UMA NOVA VISÃO SOBRE ε e δ *

DAVIDSON FREITAS NOGUEIRA**, **JOÃO LOPES CARDOSO FILHO*****

Resumo: *uma nova visão sobre* ε *e* δ *é um texto que trata o cálculo diferencial e integral com outro olhar. Passando por uma rápida definição de número infinitesimal e abordando todas as propriedades válidas para as funções reais. Através de princípios, transferem-se tais propriedades para as funções hiper-reais, que é o conjunto que contém, além dos números reais, os também denominados números infinitesimais. A partir desta visão surge uma nova forma de se tratar a derivada de uma função, assim como a diferencial e a reta tangente.*

Palavras-chave: *Cálculo diferencial. Conjunto hiper-real. Número infinitesimal.*

O Cálculo Diferencial e Integral, também chamado de cálculo infinitesimal, ou simplesmente Cálculo, é um ramo importante da matemática, desenvolvido a partir

* Recebido em: 12.05.2011.
Aprovado em: 12.06.2011.

** Núcleo de Estatística, Matemática e Matemática Aplicada. *E-mail*: davidsonfreitas1771@hotmail.com.

*** Núcleo de Estatística, Matemática e Matemática Aplicada. Instituto Federal Goiano – câmpus Urutaí·

da Álgebra e da Geometria, que se dedica ao estudo de taxas de variação de grandezas. O objetivo deste trabalho é dar uma breve introdução ao conceito de número infinitesimal e como eles podem nos auxiliar no estudo de taxa de variação de grandezas.

PRELIMINARES

Número Infinitesimal

Definição 1: Um número ε é dito ser infinitamente pequeno, ou infinitesimal, se $-a < \varepsilon < a$, para todo número real a positivo.

Portanto, o único número real que é infinitesimal é o número zero. Levando em consideração que o conjunto dos números reais só engloba o número infinitesimal zero, faz-se necessário a criação de um novo conjunto numérico, aqui denominado conjunto dos números hiper-reais, representado por $\mathbb{R}^*$. Tal conjunto além do zero contém todos os números reais e números infinitesimais diferentes de zero, que podem ser de dois tipos: positivos ou negativos. Os símbolos Δ_x, Δ_y e as letras gregas ε e δ serão utilizados para infinitesimal.

Se a e b são números hiper-reais cuja diferença $b-a$ é infinitesimal, dizemos que a está infinitamente próximo de b.

Exemplo

Se Δ_x é infinitesimal então $x_0 + \Delta_x$ é infinitamente próximo de x_0.

Se ε é um infinitesimal positivo, então $-\varepsilon$ será um infinitesimal negativo. 1/ ϵ será infinito positivo e -1/ ϵ será infinito negativo.

A Figura 1 mostra um desenho de uma reta hiper-real. Os círculos representam “microscópios infinitesimais”, poderosos o suficiente para mostrar uma parte infinitamente pequena da reta hiper-real e o conjunto dos números reais está espalhado entre os números finitos.

estudos, Goiânia, v. 38, n. 3, p. 489-501, jul./set. 2011.

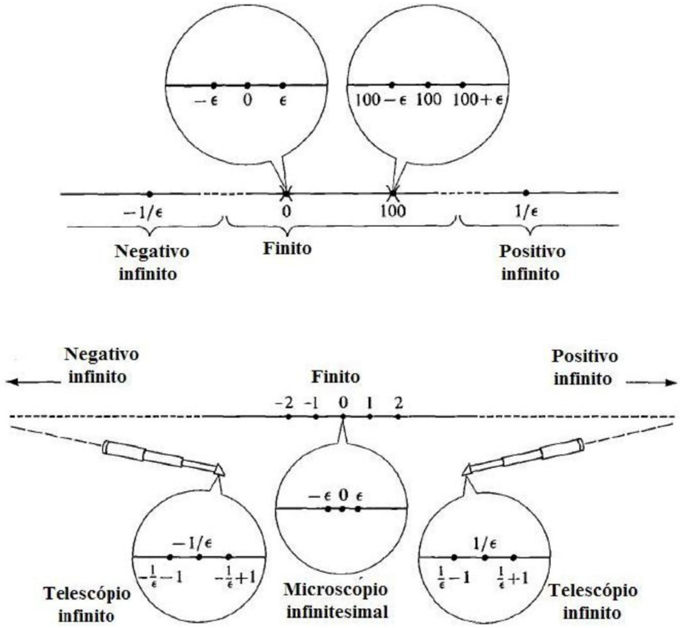

Figura 1: Retal Hiper-real

Existem três princípios básicos referentes aos números reais e hiper-reais:

