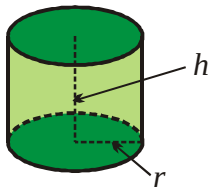
5 Funções em Espaços n-Dimensionais

5.1 Introdução

Considere os seguintes exemplos:

94. O volume "*V*" de um cilindro circular é calculado pela expressão: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, sendo que r é o raio da base e h a altura.

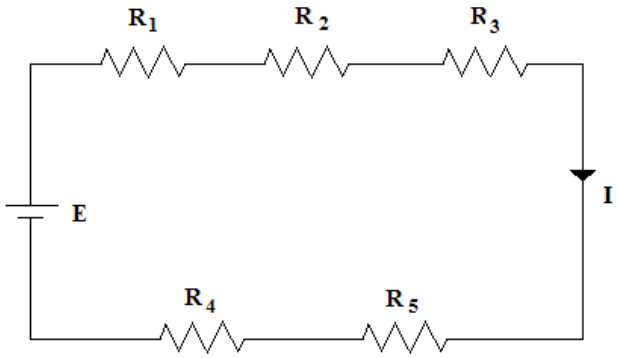


95. A equação de estado de um gás ideal é dada pela seguinte equação:

$$P = \frac{n \cdot R \cdot T}{V}$$

Onde: *P*= pressão; *V*= volume; *n* = massa gasosa em moles; *R*= constante molar do gás; e *T* = temperatura.

96. O circuito elétrico da figura que segue tem cinco resistores. A corrente deste circuito depende das resistências R_i, $i = 1, \cdots, 5$, onde *E* é a tensão da fonte.



Todos estes exemplos representam funções de várias variáveis. Assim, no primeiro exemplo, temos que o volume do cilindro pode ser indicado por uma função de duas variáveis independentes *r* e *h*, indicada por $V = V(r,h)$, e cuja regra é $V(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

No segundo exemplo, temos que a pressão de um gás ideal pode ser representada pela função de três variáveis independentes *V*, *T* e *n*. Desta forma, a regra da referida função é $P(V,T,n) = \frac{n \cdot R \cdot T}{V}$.

Finalmente, no último caso, a corrente do circuito pode ser dada por uma função de cinco variáveis independentes R_1, R_2, R_3, R_4 *e* R_5, isto é:

$$I(R_1, R_2, R_3, R_4, R_5) = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5}$$

Conforme será visto, o estudo de funções com três ou mais variáveis não difere muito do estudo das funções de duas variáveis. Desta forma, neste estudo trabalharemos mais com as funções de duas variáveis independentes, salientando as diferenças fundamentais entre estas funções e as funções de uma única variável independente, além de reforçar as principais analogias existentes entre elas.

Definição

Seja *A* um conjunto do espaço *n*-dimensional $A \subseteq \Re^n$, isto é, os elementos de *A* são *n*-uplas ordenadas $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ de números reais. Se a cada ponto *P* do conjunto *A* associarmos um único elemento $w \in \Re$, temos uma função $f : A \subseteq \Re^n \to \Re$. Essa função é chamada de função de *n* variáveis reais.

Simbolicamente:

$$\begin{aligned} f: \quad & A \subseteq \Re^n \to \Re \\ & x \mapsto w = f(x) \end{aligned}$$

ou $w = f(x) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Definição: Domínio de Função

Domínio da função f é o conjunto *A* da definição anterior, isto é,

$$Df = \{ x \in A \subseteq \Re^n ;\ w = f(x) \}.$$

Como para as funções de uma variável, em geral, uma função de várias variáveis também é especificada apenas pela regra que a define. Nesse caso, o domínio da função é o conjunto de todos os pontos de $x \in \Re^n$, para os quais a função está definida.

Definição: Imagem de Função

Imagem da função f é o conjunto dos números $w \in \Re$, tais que $w = f(x)$.

$$\text{Im } f = \{ w \in \Re ;\ w = f(x) \}.$$

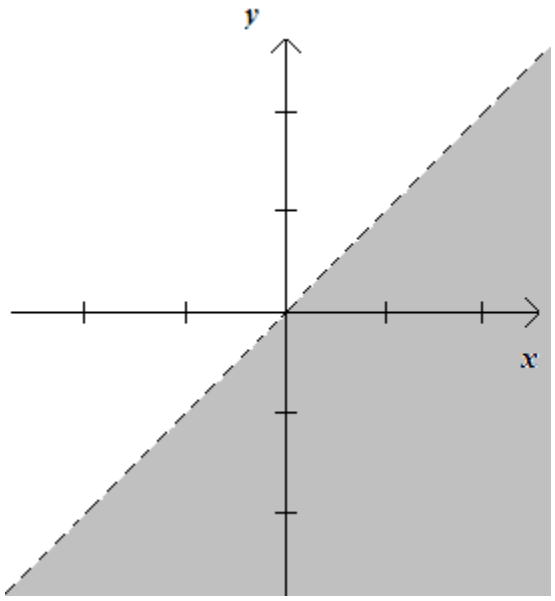
Exemplo

97. Determine o domínio e a imagem da função $z = f(x) = \sqrt{9 - x_1^2 - x_2^2}$ definida de $\Re^2$ em $\Re$.

Resolução:

98. Represente graficamente o domínio da função $f(x, y) = \ln(x - y)$.

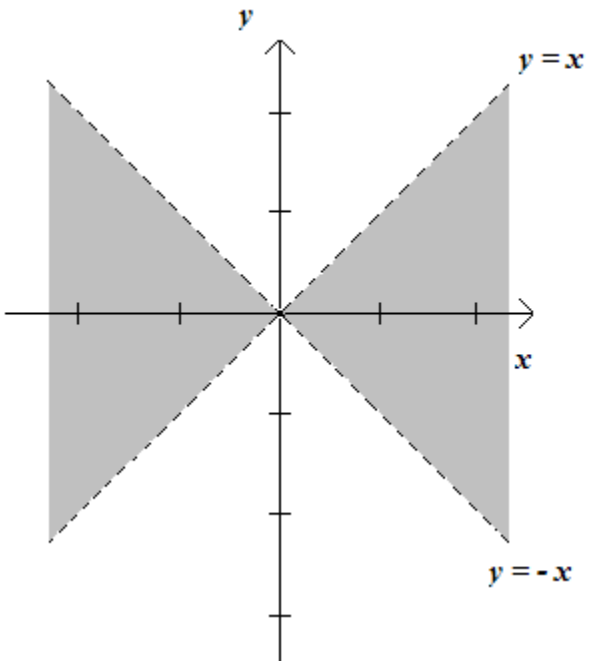
Resolução:



Resposta:

99. Represente graficamente o domínio da função $f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

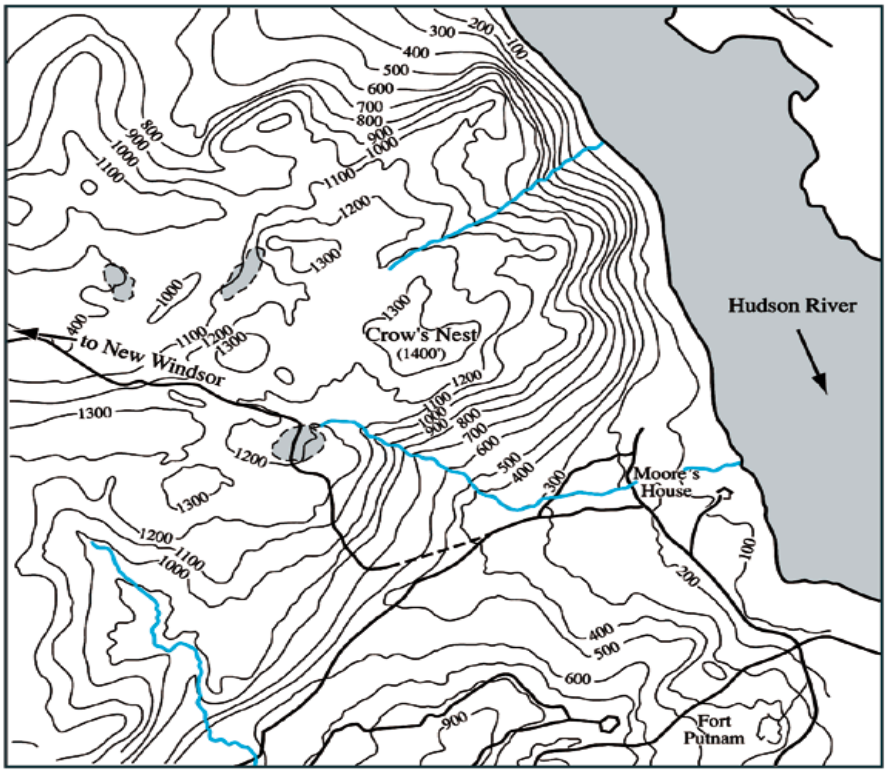
Resolução:



Resposta:

Definição: Curva de Nível (*Cn*)

Considere $f : \Re^2 \to \Re$. O conjunto de pontos $x \in \Re^2$ onde uma função $f(x)$ tem um valor constante $f(x) = f(x_1, x_2) = c$ é chamado de curva de nível de f. Representação: Cnc.



