

APOSTILA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Autores: Elisandra Bar de Figueiredo, Enori Carelli, Ivanete Zuchi, Marnei Luis Mandler

Home-page: <http://www.joinville.udesc.br/portal/professores/elisandra/>

Joinville, fevereiro de 2010.

Conteúdo

1	INTEGRAL DEFINIDA	1
1.1	Introdução	2
1.2	Partição	3
1.3	Soma Superior	4
1.4	Soma Inferior	5
1.5	Função Integrável	6
1.5.8	Teorema do Valor Médio para Integrais	13
1.6	Teorema Fundamental do Cálculo	14
1.6.6	Fórmulas Clássicas para Resolver Integrais (Revisão)	17
1.7	Integrais Impróprias	19
1.8	Integral de uma Função Descontínua num Ponto $c \in [a, b]$	20
1.9	Aplicações da Integral Definida	21
1.9.1	Área em coordenadas retangulares	21
1.9.9	Área delimitada por curvas escritas em equações paramétricas	28
1.9.12	Área de um setor curvilíneo em coordenadas polares	29
1.10	Comprimento de Arco	32
1.10.1	Comprimento de Arco em Coordenadas Cartesianas	32
1.10.3	Comprimento de um arco em coordenadas paramétricas	35
1.10.7	Comprimento de arco em coordenadas polares	36
1.11	Volume de um Sólido de Revolução	38
1.11.5	Rotação em torno de uma Reta Paralela a um Eixo Coordenado	41
1.12	Exercícios Gerais	45
1.13	Respostas	52
2	FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS E DIFERENCIAÇÃO PARCIAL	56
2.1	Introdução	57
2.2	Função de Várias Variáveis	58
2.2.5	Gráfico de uma Função de Várias Variáveis	59
2.2.10	Curvas e Superfícies de Nível (Opcional)	62
2.2.12	Distâncias e Bolas no Espaço	63
2.3	Limite de uma Função de duas Variáveis	64
2.3.9	Propriedades dos Limites	68
2.4	Continuidade de uma Função de duas Variáveis	69
2.5	Derivadas Parciais	70
2.5.7	Interpretação Geométrica das derivadas parciais	71
2.6	Derivadas Parciais de Ordem Superior	73
2.7	Derivada de uma Função Composta	75
2.8	Derivadas de Funções Implícitas	78
2.9	Derivada Parcial como Taxa de Variação	80

Capítulo 1

INTEGRAL DEFINIDA

Objetivos (ao final do capítulo espera-se que o aluno seja capaz de):

1. Definir integral inferior e integral superior;
2. Calcular o valor da integral definida por definição;
3. Aplicar o teorema fundamental do cálculo e suas propriedades;
4. Calcular integral definida por substituição de variáveis;
5. Resolver exercícios que envolvam integrais impróprias;
6. Resolver exercícios que envolvam integrais impróprias de funções descontínuas;
7. Calcular áreas delimitadas por funções em coordenadas retangulares;
8. Calcular áreas delimitadas por funções em coordenadas polares;
9. Calcular áreas delimitadas por funções em coordenadas paramétricas;
10. Calcular volume de um sólido de revolução;
11. Calcular o comprimento de um arco em coordenadas retangulares, paramétricas e polares;
12. Calcular a superfície de um sólido de revolução;
13. Resolver problemas através da integral nas áreas de física, produção, economia entre outras aplicações;
14. Resolver exercícios usando uma ferramenta tecnológica.

A prova será composta por questões que possibilitam verificar se os objetivos foram atingidos. Portanto, esse é o roteiro para orientações de seus estudos. O modelo de formulação das questões é o modelo adotado na formulação dos exercícios e no desenvolvimento teórico desse capítulo nessa apostila.

