Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

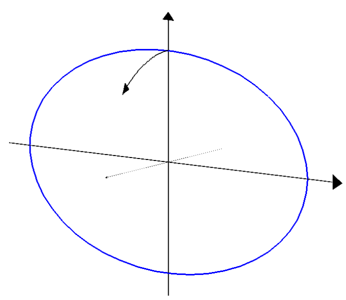
Cálculo 1

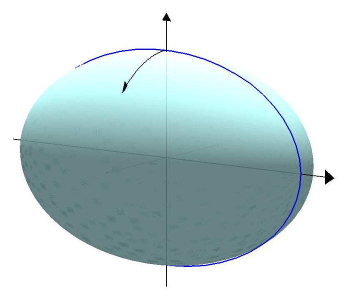
Sólidos de revolução

Para c, $d > 0$, considere a elipse cuja equação é dada por

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1.$$

Quando giramos esta elipse em torno do eixo $\mathcal{O}x$ obtemos um sólido chamado *elipsóide*. Ele se parece um pouco com uma bola de futebol americano e será denotado por $\mathcal{S}$. Veja as figuras a seguir. O objetivo deste texto é desenvolver uma técnica para calcular o volume deste sólido.





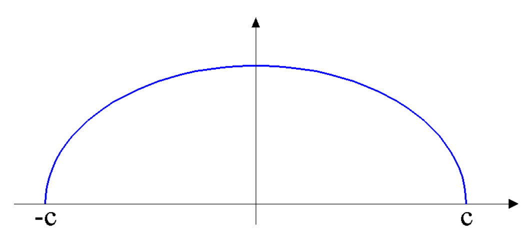
O primeiro passo é observar que, isolando o y na equação da elipse, obtemos

$$y = \pm\frac{d}{c}\sqrt{c^2 - x^2}.$$

O símbolo $\pm$ na expressão acima reflete o fato de que a elipse não é o gráfico de uma função. Contudo, se desconsiderarmos a parte da elipse que fica abaixo do eixo $\mathcal{O}x$, então temos o gráfico da função

$$f(x) = \frac{d}{c}\sqrt{c^2 - x^2}, \ x \in [-c, c].$$

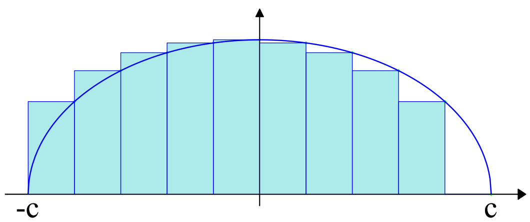
O ponto importante agora é observar que, quando giramos o gráfico da função f em torno do eixo $\mathcal{O}x$, obtemos novamente o elipsóide $\mathcal{S}$.



Vamos agora à técnica para calcular o volume. Para simplificar vamos denotar por $[a, b] = [-c, c]$ o domínio da função f. Note que o seu comprimero é igual a $(b - a) = 2c$. Dado um número $n \in \mathbb{N}$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de igual tamanho $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$, considerando os pontos

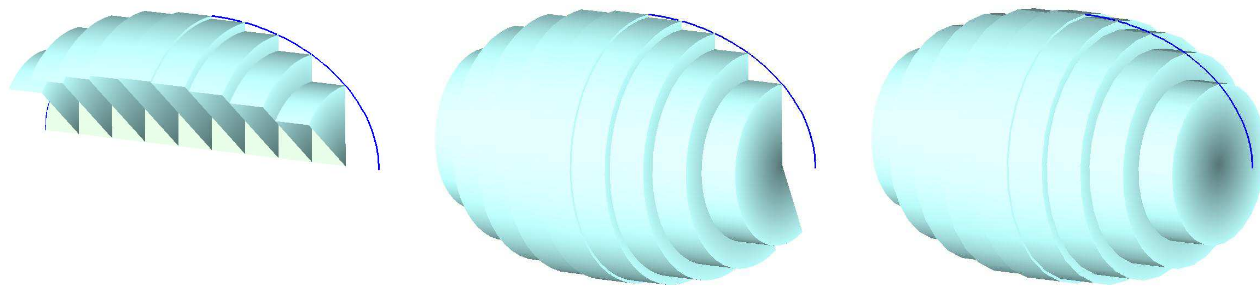
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

em que $x_k = a + k\Delta x$, para cada $k = 1, 2, \ldots, n$. Desse modo podemos construir n retângulos cuja base mede Δx e altura mede $f(x_k)$.



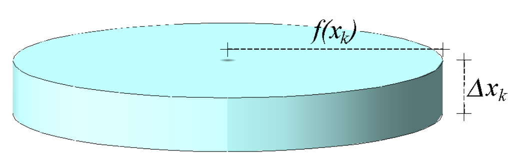
Se somarmos as áreas de cada um destes retângulos obtemos uma aproximação para a área abaixo do gráfico de f, conforme um texto anterior. Porém, neste caso, estamos interessados em aproximar não esta área, mas sim o volume de $\mathcal{S}$.