Definição: Gráfico de uma função

O conjunto de todos os pontos $(x_1, x_2, f(x))$ no espaço, para $x \in \Re^2$ no domínio de f, é chamado de GRÁFICO de f.

O gráfico de f também é chamado de SUPERFÍCIE $w = f(x) = f(x_1, x_2)$.

Definição: Curva de Contorno (*Cc*)

A curva no espaço na qual o plano $w = c$ intercepta uma superfície $w = f(x, y)$ é chamada de curva de contorno $f(x, y) = c$. Representação: Ccc.

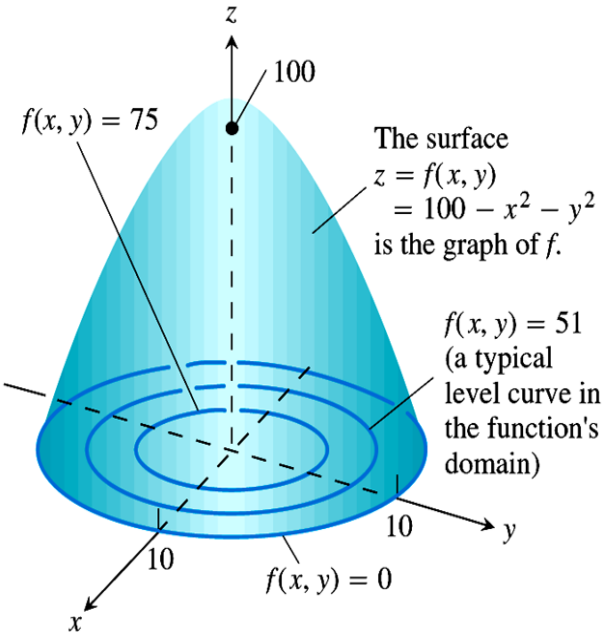
Definição: Conjunto de Nível

Se f é uma função de n variáveis, $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e k é um número real, um conjunto de nível de f, é o conjunto de todos os pontos $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Df$ para os quais $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k$.

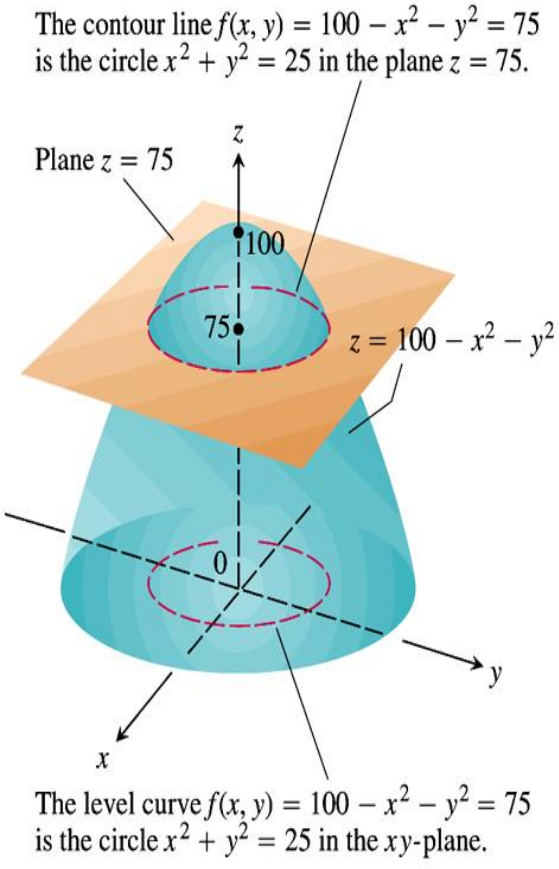
Em particular, quando f é uma função de três variáveis independentes, temos as superfícies de nível. Nesse caso, o conhecimento das superfícies de nível, que podem ser visualizadas no espaço tridimensional, ajuda muito a entender o comportamento da função.

Exemplo

100. No exemplo que segue, podemos observar algumas curvas de nível da função $z = f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$.



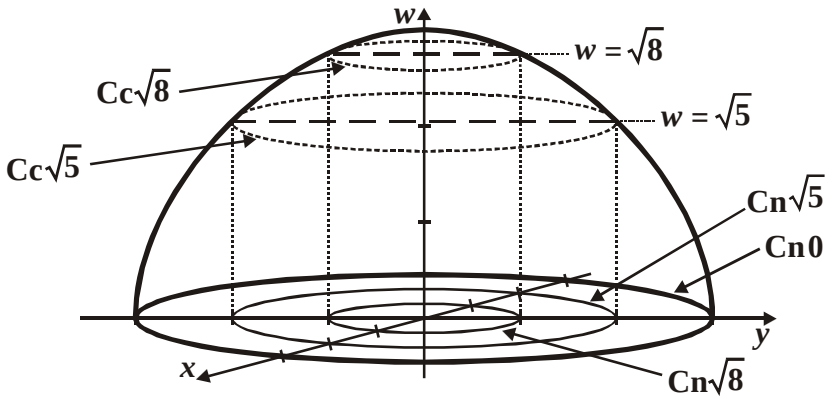
101. No exemplo que segue, podemos observar uma curva de nível e uma curva de contorno da função $z = f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$.



Exemplo

102. Represente graficamente $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ e trace as curvas de níveis $f(x,y) = 0$, $f(x,y) = \sqrt{5}$ e $f(x,y) = \sqrt{8}$ no domínio de f no plano.

Resolução:



Resposta:

5.2 Limites e Continuidade de Funções de n-Variáveis Reais

5.2.1 Limites de Funções em $\Re^n$

Definição

Seja $w = f(x) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ uma função de n variáveis. O LIMITE da função $f(x)$, quando x tende a x_0, é o número real L se, para todo numero real ε>0, existe δ>0, tal que se $x \in B(x_0;\delta)$ então sua imagem $f(x) \in B(L;\varepsilon)$.

Simbolicamente

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, \delta>0;\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon.$$

Caso particular: Limites de Funções de duas variáveis independentes

Sejam $f: A \subset \Re^2 \to \Re$ e (x_0, y_0) um ponto de acumulação de *A*. Dizemos que o limite de $f(x,y)$, quando (x,y) se aproxima de (x_0, y_0) é um número real *L* se, para todo ε>0, existir um δ>0 tal que $|f(x,y)-L|<\varepsilon$, sempre que $(x,y) \in A$ e $0 < |(x,y)-(x_0,y_0)| < \delta$

Notação:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,\,y_0)} f(x,y) = L \text{ ou } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = L$$

Propriedades

Tome $L, M, K \in \Re$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = M$.

- $\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = L \pm M$.
- $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = L \cdot M$.
- $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ se $M \neq 0$.
- $\lim_{x \to x_0} K\, f(x) = K \lim_{x \to x_0} f(x) = K\, L$.
- Se p e q forem inteiros, então $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{p/q} = L^{p/q}$, desde que $L^{p/q} \in \Re$.

Exemplos

Calcule os limites:

103. $\lim_{(x,y)\to(3,-4)} \sqrt{x^2 + y^2}$

Resolução:

Resposta: 5

104. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x-xy+3}{x^2y+5xy-y^3}$

Resolução:

Resposta: –3

105. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

Resolução:

Resposta: 0

106. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}$

Resolução:

Resposta: 2

Proposição

Se $w = f(x) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ tem limites diferentes ao longo de caminhos diferentes quando x se aproxima de x_0, então $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ não existe.

Exemplo

107. Aplicando limites por caminhos, mostre que $f(x,y)=\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ não tem limite quando (x, y) se aproxima de (0,0).

Resolução:

Resposta: Logo, $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Exercícios

108. $f(x,y)=\dfrac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$ (Caminhos $y=k\ x^2$);

Resolução:

Resposta: Logo, $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

109. $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ (Caminhos $y=k\ x$, $k\neq -1$);

Resolução:

Resposta: Logo, $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

110. $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{y}$ (Caminhos $y=k\ x^2$, $k\neq 0$);

Resolução:

Resposta: Logo, $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

5.2.2 Continuidade de Funções em $\Re^n$

Definições:

1ª) Uma função $w=f(x)=f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$ é CONTÍNUA NO PONTO $x_0\in\Re^n$ se:

- $\exists\ f(x_0)$;
- $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

2ª) Uma função é CONTÍNUA quando é contínua em todos os pontos de seu domínio.

