Esboce o gráfico e calcule a área das regiões indicadas abaixo:

21. Região limitada pela curva $y = x^3$ no intervalo $0 \le x \le 1$.

22. Região limitada pela curva $y = x^3$ e o eixo x no intervalo $-1 \le x \le 1$.

23. Região delimitada pelo gráfico da função $y = 1 + x^2$ e o eixo x, no intervalo $-1 \le x \le 1$.

24. Superfície delimitada pela parábola $y = 6 - x - x^2$ e o eixo x.

25. Região limitada pela curva $y = \sqrt{x}$ para $0 \le x \le 4$.

26. Região limitada pelos gráficos das funções $y = x + 1$ e $y = - x^2 + 2x + 3$.

27. Região compreendida entre os gráficos das funções $y = 2 - x^2$ e $y = - x$.

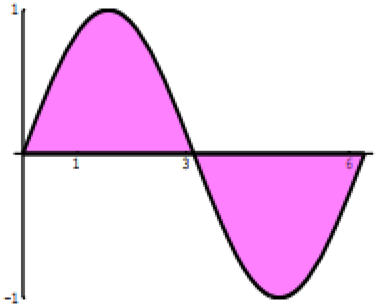
28. Região compreendida entre os gráficos das funções $y = x^2 - 3x$ e $y = - x^2 + 3x$.

29. Superfície limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$.

30. Região limitada pelas curvas $y = x^2 - 2x$ e $y = - x^2 + 4$

Gabarito				
21. $\frac{1}{4}$	**22.** $\frac{1}{2}$	**23.** $\frac{8}{3}$	**24.** $\frac{125}{6}$	**25.** $\frac{16}{3}$
26. $\frac{9}{2}$	**27.** $\frac{9}{2}$	**28.** 9	**29.** $\frac{1}{3}$	**30.** 9

[1] Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando em torno do eixo dos x a região limitada pela curva $y = sen(x)$, $x \in [0, 2\pi]$ e o eixo dos x.



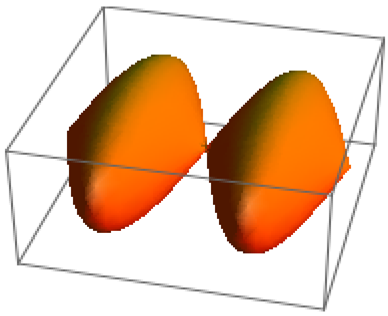
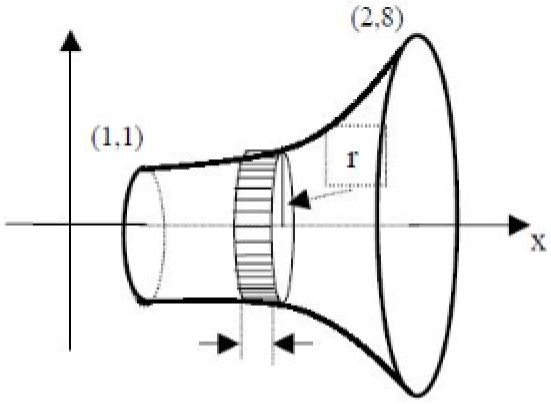


Figura 8.44: Região e o sólido do exemplo [1].

Pela simetria do sólido, calculamos o volume da metade do sólido e multiplicamos o resultado por 2:

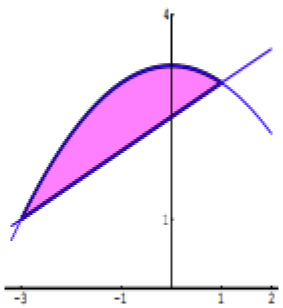
$$V(S) = 2\pi \int_0^{\pi} sen^2(x)\, dx = \pi^2\, u.v.$$

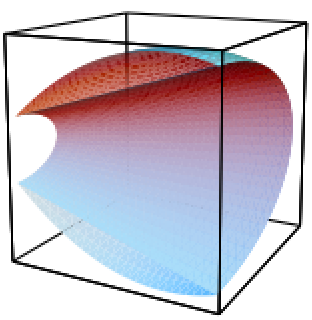
[2] Calcule o volume do sólido gerado pela revolução da região sob o gráfico da função $f(x) = x^3$, no intervalo $[1, 2]$.



$$V = \frac{127pi}{7}$$

[3] Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando em torno do eixo dos x a região limitada pelos gráficos de $4y = 13 - x^2$ e $2y = x + 5$.