- Princípio da Extensão
- Princípio da Transferência
- Princípio da Parte *Standard*

Princípio da Extensão

O Princípio da Extensão lida com funções de números hiper--reais, assim como funções reais. Para cada real a, uma função f de uma variável ou associa a outro número real $b = f(a)$ ou está indefinida. O mesmo principio é aplicada ao conjunto hiper--real, em que para cada número hiper-real H, uma função F de uma variável, ou associa a outro número hiper-real $K = F(H)$ ou está indefinida.

Definição 2

Um número hiper-real b é dito ser:

- Infinitesimal positivo: se b é positivo, mas menor do que qualquer número real positivo;
- Infinitesimal negativo: se b é negativo, mas maior do que qualquer número real negativo;
- Infinitesimal: se b é infinitesimal positivo, negativo ou zero.

A partir do conceito do Princípio de Extensão e da Definição 2 já podemos tirar algumas conclusões:

a) Os números reais formam um subconjunto dos números hiper-reais, e a relação de ordem $x < y$ para os números reais é um subconjunto da relação de ordem para os números hiper-reais.
b) Existe um número hiper-real que é maior do que zero, mas menor do que qualquer número real positivo.
c) Para cada função real de uma variável é dada uma nova função f^* de mesmo número de variáveis. A função f^* é chamada de extensão natural de f .

Princípio da Transferência

O Princípio da Transferência diz que a extensão natural de cada função real tem as mesmas propriedades que a função original.

Exemplos

- Para qualquer x e y , a soma $x+y$ é definida.
- Comutativa: $x+y=y+x$.
- Regra de ordem: $0<x<y \Rightarrow 0<\frac{1}{y}<\frac{1}{x}$.
- Divisão por zero: $\frac{x}{0}$ é indefinido.
- Identidade algébrica: $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$.
- Identidade trigonométrica: $sin^2 x + cos^2 x = 1$.
- Regra para logaritmos: $x>0$ e

estudos, Goiânia, v. 38, n. 3, p. 489-501, jul./set. 2011.

$$y > 0 \Rightarrow \log xy = \log x + \log y \,.$$

O Princípio de Extensão diz que há pelo menos um número infinitesimal hiper-real positivo, diga-se ε . A partir de ε , pode-se utilizar o princípio de transferência para construir infinitos outros números infinitesimais positivos.

Isto ocorre a partir do princípio de transferência, pois $0 < \varepsilon^2 < \varepsilon$

para todo x real entre 0 e 1.
A partir do princípio de transferência podem ser construídos outros exemplos de números hiper-reais, como:

$$\varepsilon^3, \frac{\varepsilon}{100}, 75\varepsilon, \sqrt{\varepsilon}, \varepsilon + \sqrt{\varepsilon}, -\varepsilon, -\varepsilon^2, 1 + \sqrt{\varepsilon}, (10 - \varepsilon)^2, \frac{1}{\varepsilon}$$

Definição 3

Um número b hiper-real é dito ser:
Finito: se b estiver entre dois números reais;
Infinito positivo: se b é maior do que qualquer número real;
Infinito negativo: se b é menor do que qualquer número real.

Observe que cada número infinitesimal é finito. Porém existe uma série de regras muito extensas para decidir se um determinado número hiper-real é infinitesimal, finito ou infinito, portanto serão omitidas. No entanto, deixa-se de atentar sobre dois casos:

Se ε é infinitesimal e a é finito, então o produto $a.\varepsilon$ é infinitesimal. Por exemplo, 1/ ϵ , - 6ϵ, (5-ϵ) ϵ são infinitesimais.

Isto pode ser visto de forma intuitiva na figura 2; um retângulo infinitamente fino e de comprimento a sendo que sua área é infinitesimal;

Se ε é um infinitesimal positivo, então 1/ ϵ é infinito positivo.

Por experiência, sabemos que recíprocos de números pequenos são grandes, assim esperamos intuitivamente que 1/ ϵ tenda para mais infinito.