Proposição:

Sejam f e g funções de duas variáveis contínuas no ponto (x_0, y_0), então:

- $f + g$ é contínua em (x_0, y_0);
- $f - g$ é contínua em (x_0, y_0);
- $f \cdot g$ é contínua em (x_0, y_0);
- f / g é contínua em (x_0, y_0), desde que $g(x_0, y_0) \neq 0$

Proposição:

Sejam $w = f(u)$ e $z = g(x, y)$. Se g é contínua em (x_0, y_0) e f é contínua em $g(x_0, y_0)$, então a função composta $f \circ g$ é contínua em (x_0, y_0).

Observação:

A partir das proposições anteriores podemos afirmar que:

- Uma função polinomial de duas variáveis é contínua em $\Re^2$;
- Uma função racional de duas variáveis é contínua em todos os pontos do seu domínio.

Exemplos:

Discutir a continuidade das seguintes funções:

111. $f(x, y) = 2x^2y^2 + 5xy - 2$

Resolução:

Resposta:

112. $g(x, y) = \dfrac{x + y - 1}{x^2y + x^2 - 3xy - 3x + 2y + 2}$

Resolução:

Resposta:

113. $h(x, y) = \ln\left(x^2y^2 + 4\right)$

Resolução:

Resposta:

6 Derivadas

6.1 Derivadas Parciais

6.1.1 Incremento parcial e incremento total

Seja $z = f(x, y)$ uma função de duas variáveis independentes.

Quando damos à variável independente *x* um acréscimo Δx, enquanto *y* permanece constante, então o incremento correspondente de z receberá o nome de incremento parcial de *z*, em relação à *x* e é denotado por:

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$$

Da mesma maneira, se *x* permanecer constante e a variável *y* receber um acréscimo Δy, o incremento parcial de *z*, em relação à *y* é:

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

Se agora dermos, simultaneamente um acréscimo Δx para *x* e Δy para *y*, obtemos o incremento total de *z*, que é denotado por:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

Exemplo

114. Se $z = f(x, y) = x \cdot y$, então:

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y) = (x+\Delta x)y - x \cdot y = x \cdot y + \Delta x \cdot y - x \cdot y = y \cdot \Delta x$$

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y) = x(y+\Delta y) - x \cdot y = x \cdot y + x \cdot \Delta x - x \cdot y = x \cdot \Delta y$$

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = (x+\Delta x) \cdot (y+\Delta y) - x \cdot y =$$

$$x \cdot y + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x \cdot \Delta y - x \cdot y = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x \cdot \Delta y$$

Definições:

Chama-se derivada parcial de $z = f(x, y)$, em relação à *x*, no ponto (x_0, y_0), ao limite:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x};$$

Analogamente, definimos derivada parcial de $z = f(x, y)$, em relação à *y*, no ponto (x_0, y_0), ao limite:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y};$$

Fazendo $x - x_0 = \Delta x$ e $y - y_0 = \Delta y$, podemos escrever:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0};$$

Definições:

Sejam $f: A \subset \Re^2 \to \Re$, sendo $(x,y) \mapsto z = f(x,y)$, e $B \subset A$ o conjunto dos pontos (x,y) tais que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ existe. Chamamos de função derivada parcial de *f* em relação à *x*, à função que a cada $(x,y) \in B$ associa o número $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$.

Analogamente, chamamos de função derivada parcial de f em relação à y, à função que a cada $(x,y) \in B$ associa o número $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$.

Observação:

As derivadas parciais podem também ser denotadas por:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = D_x f(x,y) = f_x(x,y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = D_y f(x,y) = f_y(x,y)$$

Observação:

As definições anteriores podem ser estendidas para funções $f: A \subset \Re^n \to \Re$. Desta forma temos, por exemplo:

1º Seja *f*: $\Re \to \Re$

A derivada da função $f(x)$ é:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2º Seja *f*: $\Re^2 \to \Re$

As derivadas parciais de $f(x,y)$ em relação a x e y são as funções f_x e f_y.

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h};$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}.$$

3º Seja *f*: $\Re^3 \to \Re$

As derivadas parciais de $f(x,y,z)$ são as funções f_x, f_y e f_z.

$$f_x(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y,z) - f(x,y,z)}{h};$$

$$f_y(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h,z) - f(x,y,z)}{h};$$

$$f_z(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y,z+h) - f(x,y,z)}{h};$$

para $w = f(x,y,z)$.

4º Seja f: $\Re^n \to \Re$

As derivadas parciais de $f(x)$ para $x \in \Re^n$:

$$f_{x_1}(x) = \frac{\partial f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h, x_2, \cdots, x_n) - f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{h};$$

$$f_{x_2}(x) = \frac{\partial f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_2} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2 + h, \cdots, x_n) - f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{h};$$

$$\vdots$$

$$f_{x_n}(x) = \frac{\partial f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_n} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \cdots, x_n + h) - f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{h};$$

115. Usando a definição, encontre a derivada parcial de $z = f(x,y) = 16 - x^2 - y^2$ em relação à x no ponto $(1,2)$.

Resolução:

Resposta: -2

116. Usando a definição, encontre as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, sendo $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2$.

Resolução:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$

Resposta: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x - 2y$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2x + 2y$

Observação:

Na prática, podemos obter as derivadas parciais mais facilmente, usando as regras de derivação das funções de uma variável. Nesse caso, para calcular $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, mantemos y constante e para calcular $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, x é mantido constante.

6.1.2 Regras de derivação

Para as derivadas parciais, valem regras de derivação análogas às das funções de uma variável.

Sejam $u = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $v = g(x) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

$$f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} u = u_{x_i} \text{ e } g_{x_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} v = v_{x_i}.$$

Produto

$$u\ v \Rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(u\ v) = (u\ v)_{x_i} = u_{x_i}\ v + u\ v_{x_i}.$$

Quociente

$$\frac{u}{v} \Rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)_{x_i} = \frac{u_{x_i} v - u v_{x_i}}{v^2}.$$

Potência

$$u^n \Rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(u^n) = (u^n)_{x_i} = n\ u^{n-1} \cdot u_{x_i}.$$

Exercícios

Considerando a função $f(x, y) = x^3\ y^2 - 2x^2\ y + 3x$ calcule o que se pede:

117. $f_x(x, y)$

Resolução:

Resposta: $3x^2\ y^2 - 4x\ y + 3$

118. $f_y(x, y)$

Resolução:

Resposta: $2x^3\ y - 2x^2$

119. $f_x(2, -1)$

Resolução:

Resposta: 23

120. $f_y(2,-1)$

Resolução:

Resposta: –24

Exercícios

121. Encontre $\frac{\partial f}{\partial y}$ se $f(x,y) = y \sin(xy)$.

Resolução:

Resposta: $\frac{\partial}{\partial y}(u\ v) = \sin(xy) + y\ x\ \cos(xy)$.

122. Encontre f_x e f_y se $f(x,y) = \frac{2y}{y + \cos x}$.

Resolução:

Resposta: $f_x = \frac{2y \sin x}{(y+\cos x)^2}$ e $f_y = \frac{2\cos x}{(y+\cos x)^2}$

123. Encontre f_x e f_y se $f(x,y) = \sqrt[y]{\tan x} = w$.

Resolução:

Resposta: $f_x = \dfrac{\sec^2 x}{y\sqrt[y]{(\tan x)^{y-1}}}$ e $f_y = -\dfrac{\sqrt[y]{\tan x}\cdot \ln(\tan x)}{y^2}$

124. Usando as regras de derivação, encontre as derivadas parciais das seguintes funções:

(a) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

Resolução:

Resposta: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

(b) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

Resolução:

Resposta: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y^2-2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

(c) $f(x,y)=e^{x/y}$

Resolução:

Resposta: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{e^{x/y}}{y}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-xe^{x/y}}{y^2}$

(d) $f(x,y)=\tan(x^2-y^2)$

Resolução:

Resposta: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=[\sec^2(x^2-y^2)]\cdot(2x)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=[\sec^2(x^2-y^2)]\cdot(-2y)$.

(e) $f(x,y,z)=x^2\cdot\sin^2(y\ z)$

Resolução:

Resposta: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2x\ \sin^2(y\ z)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=x^2\ z\ \sin(2y\ z)$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=x^2\ y\ \sin(2y\ z)$.

6.1.3 Derivadas Parciais Sucessivas

Se $w = f(x)$ é uma função de n variáveis e admite derivadas parciais em relação a todos os $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e estas funções derivadas parciais admitem derivadas parciais, então suas derivadas são DERIVADAS PARCIAIS DE SEGUNDA ORDEM de $w = f(x)$.