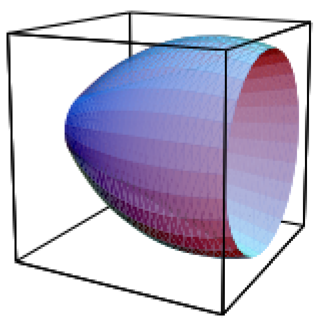


Figura 8.47: Região e o sólido do exemplo [4]

Os limites de integração são $x = -3$ e $x = 1$.

$$V(S) = \pi \int_{-3}^{1} \Big([\frac{13 - x^2}{4}]^2 - [\frac{x+5}{2}]^2\Big)\, dx = \frac{\pi}{16} \int_{-3}^{1} [69 - 30x^2 + x^4 - 40x]\, dx = \frac{64\pi}{5}\, u.v.$$

[4] Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando em torno do eixo dos x a região limitada pelos gráficos de $4\,y = 13 - x^2$ e $2\,y = x + 5$.

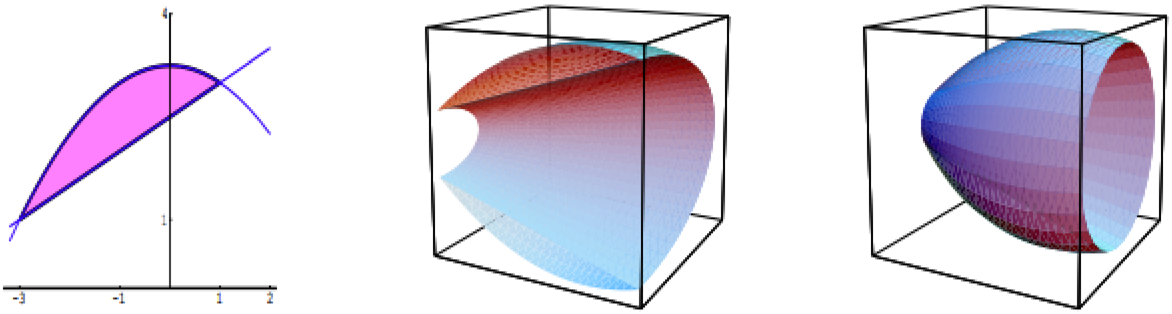


Figura 8.47: Região e o sólido do exemplo [4]

Os limites de integração são $x = -3$ e $x = 1$.

$$V(S) = \pi \int_{-3}^{1} \big([\frac{13 - x^2}{4}]^2 - [\frac{x+5}{2}]^2 \big)\,dx = \frac{\pi}{16} \int_{-3}^{1} [69 - 30\,x^2 + x^4 - 40\,x]\,dx = \frac{64\,\pi}{5}\,u.v.$$

[5] Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando em torno do eixo dos y a região limitada pelo gráfico de $(x-b)^2 + y^2 = a^2$, $0 < a < b$.

