

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} 1n\ (x^2+1)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} 1n\ 2 - \frac{1}{2} 1n\ 1$$

Aplicando-se a propriedade dos logaritmos, a integral fica:

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} 1n\ 2.$$

Outra maneira de se resolver a integral é:

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+1}$$

Substituindo-se:

$$u = x^2 + 1 \quad \rightarrow \quad du = 2xdx, então \quad xdx = du/2$$

Substituindo-se os limites de integração tem-se:

$$para\ x = 0 \ \rightarrow \ u = 1$$

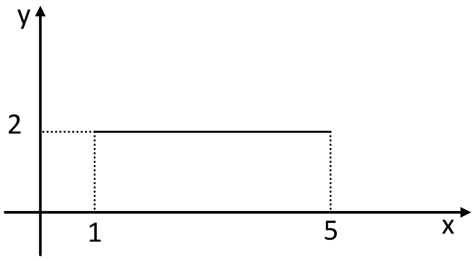
$$para\ x = 1 \ \rightarrow \ u = 2$$

$$\int_1^2 \frac{\frac{du}{2}}{u} = \int_1^2 \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{du}{u} = \frac{1}{2} ln|u| \Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2$$

Exemplo 4:

Calcule a área da pela definição geométrica e através do cálculo integral.



A área do retângulo é o produto lado vezes lado, portanto:

$$A = 2.4 = 8\, u.a.$$

Onte $u.a.$ é unidade de área.

Utilizando-se a integral definida:

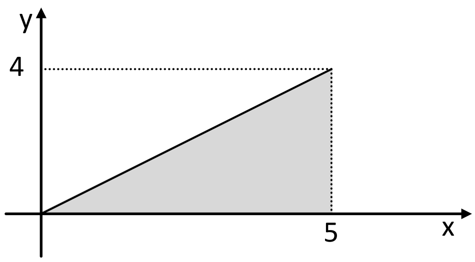
$f(x) = 2$ é a função constante.

Os extremos da função são 1 e 5.

$$\int_1^5 f(x)dx = \int_1^5 2dx = 2\int_1^5 dx = 2\, x\Big|_1^5 = 2(5-1) = 2.4 = 8\, u.a.$$

Exemplo 5:

Calcule a área do triângulo da figura abaixo pela definição geométrica e integral definida.



A área de um triângulo é o produto da base pela altura dividido por dois.

$$A = \frac{5.4}{2} = 10\, u.a.$$

Utilizando-se a integral definida.

Definindo-se a função f. É a função de uma reta com coeficiente linear zero e coeficiente angular:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{5}$$

Lembrando-se que a equação da reta é:

$$f(x) = ax + b$$

Neste caso $b = 0$, a função fica:

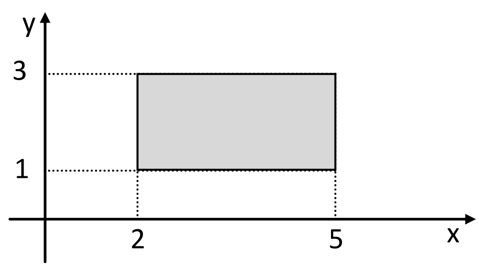
$$f(x) = \frac{4}{5}x$$

Calculando-se a integral:

$$\int_0^5 \frac{4}{5}xdx = \frac{4}{5}\int_0^5 xdx = \frac{4}{5}\frac{x^2}{2}\Big|_0^5 = \frac{2}{5}(5^2 - 0) = 10\ u.a.$$

Exemplo 6:

Calcule a área do retângulo na figura abaixo pela definição geométrica por integral definida.



Pela definição geométrica a área é:

$$A = (3-1)(5-2) = 2.3 = 6\ u.a.$$

Neste caso, é necessário calcular a área do retângulo maior onde f(x)=3 e a área do retângulo menor o de g(x)=1 e fazer-se f(x)-g(x). para isto podemos aplicar a propriedade (e).

$$\int_2^5 [f(x) - g(x)]dx = \int_2^5 [3-1]dx = 2\int_2^5 dx = 2x\Big|_2^5 = 2(5-2) = 2.3 = 6\ u.a.$$

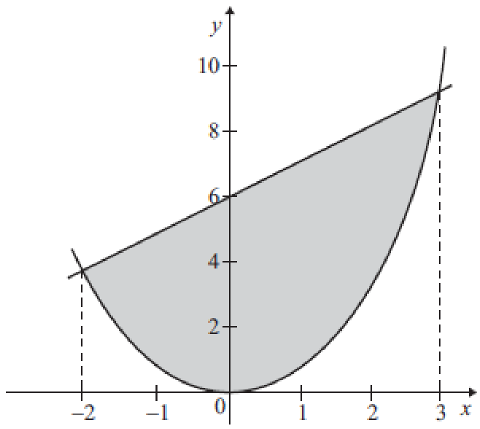
É óbvio que estas figuras são regulares, mas o importante foi ressaltar o procedimento e demonstrar que o método integral funciona para o cálculo de área.

Exemplo 7:

Determine a área da região delimitada pelas curvas:

$$f(x) = x + 6 \quad e \quad g(x) = x^2$$

Inicialmente esboça-se o gráfico das funções.



Observe, no gráfico, que os pontos delimitam a área, mas vamos calcular. Para isto basta igualar as funções.

$$x^2 = x + 6$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$$
$$x' = \frac{6}{2} = 3$$
$$x'' = \frac{-4}{2} = -2$$

Que estão de acordo no gráfico.

Resolvendo-se a integral:

$$\int_{-2}^{3} [f(x) - g(x)]dx = \int_{-2}^{3} [x + 6 - x^2]dx$$

$$= \int_{-2}^{3} xdx + 6\int_{-2}^{3} dx - \int_{-2}^{3} x^2dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{3} = \left(\frac{9}{2} + 6.3 - \frac{27}{3}\right) - \left(\frac{4}{2} - 6.2 - \frac{(-8)}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{9}{2} + 18 - 9\right) - \left(2 - 12 + \frac{8}{3}\right) = \left(\frac{9}{2} + 9\right) - \left(-10 + \frac{8}{3}\right) =$$

$$= \frac{9}{2} + 19 - \frac{8}{3} = \frac{27 + 114 - 16}{6} = \frac{125}{6}\ u.a.$$

A partir deste momento o aluno está apto a resolver todos os exercícios propostos para esta aula.

É importante não se esquecer de realizar as conferencias das resoluções bem como o processo de procedimento no site indicado na aula anterior.