Se as derivadas de segunda ordem são parcialmente deriváveis, suas derivadas são chamadas de DERIVADAS PARCIAIS DE TERCEIRA ORDEM de $w = f(x)$.

Assim, segue para derivadas de ordem superior.

$$w = f(x,y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = f_x \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} \Rightarrow \ldots$$

$$w = f(x,y) \begin{cases} f_x = \dfrac{\partial w}{\partial x} \begin{cases} f_{xx} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \begin{cases} f_{xxx} = \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ f_{xxy} = \dfrac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \end{cases} \\ f_{xy} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \begin{cases} f_{xyx} = \dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial x} \\ f_{xyy} = \dfrac{\partial^3 w}{\partial y \partial y \partial x} \end{cases} \end{cases} \\ f_y = \dfrac{\partial w}{\partial y} \begin{cases} f_{yx} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \begin{cases} f_{yxx} = \dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial x \partial y} \\ f_{yxy} = \dfrac{\partial^3 w}{\partial y \partial x \partial y} \end{cases} \\ f_{yy} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \begin{cases} f_{yyx} = \dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \\ f_{yyy} = \dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\overbrace{\phantom{f_x = \frac{\partial w}{\partial x}}}^{\text{1ra. ordem}} \quad \overbrace{\phantom{f_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}}^{\text{2da. ordem}} \quad \overbrace{\phantom{f_{xxx} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}}}^{\text{3ra. ordem}}$$

Teorema

Seja f uma função de duas variáveis x e y. Se f, f_x, f_y, f_{xy} e f_{yx} são contínuas em uma região aberta R, então $f_{xy} = f_{yx}$ em toda R.

Este teorema também é válido para derivadas de ordens superiores. Por exemplo:

$$f_{xyx} = f_{yxx} = f_{xxy}.$$

Exercícios

125. Seja $f(x,y) = x^3 y^2 - 2x^2 y + 3x$. Prove que $f_{xy} = f_{yx}$.

Resolução:

Resposta: $$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$$

126. Prove que $f_{xyx} = f_{yxx} = f_{xxy}$ para $f(x, y) = x^3 y^2 - 2x^2 y + 3x$.

Resolução:

Resposta: $f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx} = 12x y - 4$

127. Dada a função $f(x, y) = e^{2x+3y}$, calcule:

(a) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y)$

Resolução:

Resposta: $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) = 8e^{2x+3y}$

(b) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y)$

Resolução:

Resposta: $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y) = 27e^{2x+3y}$

(c) Verifique a igualdade seguinte: $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$.

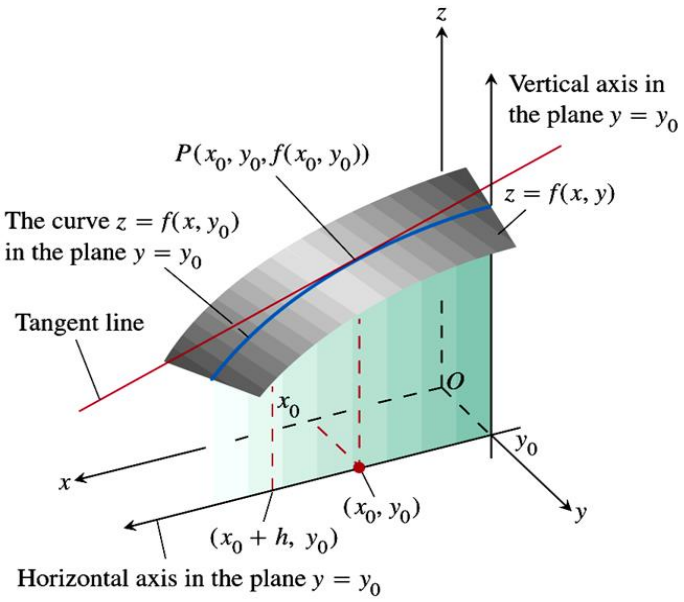
Resolução:

Resposta: $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 18e^{2x+3y}$

6.1.4 Interpretação Geométrica das Derivadas Parciais

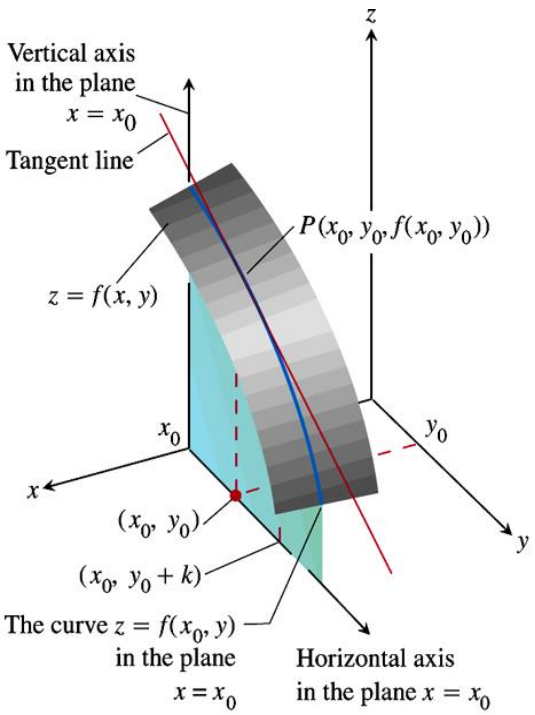
Vamos supor que $f : A \subset \Re^2 \to \Re$, $(x, y) \to z = f(x, y)$ admite derivadas parciais em um ponto $(x_0, y_0) \in A$. Para $y = y_0$, temos que $f(x, y_0)$ é uma função de uma variável cujo gráfico é uma curva *C*, resultante da intersecção da superfície $z = f(x, y)$ com o plano $y = y_0$. A inclinação ou coeficiente angular da reta tangente à curva *C* no ponto (x_0, y_0) é dado por:

$$\tan \alpha = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$



De maneira análoga, temos que a inclinação da reta tangente à curva *C*, resultante da intersecção da superfície $z = f(x, y)$ com o plano $x = x_0$, é:

$$\tan \beta = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$



128. Encontre a declividade da reta tangente à curva de intersecção da superfície $w = \sqrt{24 - x^2 - 2y^2}$ com o plano $y = 2$, no ponto $(2,2,2\sqrt{3})$.

Resolução:

Resposta: $\dfrac{\partial w}{\partial x}(2,2) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

6.1.5 Equações das Retas Tangentes

Dada a função $w = f(x,y)$, as retas tangentes ao gráfico de w no ponto $P(x_0, y_0, w_0)$, nos planos verticais $y = y_0$ e $x = x_0$, são dadas da seguinte forma.

Retas Tangentes: Forma Simétrica

$$y = y_0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{1} = \dfrac{w - w_0}{f_x(x_0, y_0)} \\ y = y_0 \end{cases} \qquad x = x_0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y - y_0}{1} = \dfrac{w - w_0}{f_y(x_0, y_0)} \\ x = x_0 \end{cases}$$

Retas Tangentes: Forma Paramétrica

$$y = y_0 \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \lambda \\ y = y_0 \\ w = w_0 + \lambda f_x(x_0, y_0) \end{cases} \qquad x = x_0 \Rightarrow \begin{cases} y = y_0 + \lambda \\ x = x_0 \\ w = w_0 + \lambda f_y(x_0, y_0) \end{cases}$$

Exemplo

Determine as equações das retas tangentes ao gráfico de $w = f(x,y)$ com $w = 7 - x^2 - y^2 + 2x + 2y$.

129. No ponto (2,3,4).

Resolução:

Resposta:

130. No ponto (1,1,9).

Resolução:

Resposta:

Exercícios de derivadas como taxas de variação:

131. Se a temperatura T depende do tempo t e da altitude h, de acordo com a regra:

$T(t,h)=\frac{-5t^2}{36}+\frac{10t}{3}-\frac{h}{100}+10$, então calcule:

(a) Como varia a temperatura em relação ao tempo, no instante $t_0=12$ horas, num ponto de altitude $h_0=100$ metros?

Resolução:

Resposta: 0

(b) Como varia a temperatura em relação à altitude, no instante $t_0=12$ horas, num ponto de altitude $h_0=100$ metros?

Resolução:

Resposta: $-\frac{1}{100}$

132. De acordo com a lei do gás ideal para um gás confinado, se P Newton por unidade quadrada é a pressão, V unidades cúbicas é o volume, e T graus a temperatura, temos a fórmula: $P\,V = k\,T$ [equação (1)] onde k é uma constante de proporcionalidade. Suponha que o volume de gás em um certo recipiente seja 100 cm^3 e a temperatura seja 90^0 e k =8.