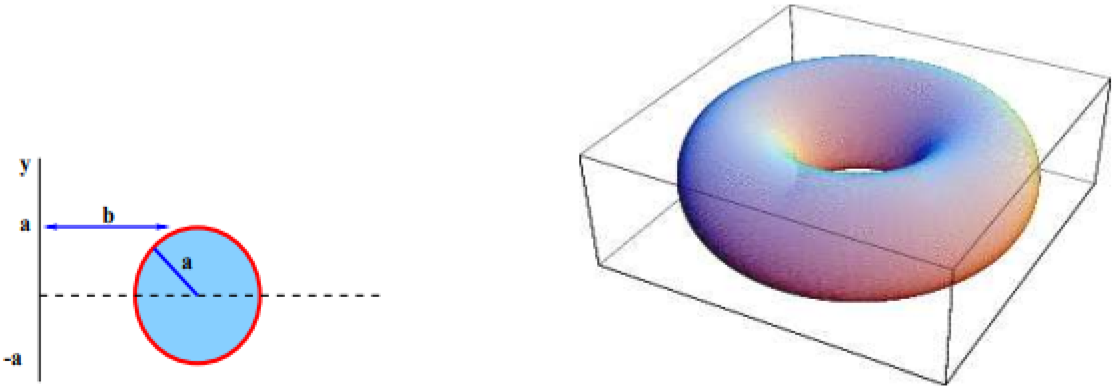


Figura 8.48: Região e o sólido do exemplo [5].

Sejam $M(y) = b + \sqrt{a^2 - y^2}$ e $N(y) = b - \sqrt{a^2 - y^2}$. Os limites de integração são $y = -a$ e $y = a$; então:

$$V(S) = \pi \int_{-a}^{a} \left[\big(M(y)\big)^2 - \big(N(y)\big)^2 \right] dy = 4\, b\, \pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\, dy.$$

Note que $2 \displaystyle\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\, dy$ é a área da região limitada por um círculo de raio a; logo, $V(S) = 2\, \pi^2\, a^2\, b$. A superfície de revolução obtida é chamada toro.

[6] Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando em torno do eixo dos x a região limitada pelo gráfico de $y = e^x$, $-1 \le x \le 1$ e o eixo dos x.

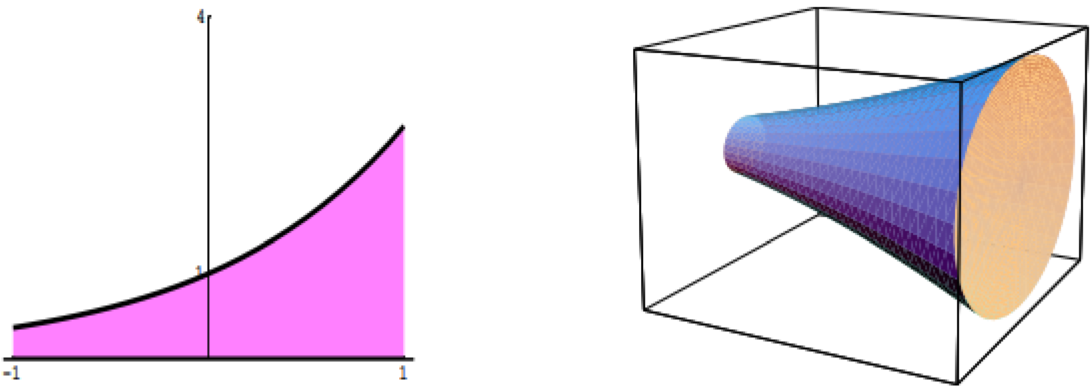


Figura 8.49: Região e o sólido do exemplo [5].

$$V(S) = \pi \int_{-1}^{1} e^{2x}\, dx = \frac{\pi\,(e^2 - e^{-2})}{2}\, u.v.$$

[1] Calcule o comprimento de arco da curva $y=\sqrt[3]{x^2}$ entre os pontos $(8,4)$ e $(27,9)$.
Temos que:

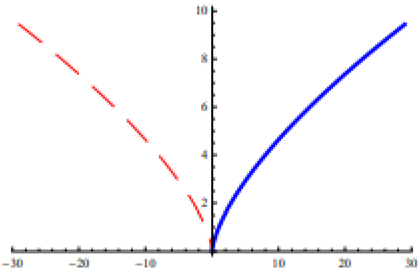


Figura 8.64: Gráfico de $y=x^{2/3}$.