1.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos a integral definida. Uma das principais aplicações da integral definida encontra-se em problemas que envolvem cálculo de área e volumes. Por exemplo, seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Nosso propósito é determinar a área da região delimitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, conforme Figura 1.1 abaixo:

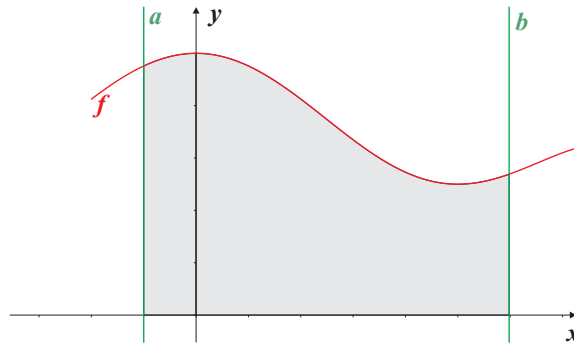


Figura 1.1: Área da região R

Estimando o valor da área R : Sabemos como calcular a área de um retângulo (*base* $\times$ *altura*). A área de um polígono podemos obter subdividindo-o em triângulos e retângulos. No entanto, não é tão fácil encontrar a área de uma região com lados curvos. Assim, parte do problema da área é utilizar uma ideia intuitiva do que é a área de uma região. Recordemos que, para definir uma tangente, primeiro aproximamos a inclinação da reta tangente por inclinações de retas secantes e então tomamos o limite dessas aproximações. Utilizaremos uma ideia semelhante para obter áreas.

Por exemplo para calcular a área da região R vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em 2 subintervalos de comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{2}$. Denotamos os extremos destes subintervalos por x_i , onde $i \in \{0, 1, 2\}$. Veja que, neste caso, temos $x_0 = a$, $x_1 = c$ e $x_2 = b$. Na Figura 1.2, considere os retângulos de largura Δx e altura $M_i = \text{Max}\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

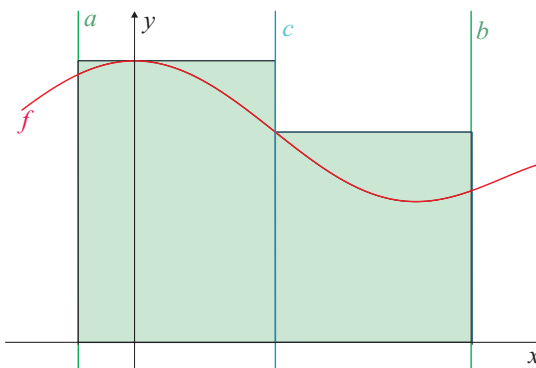


Figura 1.2: Estimativa por soma de áreas de retângulos

Deste modo obtemos um polígono circunscrito a região R cuja área é dada pela soma da área dos dois retângulos. Como a base é a mesma, podemos dizer que a área é dada por $\sum_{i=1}^2 M_i \Delta x$, onde $M_i = \text{Max}\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Você acha que podemos comparar a

área da região R representada pela Figura 1.1 e a região formada pelos retângulos da Figura 1.2? A diferença é muito grande? O que aconteceria com esta diferença se dividíssemos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos com $n = 3, 4, 5, 6, \dots$?

A definição formal de integral definida envolve a soma de muitos termos pequenos (diferenciais), com a finalidade de obter-se uma quantidade total após esta operação. Assim há uma conexão entre o cálculo integral e diferencial, onde o Teorema Fundamental do Cálculo relaciona a integral com a derivada. As integrais estão envolvidas em inúmeras situações: usando a taxa (derivada) podemos obter a quantidade (integral) de óleo que vaza de um tanque durante um certo tempo; utilizando a leitura do velocímetro de um ônibus espacial é possível calcular a altura atingida por ele em um dado intervalo de tempo. Assim, pode-se usar a integral para resolver problemas concernentes a volumes, comprimentos de curvas, previsões populacionais, saída de sangue do coração, força sobre uma represa, potência consumida e a energia usada em um intervalo de tempo na cidade de Joinville, etc.

O Cálculo da Área

Primeiramente aproximaremos a área da região R delimitada por gráficos de funções por soma de áreas de retângulos inscritos ou circunscritos para então tomarmos o limite das áreas desses retângulos, à medida que se aumenta o número destes, conforme a Figura 1.3.