Podemos usar o princípio da transferência para provar que 1/ ϵ é infinito positivo.

Figura 2: Retângulo com área infinitesimal

Demonstração do item II

Seja r qualquer número real positivo diferente de 0 desde que ε é infinitesimal positivo, da definição tem-se que este é menor que qualquer número real, ou seja:

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{r}$$

aplicando o princípio de transferência:

$$0 < \frac{r}{1} < \frac{1}{\varepsilon}$$

$$0 < r < \frac{1}{\varepsilon}$$

Portanto 1/ ϵ tende para mais infinito, ou seja, maior do que qualquer número real r positivo.

Princípio da Parte Standard

Dois números hiper-reais b e c são infinitamente próximos um ao outro, em símbolos $\approx$, se a sua diferença $b-c$ for infinitesimal.
Se ε é infinitesimal, então $b \approx b+\varepsilon$.
b é infinitesimal se, e somente se, $b \approx 0$.

estudos, Goiânia, v. 38, n. 3, p. 489-501, jul./set. 2011.

Se b e c são reais e b é infinitamente próximo de c, então b é igual a c, pois sua diferença $b-c$ é real e infinitesimal. Portanto, o único número que é real e infinitesimal é o zero, e sendo assim $b=c$.

Teorema 1

Seja a, b e c números hiperreais:

$a \approx a$;

Se $a \approx b$, então $b \approx a$;

Se $a \approx b$ e $b \approx c$, então $a \approx c$.

Demonstração

O motivo de (i) é que $a-a$ é um infinitesimal, ou seja, zero. Em (ii), nota-se que se $a-b$ é um infinitesimal ε, então $b-a=-\varepsilon$, que também é um infinitesimal, (iii) é verdadeira pois $a-c$ é a soma de dois infinitesimais, ou seja, $a-b$ e $b-c$.

Teorema 2

Assumindo $a \approx b$, então:

- Se a é infinitesimal, b também é.
- Se a é finito, b também é.
- Se a é infinito, b também é.

Os números reais algumas vezes são chamados de “Standard”, enquanto os números hiper-reais que não são reais são chamados de números “atípicos”. Por esta razão, o número real que é infinitamente próximo de b é a chamada “Parte Standard” de b.

Um número infinito não pode ter uma parte da norma, porque ele não pode ser infinitamente próximo de um número finito (Teorema 2).

Definição 5 (Princípio da Parte Standard)

Cada número hiper-real finito é infinitamente perto de exatamente um número real.

Definição 6

Seja b um número hiper-real finito, a parte standard de b, denotado por $st(b)$, é o número real que é infinitamente próximo de b. Números hiper-reais infinitos não tem parte standard.

Aqui estão alguns fatos que se seguem a partir da definição.

1. $st(b)$ é um número real.

2. para todo infinitesimal ε.

3. Se b é real, então $b = st(b)$.

Teorema 3: Seja b e b números hiper-reais finitos. Então: $b = st(b) + \varepsilon$

i. $st(-a) = -st(a)$·

ii. $st(a+b) = st(a) + st(b)$·

iii. $st(a-b) = st(a) - st(b)$·

iv. $st(ab) = st(a).st(b)$·

v. Se $st(b) \neq 0$, então $st\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{st(a)}{st(b)}$.

vi. $st(a^n) = \left(st(a)\right)^n$·

vii. Se $a \geq 0$, então $st\left(\sqrt[n]{a}\right) = \sqrt[n]{st(a)}$.

viii. Se $st(a) \leq st(b)$, então $st(a) \leq st(b)$.

Demonstração

Item (iv). Seja r a parte standard de a e s a parte standard de b de modo que $a = r + \varepsilon$ e $b = r + \delta$, onde ε e δ são infinitesimais. Então:

estudos, Goiânia, v. 38, n. 3, p. 489-501, jul./set. 2011.

$$ab = (r+\varepsilon)(s+\delta) = rs + r\delta + \varepsilon s + \varepsilon\delta \approx rs$$

Portanto,

$$st(ab) = rs = st(a)st(b)$$

A DERIVADA

Definição 7

Seja f uma função hiperreal de uma variável e a pertencente ao seu domínio. S é a inclinação de f em a se:

$$S = st\left(\frac{f(a+\Delta_x) - f(a)}{\Delta_x}\right)$$, para todo infinitesimal $\Delta_x \neq 0$.