Então:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2},\quad f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\quad \text{e}\quad \sqrt{1+(f'(x))^2}=\frac{\sqrt{9\,x^{\frac{2}{3}}+4}}{3\sqrt[3]{x}};$$

logo: $L=\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_8^{27}\frac{\sqrt{9\,x^{\frac{2}{3}}+4}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$. Seja $u=9\sqrt[3]{x^2}+4$; logo, $du=\frac{6}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

$$L=\frac{1}{18}\int_{40}^{85}\sqrt{u}\,du=\frac{5}{27}\,(17\sqrt{85}-16\sqrt{10})\,u.c.$$

($u.c.$ unidades de comprimento.)

[2] Calcule o comprimento de arco da curva $y=\frac{x^4}{4}+\frac{1}{8x^2}$ tal que $1\le x\le 2$.

Primeiramente: $y'=f'(x)=x^3-\frac{1}{4\,x^3}$; logo, $1+(y')^2=(x^3+\frac{1}{4\,x^3})^2$ e $\sqrt{1+(y')^2}=x^3+\frac{1}{4\,x^3}$; então:

$$L=\int_1^2\left[x^3+\frac{1}{4\,x^3}\right]dx=\frac{2\,x^6-1}{8\,x^2}\bigg|_1^2=\frac{123}{32}\,u.c.$$

[3] Calcule o comprimento de arco da catenária $y=a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ no intervalo $[-b,b]$, tal que $(a,\ b>0)$.

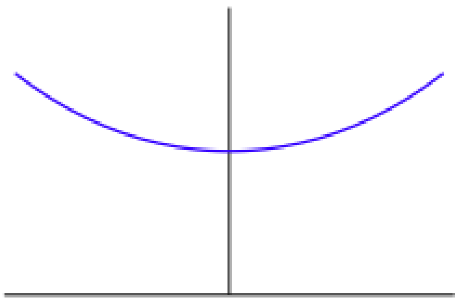


Figura 8.65: Gráfico da catenária.

$y'=senh\left(\frac{x}{a}\right)$; logo, $\sqrt{1+y'^2}=cosh\left(\frac{x}{a}\right)$; então:

$$L=\int_{-b}^{b}cosh\left(\frac{x}{a}\right)dx=2\,a\,senh\left(\frac{b}{a}\right)\,u.c.$$

[4] Calcule o comprimento de arco da curva $y = ln(cos(x))$ tal que $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

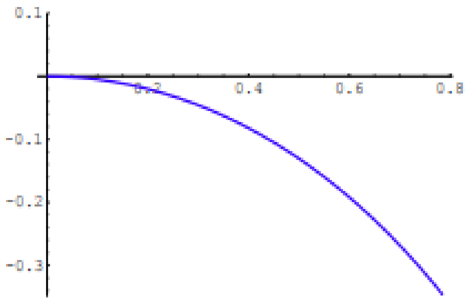


Figura 8.66: Gráfico de $y = ln(cos(x))$.

$y' = -tg(x)$. Logo, $\sqrt{1 + (y')^2} = sec(x)$. Então:

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} sec(x)\, dx = ln(sec(x) + tg(x))\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = ln(\sqrt{2} + 1)\, u.c.$$

Exercícios

Áreas

Calcule a área sob o gráfico de $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$, esboçando cada região, se:

1. $f(x) = 1 - x^2,\ x = -1,\ x = 1$
2. $f(x) = x^3 - x,\ x = -1,\ x = 1$
3. $f(x) = x^3 - 4\,x^2 + 3\,x,\ x = 0,\ x = 2$
4. $f(x) = \dfrac{x - x^3}{3},\ x = -1,\ x = 1$
5. $f(x) = ln(x),\ x = 1,\ x = e$
6. $f(x) = cos^2(x),\ x = 0,\ x = 2\,\pi$
7. $f(x) = 2\,\sqrt{x-1},\ x = 1,\ x = 10$
8. $f(x) = x\,(x-5)^2,\ x = 0,\ x = 1$
9. $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x+2}},\ x = 0,\ x = 5$
10. $f(x) = x\,\sqrt{4\,x^2+1},\ x = 0,\ x = 2$
11. $f(x) = |x|,\ x = -2,\ x = 6$
12. $f(x) = (x+1)^3 + 1,\ x = -2,\ x = 0$
13. $f(x) = x^2 + 2\,x,\ x = -1,\ x = 3$
14. $f(x) = x^4 - x^2,\ x = -1,\ x = 1$