(a) Encontre a taxa de variação instantânea de P por unidade de variação em T, se V permanecer fixo em 100.

Resolução:

Resposta: Logo, quando T =90 e V =100, $\frac{\partial P}{\partial T}$ =0,08 é a resposta desejada.

(b) Use o resultado de (a) para aproximar a variação de pressão se a temperatura aumentar para 92^0 C.

Resolução:

Resposta: $0{,}16\,N/m^2$

(c) Encontre a taxa de variação instantânea de V por unidade de variação em P se T permanecer fixo em 90^0.

Resolução:

Resposta: $\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{125}{9}$

(d) Suponha que a temperatura permaneça constante. Use o resultado de (c) para encontrar a variação aproximada no volume para produzir a mesma variação na pressão, obtida em (b).

Resolução:

Resposta: $-\frac{20}{9}$

133. O volume V de um cone circular é dado por $V = \frac{\pi}{24} y^2 \sqrt{4s^2 - y^2}$, onde s é o comprimento da geratriz e y o diâmetro da base.

(a) Encontre a taxa de variação instantânea do volume em relação à geratriz se o valor $y = 16$, enquanto a geratriz s varia. Calcule essa taxa de variação no instante em que $s = 10cm$.

Resolução:

Resposta: $\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{320\pi}{9}\ cm^3/cm$

(b) Suponha que o comprimento da geratriz permaneça constante com o valor de $s = 10cm$. Considerando que o valor do diâmetro varia, encontre a taxa de variação do volume em relação ao diâmetro quando $y = 16cm$.

Resolução:

Resposta: $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{16\pi}{9}\ cm^3/cm$

6.1.6 Diferenciabilidade

Diferenciabilidade para funções de uma variável

Seja $f : \Re \to \Re$. Se f é derivável no ponto x_0, então, por definição,

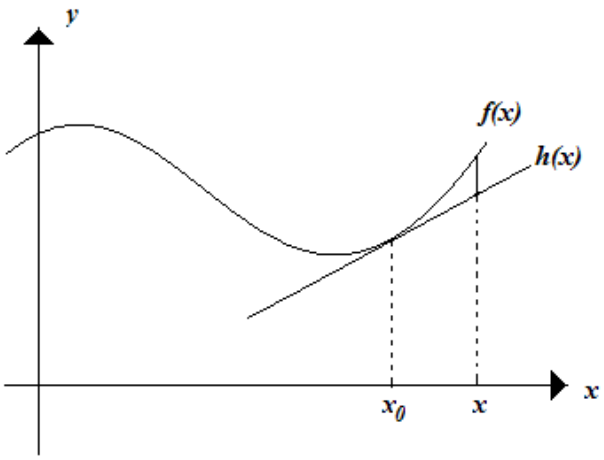
$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$. Assim:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = 0 \text{ ou}$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)]}{x - x_0} \right] = 0$$

Esta expressão nos diz que a função $h(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, que é a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto (x_0, y_0) é uma "boa aproximação" de *f* perto de x_0.

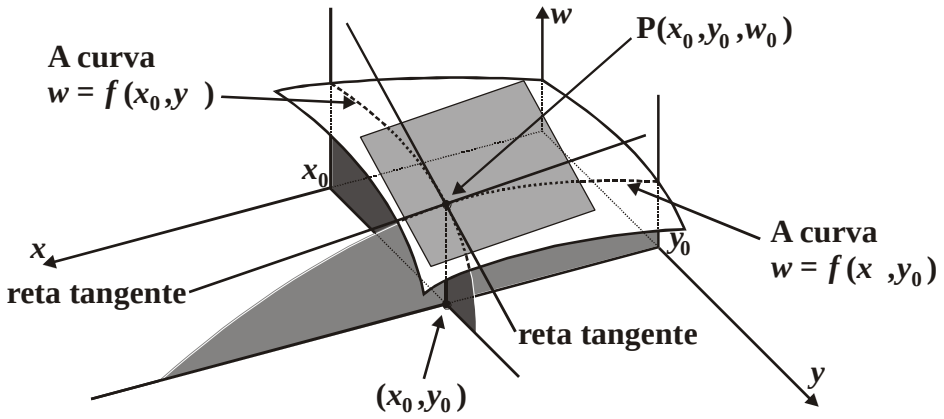
Em outras palavras, quando *x* se aproxima de x_0, a diferença entre *f* e *h* se aproxima de zero de uma forma mais rápida.



Plano Tangente

Foi visto que a derivada parcial $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva de intersecção do plano $y = y_0$ com a superfície $z = f(x, y)$, no ponto (x_0, y_0). Da mesma maneira, a derivada parcial $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva de intersecção do plano $x = x_0$ com a superfície $z = f(x, y)$, no ponto (x_0, y_0).

Intuitivamente percebemos que se existir um plano tangente à superfície $z = f(x, y)$, no ponto (x_0, y_0), então as retas que tem $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ como coeficientes angulares estão contidas neste plano.



Assim, se existe o plano tangente a $z = f(x, y)$, passando pelo ponto P(x_0 , y_0 , z_0), sua equação é:

- (1) $h(x, y) = a\ x + b\ y + c$.

As inclinações nas direções dos eixos *x* e *y* são dadas pelas equações (2) e (3), respectivamente:

- (2) $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.
- (3) $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

O ponto P(x_0, y_0, w_0) satisfaz a equação (1), logo, obtém-se a equação (4):

- (4) $h(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) = w_0$.

Substituindo (2) e (3) em (1), chega-se a equação (5):

- (5) $h(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, y + c$.

Substituindo (4) em (5), chega-se a equação (6):

- $f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, x_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, y_0 + c$, ou
- (6) $c = w_0 - f_x(x_0, y_0)\, x_0 - f_y(x_0, y_0)\, y_0$.

Assim, substituindo (6) em (5), obtém-se o plano tangente ao gráfico de $w = f(x, y)$ no ponto P(x_0, y_0, w_0) pela equação (7):

- (7) $h(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0)$.

Diferenciabilidade para funções de duas variáveis

Diz-se que a função $f(x, y)$ é diferenciável no ponto (x_0, y_0) se as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existem e se

- (8) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - h(x,y)}{|(x,y) - (x_0,y_0)|} = 0$.

Na equação (8), se tem:

- $h(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0)$;
- $|(x, y) - (x_0, y_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Observação

De uma maneira informal, dizemos que $f(x, y)$ é diferenciável em (x_0, y_0) se o plano dado pela equação (7) nos fornece uma "boa aproximação" para $f(x, y)$ no ponto (x_0, y_0).

Proposição

Se $f(x, y)$ é diferenciável no ponto (x_0, y_0), então f é contínua nesse ponto.

Exemplos

134. Pela definição acima, provar que a função $f(x, y) = x^2 + y^2$ é diferenciável em $\Re^2$.

Resolução:

Resposta: Logo, f é diferenciável em $\Re^2$.

Nos exercícios a seguir, verifique se as funções dadas são diferenciáveis na origem, isto é, $(x_0, y_0) = (0,0)$.

135. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Resolução:

Resposta: Logo, f não é diferenciável na origem.

136. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2y^3}{x^2 + y^2}, \text{se} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, \text{se} & (x, y) = (0,0) \end{cases}$.

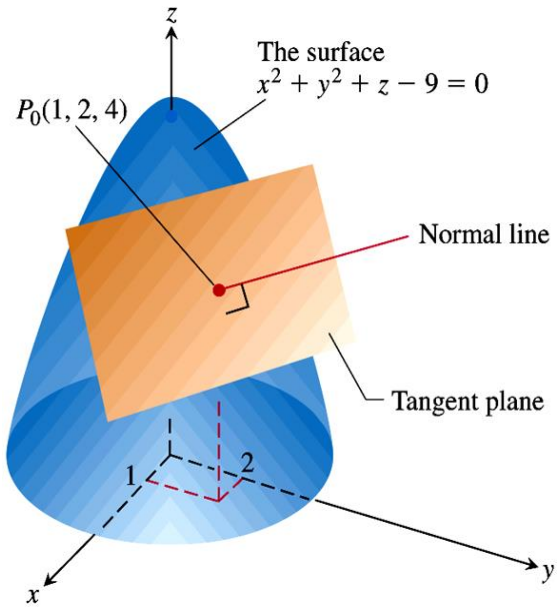
Resolução:

Resposta: Logo, f não é diferenciável na origem.

Plano Tangente

Seja $f : \Re^2 \to \Re$ diferenciável no ponto (x_0, y_0). Chama-se de plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ao plano dado pela equação a seguir.

$$w - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0).$$



Exemplos

Determine, se existir, o plano tangente ao gráfico das funções dadas nos pontos indicados.