A inclinação, quando existe, é infinitamente próxima da taxa de variação de $f(x)$ para uma mudança infinitamente pequena em x. Dada uma curva $y = f(x)$, a inclinação de f em a também é chamada de inclinação da curva $y = f(x)$ em $x = a$. A figura 3 mostra um $\Delta_x \neq 0$ e a reta de um hiper-real passando por dois pontos da curva, em a e em $a + \Delta_x$.

Onde o quociente

$$\frac{f(a+\Delta_x) - f(a)}{\Delta_x}$$

é a inclinação desta reta, e a sua parte *standard* é a inclinação da curva.

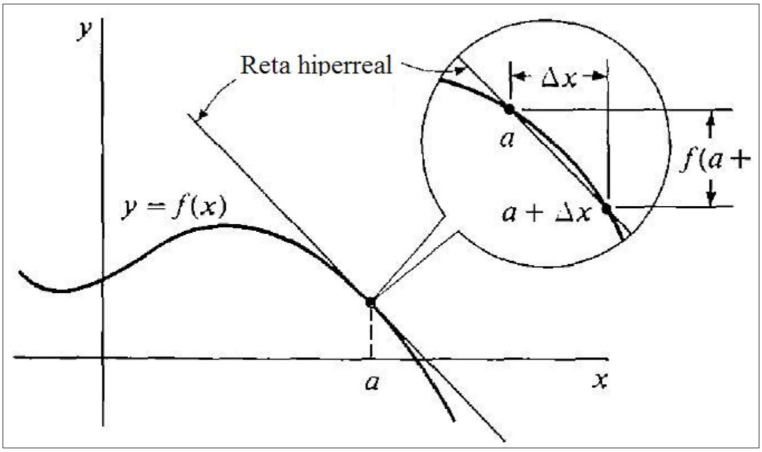

Figura 3: Reta hiper-real passando por dois pontos da curva

Seja f uma função hiper-real de uma variável. Denomina-se derivada de f, denotado por $f\,'$, a nova função cujo valor em x_0 é a inclinação de f em x_0.

$$f\,'(x) = st\left(\frac{f(a+\Delta_x) - f(a)}{\Delta_x}\right)$$, sempre que a inclinação existe.

Observação 1

A derivada de f é indefinida se a inclinação de f não existir em x. Para um determinado ponto a, a inclinação de f em a e a derivada de f em a são a mesma coisa. Costuma-se usar a palavra "inclinação" para enfatizar a figura geométrica, e "derivada" para enfatizar o fato de que $f\,'$ é uma nova função.

Diferencial e Reta Tangente

Dada uma curva $y = f(x)$, suponha que x inicia com um valor a e sofre uma variação infinitesimal Δ_x. O que acontece com y?

Ao longo da curva, y mudará: $f(a+\Delta_x) - f(a) = \Delta_y$, mas ao longo da reta tangente y irá mudar a quantidade:

estudos, Goiânia, v. 38, n. 3, p. 489-501, jul./set. 2011.

$$l(a+\Delta_x)-l(a)=[f\,'(a)(a+\Delta_x-a)+b]-[f\,'(a)(a-a)+b]$$

$$l(a+\Delta_x)-l(a)=f\,'(a)\Delta_x$$

Quando x varia de a para $a+\Delta_x$, vê-se que a variação de y ao longo da curva é dada por $f(a+\Delta_x)-f(a)$ e a variação de y ao longo da reta tangente por $f\,'\Delta_x$.

Teorema 4 (Teorema Incremental)

Seja f uma função hiper-real de uma variável. Suponha-se que a derivada de f exista em x_0, se Δ_x é infinitesimal. Então Δ_y também é infinitesimal, e $\Delta_y=f\,'(x)\Delta_x+\varepsilon\Delta_x$, para qualquer infinitesimal ε.

Demonstração

Caso 1: $\Delta_x=0$. Neste caso, $\Delta_y=f\,'(x)\Delta_x=0$, e temos que $\varepsilon=0$.