Calcule a área das regiões limitadas pelas seguintes curvas:

1. $y = x^2,\ y = 2x + \dfrac{5}{4}$
2. $y = -x^2 - 4,\ y = -8$
3. $y = 5 - x^2,\ y = x + 3$
4. $x = y^2,\ y = x + 3,\ y = -2,\ y = 3$
5. $y^3 = x,\ y = x$
6. $y = -x^2 - 1,\ y = -2x - 4$
7. $x = y^2 + 1,\ y + x = 7$
8. $y = 4 - x^2,\ y = x^2 - 14$
9. $y = x^3,\ y = \sqrt[3]{x}$
10. $y = x^2,\ y = x^4$
11. $x = y^2 - 2,\ x = 6 - y^2$
12. $y = x|x|,\ y = x^3$
13. $y = x + 4,\ y = \dfrac{x^2}{2}$
14. $y^2 - y = x,\ y - y^2 = x$
15. $y = x^2 + 1,\ y = x + 1$
16. $y = x^2,\ y = -x + 2$
17. $y = |x|,\ y = (x+1)^2 - 7,\ x = -4$
18. $y = ln(|x|),\ |y| = 3$
19. $y = cosh(x),\ y = senh(x),\ x = \pm 1$
20. $y = ln(x),\ x = 1,\ y = 4$
21. $y = x^4 - 2\,x^2,\ y = 2\,x^2$
22. $y = cos(x),\ y = cos^2(x),\ 0 \le x \le \pi$
23. $y = e^x,\ y = e^{2x-1},\ x = 0$

Calcule a área das regiões limitadas pelas seguintes curvas:

1. $y = x^2 - x,\ y = sen(\pi\, x),\ x = -1,\ x = 1$
2. $y = sen(x),\ y = cos(x),\ x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2}$
3. $y = cos(x),\ y = 1 - cos(x),\ x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2}$
4. $2\,y\,(1 + y^2)^3 - x = 0,\ y = 0,\ y = 1$
5. $y = \dfrac{8}{x^2},\ y = x,\ y = 8x,\ x > 0$
6. $y = x\,(x - 3),\ y = x\,(3 - x)$
7. $y = \dfrac{\sqrt{1 - x}}{1 + x},\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0$
8. $y = \dfrac{sen(2\,x)}{2},\ y = \dfrac{sen(2\,x)}{2} + sen(2\,x), 0 \leq x \leq \pi$
9. $y\,(x^2 + 4) = 4(2 - x)$ e os eixos coordenados
10. $y = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$ e o eixo dos x
11. $x - \sqrt{4y^2 - y^4} = 0$ e o eixo dos y
12. $y = \dfrac{1}{(2x + 1)^2},\ x = 1,\ x = 2$
13. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x + 1}}, x = 0,\ x = 4$
14. $y = e^{-x},\ y = x + 1,\ x = -1$
15. $y = e^{-x},\ y = \sqrt{x + 1},\ x = 1$
16. $y = e^x,\ y = 10^x,\ y = e$
17. $y = -x^3 + 2\,x^2 + 3\,x,\ y = -5\,x$
18. $x^2\,y = 3,\ 4\,x + 3\,y - 13 = 0$
19. $x = y\,(y - 3)^2,\ x = 0$
20. $y = x^4 - 3\,x^2,\ y = x^2$
21. $x = 1 - y^2,\ x = y^2 - 1$
22. $y = x\,e^{-x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = c$, onde c é a abscissa do ponto de inflexão da curva

23. $y = x\,e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = c$, onde c é o máximo

24. $y = \dfrac{ln(x)}{x}$, $y = 0$, $x = c$, onde c é o máximo

25. $x^2 - 2\,y + y^2 = 0$, $x^2 + y^2 = 1$

26. $x = 3\,y$, $x + y = 0$ e $7\,x + 3\,y = 24$

27. $x^2 = 4\,y$, $y = \dfrac{8}{x^2 + 4}$

Volumes de Revolução

Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo dos x, da região limitada pelas seguintes curvas:

1. $y = x + 1$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$
2. $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$
3. $y = x^2$, $y = x^3$
4. $y = cos(x)$, $y = sen(x)$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$
5. $x + y = 8$, $x = 0$, $y = 0$
6. $y = x^4$, $y = 1$, $x = 0$
7. $x\,y = 1$, $x = 2$, $y = 3$
8. $x^2 = y^3$ e $x^3 = y^2$
9. $y = cos(2\,x)$, $0 \leq x \leq \pi$
10. $y = x\,e^x$, $y = 0$ e $x = 1$
11. O triângulo de vértices $(0,0)$, $(0,2)$ e $(4,2)$

Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo dos y, da região limitada pelas seguintes curvas:

12. $y = ln(x)$, $y = -1$, $y = 2$, $x = 0$
13. $y = 4 - x^2$, no primeiro quadrante
14. $x = 1 + sen(y)$, $x = 0$, $y = \pm\dfrac{5\pi}{2}$

15. $y^2 = 4x$, $y = 0$ e $x = 4$

16. $y = 1 - \dfrac{1}{x^4}$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = \dfrac{15}{16}$

17. $9\,x^2 + 16\,y^2 = 144$

18. $y = x^2 + 1,\ x = 0$ e $x = 2$

19. $y^2 = x,\ x = 2\,y$

20. $y = \sqrt{x^2 + 1}$, $x = 0$ e $x = 2$

21. $y = \sqrt[4]{4 - x^2}$, $x = 0$ e $x = 1$

Comprimento de Arco

Calcule os comprimentos de arco da seguintes curvas, entre os pontos indicados:

1. $y = 5\,x - 2$; $(-2, -12)$ e $(2, 8)$
2. $12\,x\,y = 4\,x^4 + 3$; $(1, \dfrac{7}{12})$ e $(3, \dfrac{109}{12})$
3. $x - \dfrac{y^3}{3} - \dfrac{1}{4\,y} = 0$; $(\dfrac{7}{12}, 1)$ e $(\frac{67}{24}, 3)$
4. $y = ln(x)$; (x, y) tal que $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$
5. $y = \dfrac{1}{6}\,(x^3 + \dfrac{3}{x})$; $(1, \dfrac{2}{3})$ e $(3, \dfrac{14}{3})$
6. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$

7. $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$; (x, y) tal que $0 \leq x \leq 1$

8. $y = \int_4^x \sqrt{t-1}\,dt$, do ponto $(4, 0)$ até $(9, \int_4^9 \sqrt{t-1}\,dt)$

9. $y = \int_0^x t\sqrt{t^2+2}\,dt$, do ponto $(0, 0)$ até $(2, \int_0^2 t\sqrt{t^2+1}\,dt)$

10. $y = \int_1^x \sqrt{t^4+t^2-1}\,dt$, do ponto $(1, 0)$ até $(3, \int_1^3 \sqrt{t^4+t^2-1}\,dt)$

11 $y = \sqrt{x^3}$, do ponto $(0, 0)$ até $(1, 1)$

11. $y = \sqrt[3]{x^2}$, do ponto $(0, 0)$ até $(1, 1)$

12. $y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}$, de $x = 1$ até $x = 3$

13. $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{x}}{2}$, de $x = 1$ até $x = 4$

14. $y = ln(sen(x))$, de $x = \frac{\pi}{3}$ até $x = \frac{\pi}{2}$

15. $y = ln(sec(x))$, de $x = 0$ até $x = \frac{\pi}{3}$

16. $y = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$, de $x = \frac{1}{8}$ até $x = 1$

17. $y = ln(cos(x))$ de $x = 0$ a $x = \frac{\pi}{4}$

18. $y = 2\sqrt{x}$ de $x = 1$ a $x = 2$

19. $y = arcsen(e^{-x})$ de $x = 0$ a $x = 1$