137. $w = x^2 + y^2$ nos pontos: a) $P_1(0,0,0)$; b) $P_2(1,1,2)$.

Resolução:

Resposta:

138. $w = \sqrt{2x^2 + y^2}$ nos pontos: a) $P_1(0,0,0)$; b) $P_2(1,1,\sqrt{3})$.

Resolução:

Resposta:

6.2 Gradiente

Seja $w = f(x, y)$ que admite derivadas parciais de 1ª ordem em (x_0, y_0). O gradiente de f no ponto (x_0, y_0) é um vetor com as derivadas f_x e f_y tal que:

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \text{ ou } \nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)).$$

Generalizando este conceito, temos:

$w = f(x, y)$, $\quad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$,

$w = f(x, y, z)$, …, $\quad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$, …,

$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $\quad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$.

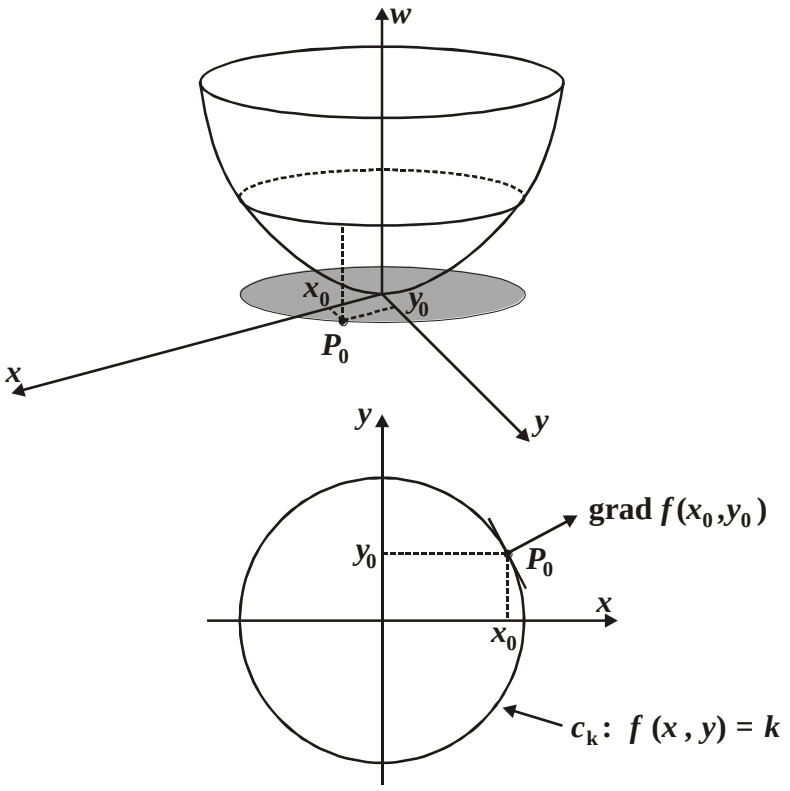
Proposição

Seja $f(x, y)$ uma função tal que, através do ponto $P_0(x_0, y_0)$, passa uma curva de nível c_k de f. Se grad $f(x_0, y_0)$ não for nulo, então ele é perpendicular à curva de nível c_k em (x_0, y_0), isto é, ele é perpendicular à reta tangente à curva c_k no ponto P_0.

Exemplo

139. Seja $w = f(x, y) = x^2 + y^2$. Graficamente, o grad $f(x_0, y_0)$ é dado por:

Resolução:

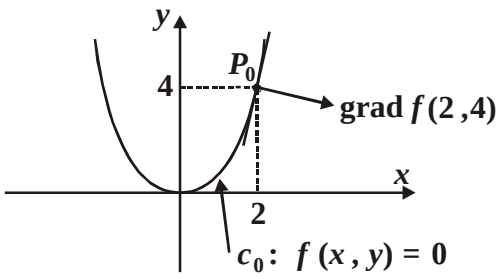


$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right) = (2x_0, 2y_0)$$

Resposta:

140. Seja $w = f(x, y) = x^2 - y$. Graficamente, o grad f (2,4) é dado por:

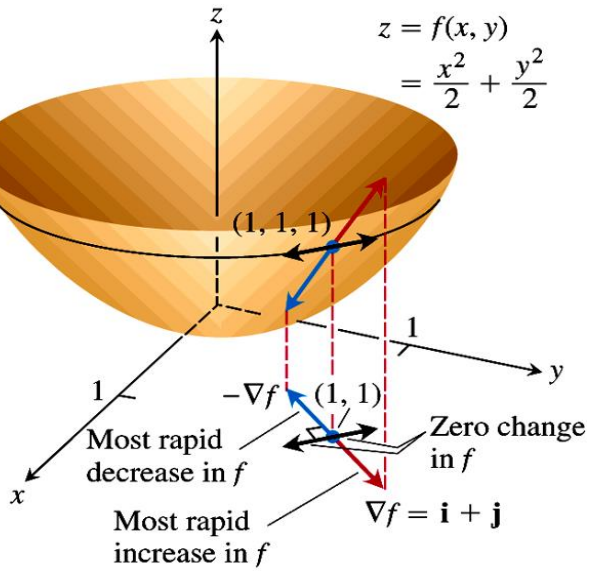
Resolução:



Resposta:

Observação:

O gradiente é um vetor que indica o sentido de mais rápido crescimento de uma função em um ponto.



6.3 Diferenciais

Seja $w = f(x, y)$ uma função diferenciável no ponto (x_0, y_0). A diferencial de f em (x_0, y_0) é definida pela função ou transformação linear:

T: $\Re^2 \to \Re$

$$T(x - x_0, y - y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

ou, para $h = x - x_0$ e $k = y - y_0$:

$$T(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k \qquad (01)$$

T dá uma aproximação do acréscimo Δw em (x_0, y_0):

$\Delta w = f(x, y) - f(x_0, y_0)$.

Em relação a x e y, os acréscimos são:

$\Delta x = x - x_0$ e $\Delta y = y - y_0$.

Define-se a diferencial das variáveis independentes x e y como os acréscimos Δx e Δy:

$dx = \Delta x$ e $dy = \Delta y$.

A diferencial de f em (x, y) relativa aos acréscimos Δx e Δy é indicada por dw ou df:

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dy \qquad (02)$$

dw é a DIFERENCIAL TOTAL de $w = f(x, y)$.

Exemplos

141. Calcule a diferencial de $f(x, y) = x + \sqrt{xy}$ no ponto (1,1).

Resolução:

Resposta: $df(1,1) = \frac{3}{2}\, dx + \frac{1}{2}\, dy$.

142. Dada a função $w = x^2 + y^2 - xy$.

- a) Determine uma aproximação para o acréscimo da variável dependente quando (x , y) passa de (1,1) para (1,001;1,02).

Resolução:

Resposta: $\Delta w \cong 0{,}021$.

- b) Calcular Δw quando as variáveis independentes sofrem a variação em a).

Resolução:

Resposta: $\Delta w = 0{,}021381$

- c) Calcular o erro obtido da aproximação de dw como Δw.

Resolução:

Resposta: 0,000381

6.3.1 Generalizando as diferenciais

Tome $w = f\,(x\,,y\,,z\,)$ em $(x_0\,,y_0\,,z_0)$, sua diferencial é:

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x}(x\,,y\,,z\,)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x\,,y\,,z\,)\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x\,,y\,,z\,)\,dz\,.$$

Tome $w = f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, sua diferencial é:

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_n\,.$$

Exercícios

143. Calcule a diferencial total da função: $w = x^2 + y^2 + e^{xyz}$.

Resolução:

Resposta: $dw = (2x + yz\ e^{xyz})\,dx + (2y + xz\ e^{xyz})\,dy + xy\ e^{xyz}\ dz$

144. Calcule a diferencial total da função: $w = x_1\ x_2 - x_2\ x_3 + x_3\ x_4$.

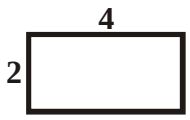
Resolução:

Resposta: $dw = x_2\ dx_1 + (x_1 - x_3)\,dx_2 + (x_4 - x_2)\,dx_3 + x_3\ dx_4$.

145. Nos itens a) e b), calcule o valor aproximado para a variação da área na figura quando os lados são modificados de:

- a) 4cm e 2cm para 4,01cm e 2,001cm, num retângulo;

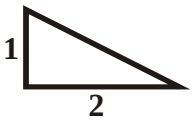
Resolução:



Resposta: $0{,}024\text{cm}^2$.

- b) 2cm e 1cm para 2,01cm e 0,5cm, num triângulo retângulo.