A ideia agora é bem simples: denotamos por $\mathcal{S}_n$ o sólido gerado pela rotação de todos estes retângulos em torno do eixo $\mathcal{O}x$. Note que o volume de $\mathcal{S}_n$ nos fornece uma aproximação para o volume de $\mathcal{S}$. Além disso, esta aproximação é tão melhor quanto maior for o número de retângulos que consideramos. Deste modo, quando $n \to +\infty$, o volume de $\mathcal{S}_n$ tende para o volume de $\mathcal{S}$.



A estratégia acima é eficiente desde que sejamos capazes de calcular o volume de $\mathcal{S}_n$. Isso de fato ocorre porque $\mathcal{S}_n$ tem o aspecto de um bolo de noiva, com cada "camada do bolo" sendo exatamente o cilindro que se obtém quando girarmos um dos retângulos em torno do eixo $\mathcal{O}x$. Este cilindro, se colocado "em pé", tem como base um círuclo de raio $f(x_k)$ e altura Δx, tendo portanto um volume igual a $\pi f(x_k)^2 \Delta x$.

Portanto, o volume da aproximação $\mathcal{S}_n$ é igual a



$$\text{volume}(\mathcal{S}_n) = \sum_{k=1}^{n} \pi f(x_k)^2 \Delta x = \sum_{k=1}^{n} g(x_k) \Delta x,$$

em que $g(x) = \pi f(x)^2$. Tomando o limite obtemos então

$$\text{volume}(\mathcal{S}) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} g(x_k) \Delta x = \int_a^b g(x) dx = \int_a^b \pi f(x)^2 dx.$$

Lembrando agora que $f(x) = (d/c)\sqrt{c^2 - x^2}$, $a = -c$ e $b = c$, podemos então calcular o volume do elipsóide como se segue:

$$\begin{aligned}
\text{volume}(\mathcal{S}) &= \int_{-c}^{c} \pi f(x)^2 dx = \int_{-c}^{c} \pi \left(\sqrt{c^2 - x^2}\right)^2 dx \\
&= \int_{-c}^{c} \pi \frac{d^2}{c^2}(c^2 - x^2) dx \\
&= \pi \frac{d^2}{c^2} \left(c^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x=-c}^{x=c} = \frac{4}{3}\pi c d^2.
\end{aligned}$$

Observe que, se $c = d = R$, então o elipsóide nada mais é do que uma esfera de raio R. Neste caso, o volume acima se torna $\frac{4}{3}\pi R^3$ que é a conhecida (e misteriosa) fórmula do volume de uma esfera de raio $R > 0$.

O procedimento feito acima funciona para qualquer função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. De fato, quando giramos o gráfico de f em torno do eixo $\mathcal{O}x$ obtemos um sólido $\mathcal{S}$ cujo volume é dado por

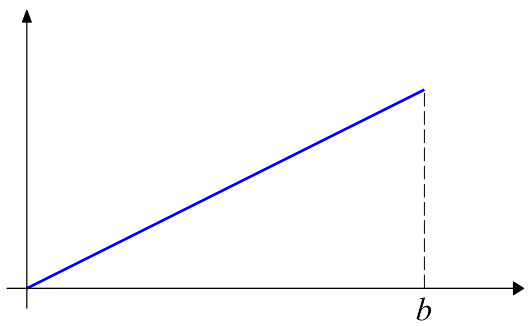
$$\text{volume}(\mathcal{S}) = \int_{a}^{b} \pi f(x)^2 dx.$$

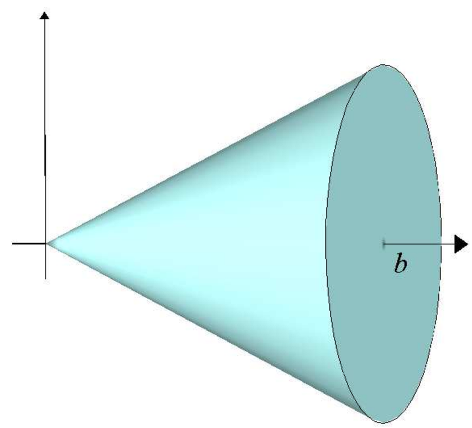
Este tipo de sólido é chamado *sólido de revolução*. Outros exemplos de sólidos de revolução são o cilindro reto e o cone circular.

Finalizamos observando que existem sólidos de revolução que são obtidos ao rotacionarmos regiões em torno do eixo $\mathcal{O}y$ ou mesmo de uma outra reta. A fórmula apresentada aqui funciona somente para rotações em torno do eixo $\mathcal{O}x$.

Tarefa

Nesta tarefa vamos calcular o volume de um cone circular reto de altura $h > 0$ e raio da base igual a $r > 0$. A ideia é girar o gráfico da função $f(x) = cx$, defina no intervalo $[0, b]$. O gráfico desta função está esboçado abaixo.





1. Calcule os valores de b e c, em função da altura h e do raio r.

2. Utilize a fórmula do volume de um sólido de revolução para calcular o volume.