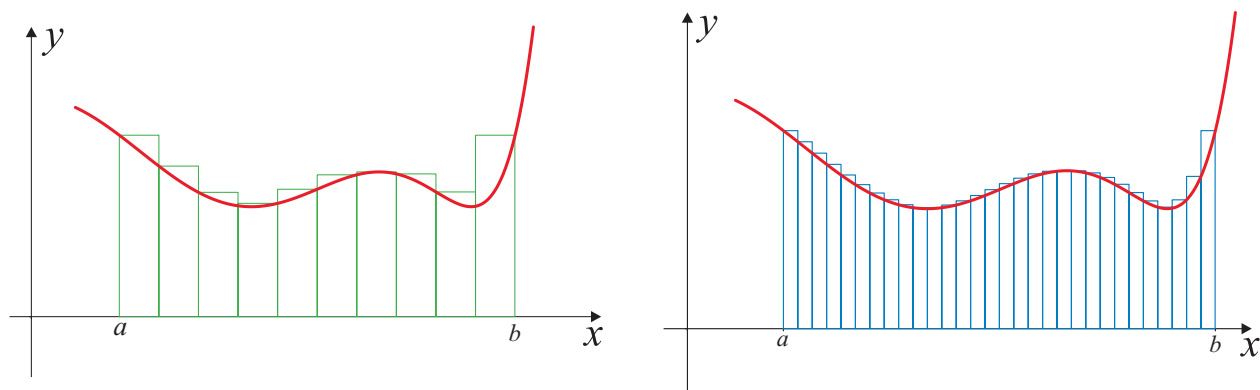


Figura 1.3: Aproximando áreas com n retângulos

E desta forma, a área total desejada será obtida pela soma das áreas retangulares quando suas bases se tornam cada vez menores, isto é, quando $\Delta x \rightarrow 0$ (ou equivalentemente, quando o número de retângulos se torna cada vez maior, isto é, $n \rightarrow \infty$). Você consegue formalizar, matematicamente, este resultado?

Para dar início a essa formalização, veremos algumas definições auxiliares.

1.2 Partição

DEFINIÇÃO 1.2.1 *Seja $[a, b]$ um intervalo. Denominamos partição de $[a, b]$ ao conjunto ordenado de pontos*

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$$

tais que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

e que dividem $[a, b]$ em n -subintervalos, a saber,

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{n-1}, x_n],$$

denominados intervalos da partição. Além disso, podemos escrever

$$\begin{aligned} |[x_0, x_1]| &= x_1 - x_0 = \Delta x_1 \\ |[x_1, x_2]| &= x_2 - x_1 = \Delta x_2 \\ |[x_2, x_3]| &= x_3 - x_2 = \Delta x_3 \\ &\dots \\ |[x_{i-1}, x_i]| &= x_i - x_{i-1} = \Delta x_i \\ &\dots \\ |[x_{n-1}, x_n]| &= x_n - x_{n-1} = \Delta x_n. \end{aligned}$$

EXEMPLO 1.2.2 Considerando o intervalo $[1, 12]$, o conjunto de pontos $P = \{1, 2, 4, 8, 12\}$ é uma partição de $[1, 12]$. Os intervalos dessa partição são $[1, 2]$, $[2, 4]$, $[4, 8]$ e $[8, 12]$.

Naturalmente, temos $1 = x_0 < 2 = x_1 < 4 = x_2 < 8 = x_3 < 12 = x_4$.

DEFINIÇÃO 1.2.3 Seja $[a, b]$ um intervalo e considere

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\} \quad \text{e} \quad Q = \{x_0, x_1, x_2, \dots, y_0, \dots, x_i, \dots, x_n\}$$

duas partições de $[a, b]$. Dizemos que a partição Q é um refinamento da partição P se $P \subset Q$.

EXEMPLO 1.2.4 Consideremos o intervalo $[1, 12]$. Os conjuntos de pontos

$$P = \{1, 2, 4, 8, 12\} \quad \text{e} \quad Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12\}$$

são duas partições de $[1, 12]$ com $P \subset Q$. Então Q é um refinamento de P .

1.3 Soma Superior

Consideraremos sempre uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida num intervalo fechado $[a, b]$ e limitada nesse intervalo, isto é, existem $m, M \in \mathbb{R}$ tais que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$.

DEFINIÇÃO 1.3.1 Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e seja $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$, com $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Seja M_i o valor supremo de f no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, onde $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Denominamos soma superior de f em relação à partição P e denotamos por $\bar{S}(f, P)$ a expressão:

$$\bar{S}(f, P) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \dots + M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}). \quad (1.3.1)$$

EXEMPLO 1.3.2 Considere a função $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \sin x$. Na Figura 1.4 podemos ver o gráfico de uma soma superior referente a uma partição composta por 15 pontos. Já uma soma superior referente a uma partição com maior número de pontos (80 pontos), é ilustrada pela Figura 1.5.