Resolução:



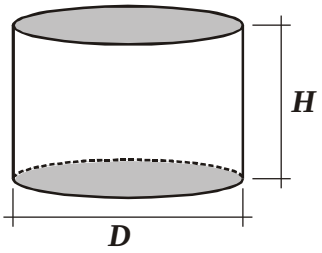
Resposta: $-0{,}495\text{cm}^2$.

146. Calcular o valor aproximado de $(1{,}001)^{3{,}02}$.

Resolução:

Resposta: $(1{,}001)^{3{,}02} \cong 1{,}003$.

147. O diâmetro e a altura de um cilindro circular reto medem, com um erro provável de 0,2 *pol* em cada medida, respectivamente, 12 *pol* e 8 *pol*. Qual é, aproximadamente, o máximo erro possível no cálculo do volume?



Resolução:

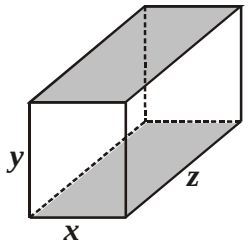
Resposta: $dV \cong 16{,}8\pi\ pol^3$

148. Dada a superfície $z = \dfrac{x-y}{x+y}$, se no ponto $x=4$, $y=2$, x e y são acrescidos de $\dfrac{1}{10}$, qual é a variação aproximada de z ?

Resolução:

Resposta: $\Delta z = -0{,}01075$

149. As dimensões de uma caixa são $10\,cm$, $12\,cm$ e $15\,cm$. Essas medidas têm um possível erro de $0{,}02\,cm$. Encontre, aproximadamente, o máximo erro no cálculo do volume.



Resolução:

Resposta: Logo: $\Delta V \cong 9\,cm^3$.

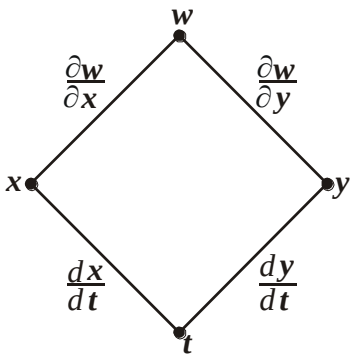
6.4 Derivadas de Funções Compostas

6.4.1 Regra da Cadeia para Funções de Duas Variáveis Intermediárias

Se $w = f(x, y)$ for diferenciável e x e y forem funções diferenciáveis de t, então w será uma função diferenciável de t e:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

(DIAGRAMA)



Exemplo

150. Use a regra da Cadeia para encontrar a derivada de $w = x \cdot y$ em relação a t ao longo do caminho $x = \cos t$, $y = \sin t$. Qual é o valor da derivada em $t = \frac{\pi}{2}$?

Resolução:

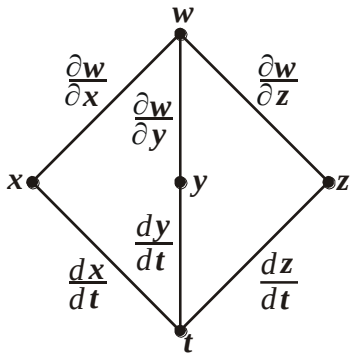
Resposta: –1

6.4.2 Regra da Cadeia para Funções de Três Variáveis Intermediárias

Se $w = f(x, y, z)$ for diferenciável e x, y e z forem funções diferenciáveis de t, então w será uma função diferenciável de t e:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

(DIAGRAMA)



Exemplo

151. Encontre $\frac{dw}{dt}$ sendo que $w = x\ y + z$, $x = \cos t$, $y = \sin t$ e $z = t$. Determine o valor da derivada em $t = 0$.

Resolução:

Resposta: 2

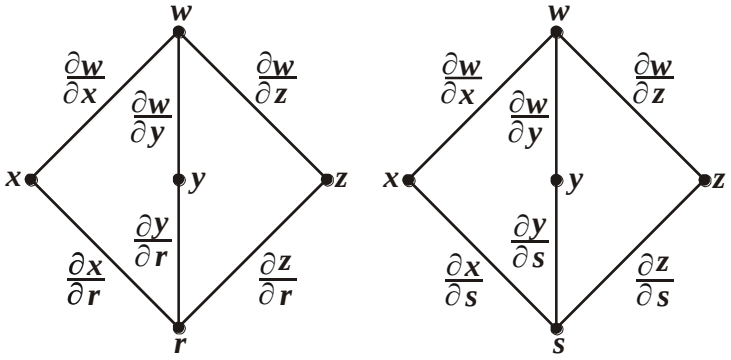
6.4.3 Regra da Cadeia para Duas Variáveis Independentes e Três Variáveis Intermediárias

Sejam $w = f(x, y, z)$, $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$ e $z = k(r, s)$. Se todas as quatro funções forem diferenciáveis, então w terá derivadas parciais em relação a r e s, dadas pelas fórmulas a seguir.

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

(DIAGRAMA)



Exemplo

152. Expresse $\frac{\partial w}{\partial r}$ e $\frac{\partial w}{\partial s}$ em termos de r e s se: $w = x + 2y + z^2$, $x = \frac{r}{s}$, $y = r^2 + \ln s$, $z = 2r$.

Resolução:

Resposta: $\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{s} + 12r$ e $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{2}{s} - \frac{r}{s^2}$

6.4.4 Regra da Cadeia Generalizada

Suponha que $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_1 = g_1(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $x_2 = g_2(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, …, $x_n = g_n(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ sejam todas funções diferenciáveis, então w terá derivadas parciais em relação a $y_1, y_2, \ldots, y_m$, dadas pelas fórmulas:

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \frac{\partial w}{\partial y_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial w}{\partial y_m} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_m} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_m} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_m} \end{cases}$$

ou $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial y}$ obs.: $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$.

REPRESENTAÇÃO EM FORMA MATRICIAL:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \left[\frac{\partial w}{\partial y_1} \ \frac{\partial w}{\partial y_2} \ \cdots \ \frac{\partial w}{\partial y_m}\right], \ \frac{\partial w}{\partial x} = \left[\frac{\partial w}{\partial x_1} \ \frac{\partial w}{\partial x_2} \ \cdots \ \frac{\partial w}{\partial x_n}\right], \ \frac{\partial x}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_m} \end{bmatrix}.$$

Exemplo

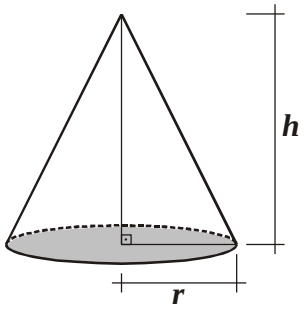
153. Dada a função $w = x^2 + y^2 + z^2$ e sabendo que $x = r \cos\theta \sin\gamma$, $y = r \sin\theta \sin\gamma$ e $z = r\cos\gamma$, calcular as derivadas da função w em relação a r, θ e γ.

Resolução:

Resposta: $\frac{\partial w}{\partial r} = 2r$, $\frac{\partial w}{\partial \theta} = 0$ e $\frac{\partial w}{\partial \gamma} = 0$

Exercícios:

154. A altura de um cone circular é de $h = 100\ pol$ e decresce a razão de $10\ pol/seg$. O raio da base é de $r = 50\ pol$ e cresce a razão de $5\ pol/seg$. Com que velocidade está variando o volume, quando $h = 100\ pol$ e $r = 50\ pol$?



Resolução:

Resposta: Portanto, o volume cresce à taxa de $26180\ pol^3/seg$ no dado instante

155. Use a lei do gás ideal com $k = 10$ para encontrar a taxa de variação da temperatura no instante em que o volume do gás é $120\,cm^3$ e o gás está sob uma pressão de $8\,din/cm^2$, se o volume cresce à taxa de $2\,cm^3/seg$ e a pressão decresce à taxa de $0{,}1\,din/cm^2$ (din, unidade de força) por segundo.

Resolução:

Resposta: A temperatura cresce à taxa de 0,4 graus por segundo no dado instante.

6.4.5 Derivadas de Funções Implícitas

1º Caso: F(x,y) = 0 com y = f(x)

Tendo $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ no ponto $(x, f(x))$, pode-se obter $\frac{\partial y}{\partial x}$ aplicando-se a regra da cadeia para $F(x, y)$. Então: $\frac{\partial F}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$.

Exemplo:

156. Encontre $\frac{\partial y}{\partial x}$ para $y^2 - x^2 - \sin xy = 0.$

Resolução:

Resposta: $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2x + y\cos xy}{2y - x\cos xy}$

157. Dada a equação $x^2 + y^2 = 1$, encontre $\frac{\partial y}{\partial x}$ usando derivação por duas formas:

a) Derivando implicitamente;
b) Derivando através de função de uma variável.