Caso 2: $\Delta_x\neq 0$. Então: $\dfrac{\Delta_y}{\Delta_x}\approx f\,'(x)$

para qualquer infinitesimal ε temos: $\dfrac{\Delta_y}{\Delta_x}=f\,'(x)+\varepsilon$

Daí,

estudos, Goiânia, v. 38, n. 3, p. 489-501, jul./set. 2011.

$$\Delta_y = f'(x)\Delta_x + \varepsilon\Delta_x$$

Introduz-se uma nova variável dependente, denotado por d_y, e denominado diferencial de y, tal que:

$d_y = f'(x)\Delta_x$, onde d_y é igual à variação de y ao longo da reta tangente com x variando para $x + \Delta_x$. Na figura

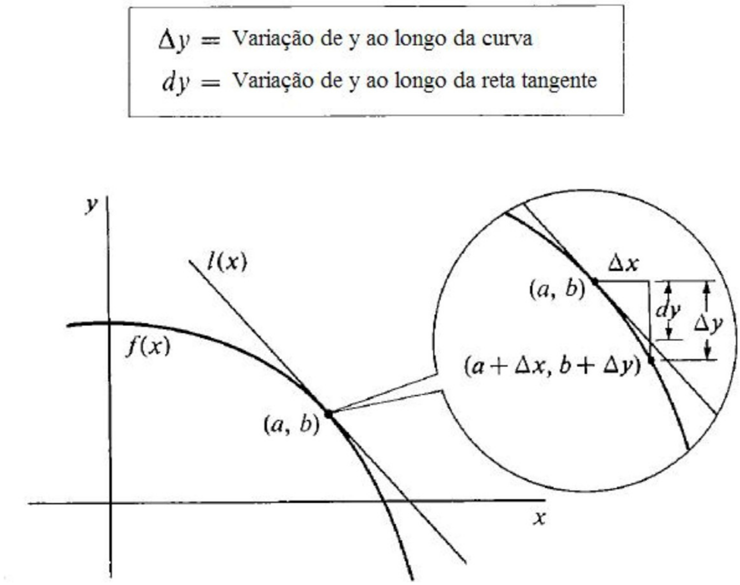

Figura 4: Variação de y ao longo da curva e da reta tangente

Definição

Suponha-se que y dependa de x, sendo $y = f(x)$.
O diferencial de x é a variável independente $d_x = \Delta_x$;
O diferencial de y é a variável dependente d_y dada por
$d_y = f'(x)d_x$

estudos, Goiânia, v. 38, n. 3, p. 489-501, jul./set. 2011.

Quando $d_x \neq 0$, a equação acima pode ser reescrita como

$$\frac{d_y}{d_x} = f'(x)$$

O diferencial d_y depende de duas variáveis independentes, x e d_x. Em notação funcional $d_y = df(x, d_x)$, onde df é a função real de duas variáveis definida por $df(x, d_x) = f'(x)d_x$ Assim quando d_x é substituído por Δ_x e d_y por $f'(x)d_x$, o Teorema Incremental assume a forma

$$\Delta_y = d_y + \varepsilon d_x$$

CONCLUSÃO

Vê-se que existem maneiras distintas, dentre as que são ensinadas nos cursos superiores, para desenvolver o cálculo diferencial e integral. Sendo que abrem novas abordagens para o ensino da disciplina, que segundo dados estatísticos, mais reprovam alunos nos cursos superiores do Brasil.

A NEW VISION ON ε E δ

Abstract: *new insight and is a text dealing with the differential and integral calculus with another look. Undergoing rapid definition of infinitesimal number and addressing all valid properties for real functions. Through principles, such properties are transferred to the hyper-real functions, which is the set that contains, in addition to the real numbers, also called infinitesimal numbers. From this vision comes a new way to treat the derivative of a function, as well as the differential and the tangent line.*

Keywords: *Differential calculus. Set hyperreal. Number infinitesimal.*

Referências

APOSTOL, Tom M. Calculus, Second Ediction, Jhon Wiley & Sons, 1967. V. 1.

GUIDORIZZI, L. H. Um Curso de Cálculo, Volume 1, 5. ed. Rio de Janeiro: Ed. LTC, 1985.

KEISLER, H. Jerome. Elementary Calculus: An approach using infinitesimals, Second Edition, Prindle Weber \& Schmidt, 1976.

KEISLER, H. Jerome. Foundations of Infinitesimal Calculus. Prindle Weber & Schmidt, 1976.

SPIVAK, Michael. Calculus. Addison-Wesley, 1973.