Note que, conforme aumentamos o número de pontos da partição, aqui uniformemente distribuídos, a soma superior $\bar{S}(f, P)$ vai se aproximando da área sob o gráfico de $f(x) = x \sin x$, no intervalo $[0, 2]$.

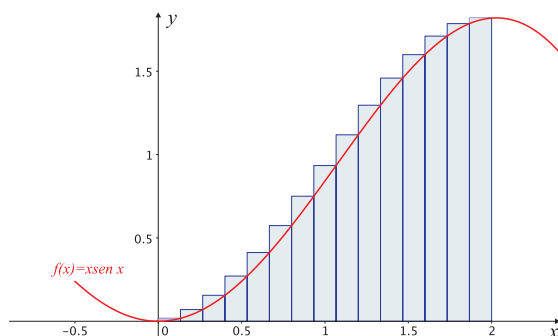


Figura 1.4: Soma Superior, $\bar{S}(f, P)$, P com 15 pontos: $A = 1,863$ u.a.

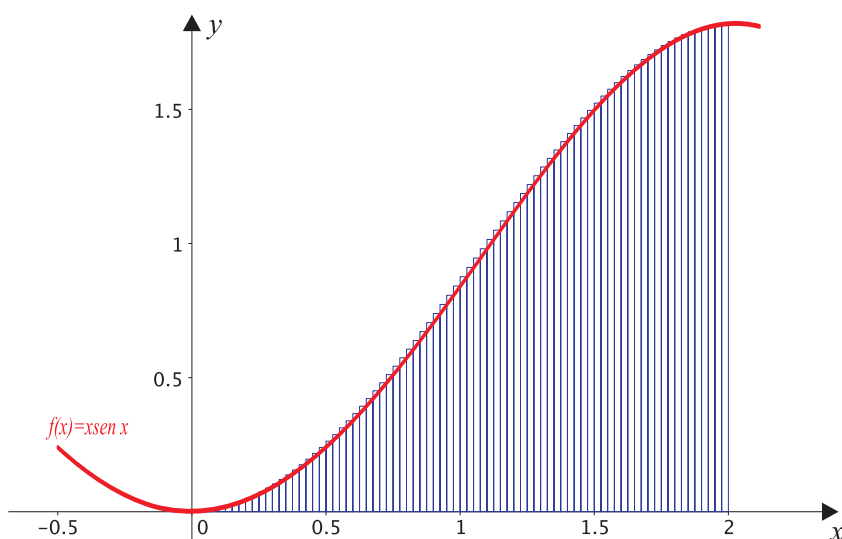


Figura 1.5: Soma Superior, $\bar{S}(f, P)$, P com 80 pontos: $A = 1,746$ u.a.

1.4 Soma Inferior

DEFINIÇÃO 1.4.1 Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e seja $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$, onde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Seja m_i o valor ínfimo de f no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Denominamos soma inferior de f em relação à partição P e denotamos por $\underline{S}(f, P)$ à expressão:

$$\underline{S}(f, P) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \dots + m_n(x_n - x_{n-1}) \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}). \quad (1.4.1)$$

EXEMPLO 1.4.2 Considere a função $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \sin x$. Na Figura 1.6 podemos ver o gráfico de uma soma inferior referente a uma partição composta por um número reduzido de pontos (15 pontos) e na Figura 1.7 de uma soma inferior referente a uma partição com maior número de pontos (80 pontos).

Note que, aumentando o número de pontos de $[a, b]$ a soma inferior $\underline{S}(f, P)$ vai se aproximando da área sob o gráfico de $f(x) = x \sin x$ no intervalo $[0, 2]$.

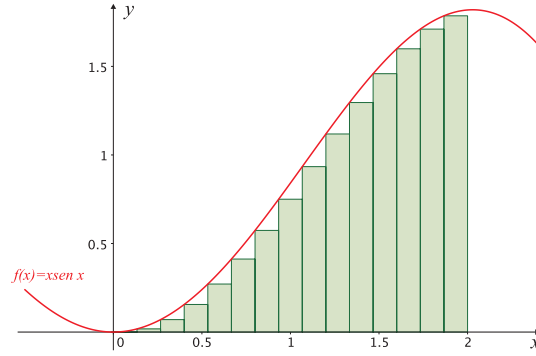


Figura 1.6: Soma Inferior, $\underline{S}(f, P)$, P com 15 pontos: $A = 1,642$ u.a.