- a) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

Resolução:

Resposta: $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{y}$

- b) $y = \sqrt{1 - x^2}$

Resolução:

Resposta: $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{y}$

2º Caso: F(x,y,z) = 0 com z = f(x,y)

Tendo $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ no ponto $(x, y, f(x,y))$, podem-se obter $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ aplicando-se a regra da cadeia para $F(x, y, z)$.

- Em relação a x: $\frac{\partial F}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial F}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{=0} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$.
- Em relação a y: $\frac{\partial F}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial F}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial y}}_{=1} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$.

Exemplo

158. Sabendo que $z = f(x, y)$ é definida por $x^4\ y + y^3 + z^3 + z = 5$, determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Resolução:

Resposta: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-4x^3 y}{3z^2 + 1}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-(x^4 + 3y^2)}{3z^2 + 1}$

6.5 Máximos e Mínimos de Funções de Várias Variáveis

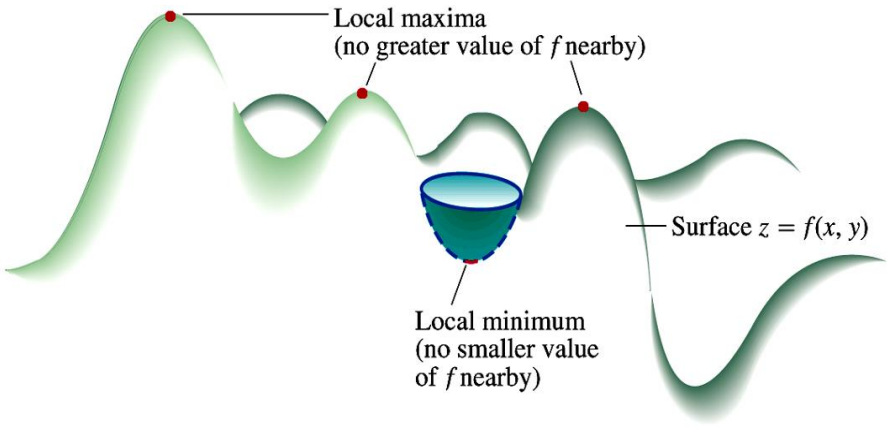
Seja $w = f(P)$ uma função de n variáveis e seja $P_0 \in D(f)$.

Definição 1: Máximo Local (ou Máximo relativo)

$f(P_0)$ é um valor máximo local de f se $f(P_0) \geq f(P)$ para todo ponto P pertencente a uma vizinhança de P_0.

Definição 2: Mínimo Local (ou Mínimo relativo)

$f(P_0)$ é um valor mínimo local de f se $f(P_0) \leq f(P)$ para todo ponto P pertencente a uma vizinhança de P_0.

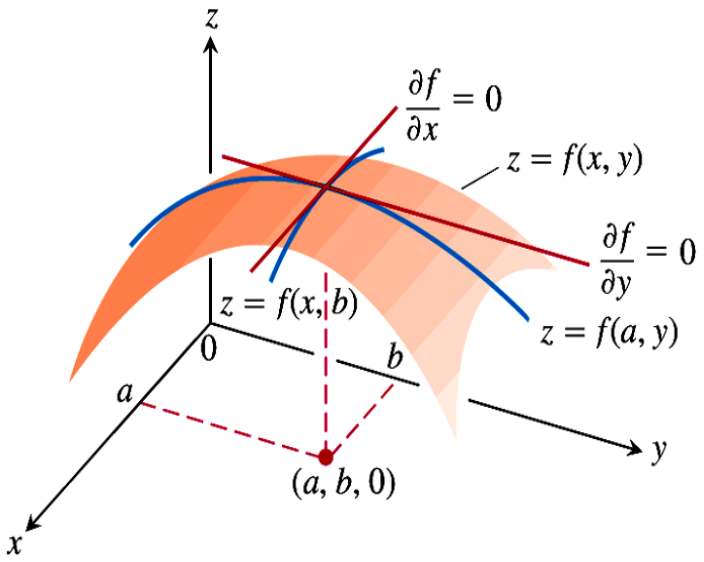


Observação

P_0 é ponto de máximo ou mínimo de f.

Definição 3: Ponto Crítico

P_0 é um ponto crítico de $w = f(P)$ se, todas as derivadas parciais de f se anulam ou não existem em P_0.



Teorema 1

Se $w = f(P)$ tiver um valor de máximo ou mínimo local em P_0, então, P_0 é um ponto crítico de f. (A recíproca não é verdadeira).

Teorema 2

Tome $P \in \Re^2$ ou $P = (x, y)$. Seja $P_0 = (x_0, y_0)$ um ponto crítico de $w = f(P)$, diferenciável até a segunda ordem e $H(P)$ o seu Hessiano definido por:

$$H(P) = H(x, y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}. \qquad \text{(Determinante)}$$

Então:

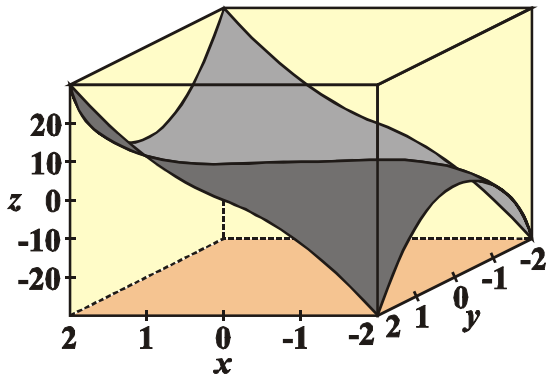
- (i) Se $H(P_0) > 0$, $w = f(P)$ admite extremos em P_0 e:
  - (a) Tem um valor máximo se $\dfrac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x^2} < 0$;
  - (b) Tem um valor mínimo se $\dfrac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x^2} > 0$.
- (ii) Se $H(P_0) = 0$, nada se pode afirmar.
- (iii) Se $H(P_0) < 0$, $w = f(P)$ não admite extremos em P_0, P_0 tem um ponto de sela.

Exercícios

159. Classificar os pontos críticos da função $f(x,y) = 3x\ y^2 + x^3 - 3x$.

Pontos críticos:

Resolução:



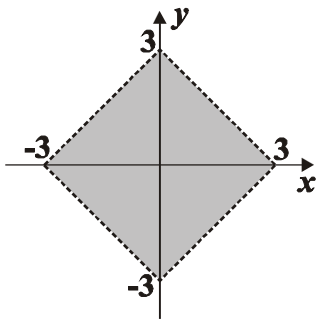
Resposta: $A(0,1)$ é PONTO DE SELA; $B(0,-1)$ é PONTO DE SELA; $C(1,0)$ é MÍNIMO LOCAL de f e $D(-1,0)$ é MÁXIMO LOCAL de f.

160. Considerando $f(x,y) = x^2 + x\ y + y^2 + \frac{3}{x} + \frac{3}{y} + 5$, verifique se o ponto (1,1) é ponto crítico, classificando-o.

Resolução:

Resposta: (1,1) é MÍNIMO LOCAL de f.

161. Seja $f(x, y)=2x^3+2y^3-6x-6y$. Analisar os pontos de máximo e mínimo de f no conjunto aberto A da figura a seguir.



Resolução:

Resposta: f possui um ponto de mínimo e um de máximo local. São eles: (1,1) e (–1,–1).

6.5.1 Teorema de Weierstrass

Seja $f: A \subset \Re^2 \to \Re$ com $w = f(x, y)$ uma função contínua no conjunto fechado e limitado A. Então existem P_1 e $P_2 \in A$ tais que

$$f(P_1) \leq f(P) \leq f(P_2)$$

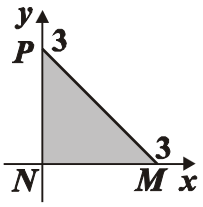
qualquer que seja $P \in A$.

Observação

Esse teorema garante a existência do ponto de máximo e do ponto de mínimo de uma função contínua com domínio fechado e limitado.

Exercício

162. Tome $f(x, y)=2x^3+2y^3-6x-6y$ do exercício anterior. Determinar o valor máximo e o valor mínimo de f no conjunto B delimitado pelo triângulo MNP da figura a seguir.

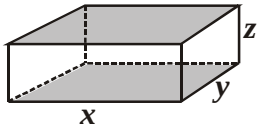


Resolução:

Resposta: O valor de mínimo de f é $f(1,1) = -8$. O valor de máximo de f é $f(0,3) = f(3,0) = 36$.

6.5.2 Aplicações: Exercícios

163. Quais as dimensões de uma caixa retangular sem tampa com volume $4\,m^3$ e com a menor área de superfície possível?



Resolução:

Resposta: $(x, y, z) = (2,2,1)$.