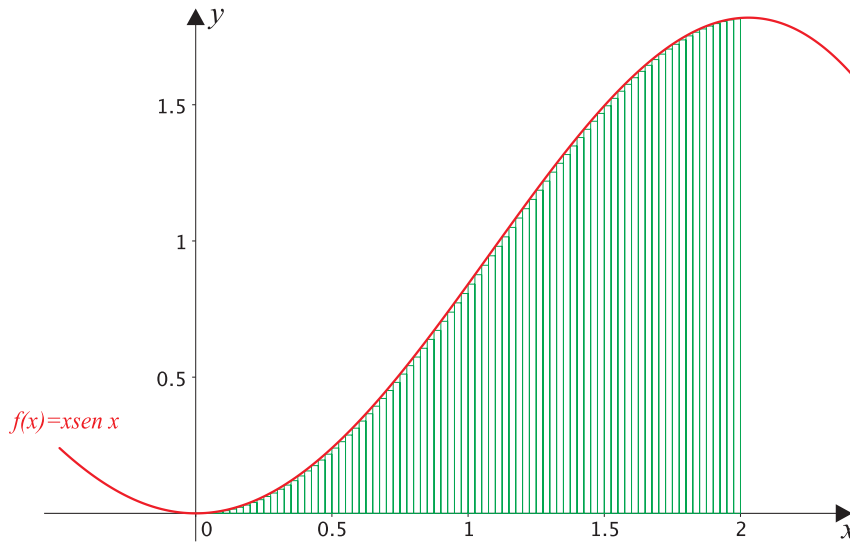


Figura 1.7: Soma Inferior, $\underline{S}(f, P)$, P com 80 pontos: $A = 1,718$ u.a.

1.5 Função Integrável

DEFINIÇÃO 1.5.1 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é integrável se*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{S}(f, P) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{S}(f, P)$$

ou seja, se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}),$$

sendo $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ qualquer partição de $[a, b]$.

No caso de uma função integrável, denotaremos a **integral definida de f de a até b** por

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(\chi_i)(x_i - x_{i-1}), \text{ onde } \chi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

OBSERVAÇÃO 1.5.2 *As somas superiores e inferiores acima definidas são casos particulares de **Somas de Riemann**, que são quaisquer expressões da forma $S = \sum_{i=1}^n f(w_i) \Delta x_i$, onde $w_i \in [x_{i-1}, x_i]$ não é necessariamente um máximo ou um mínimo de f em cada subintervalo*

da partição considerada, nem Δx_i é necessariamente constante. No entanto, em nossos propósitos, não iremos considerar esses casos mais gerais.

Ainda, como $f(x)$ pode ser negativa, certos termos de uma soma superior ou inferior também podem ser negativos. Consequentemente, nem sempre $\underline{S}(f, P)$ e $\bar{S}(f, P)$ irão representar uma soma de áreas de retângulos. De forma geral, estas somas representam a soma das áreas dos retângulos situados acima do eixo- x (onde $f \geq 0$) com o negativo das áreas dos retângulos que estão situados abaixo deste eixo (onde $f \leq 0$).

OBSERVAÇÃO 1.5.3 Para calcular integrais definidas usando a definição de somas superiores ou inferiores, serão usadas as seguintes expressões:

$$(i) \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{k \text{ vezes}} = k$$

$$(ii) 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{(1+k)k}{2}$$

$$(iii) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$(iv) 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

$$(v) 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + k^4 = \frac{k(k+1)(6k^3 + 9k^2 + k - 1)}{30}$$

EXEMPLO 1.5.4 Usando a definição de soma superior, encontre a área delimitada pelas curvas $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 4$ e $y = 0$ (sabendo que a função é integrável).

Solução: Tomamos $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ uma partição do intervalo $[0, 4]$, conforme ilustra a Figura 1.8

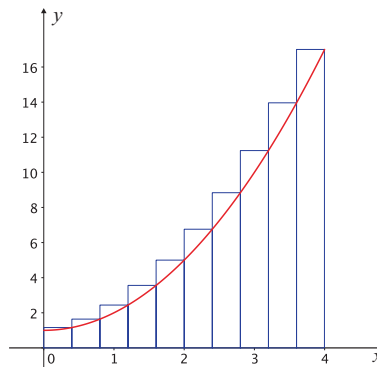


Figura 1.8: Soma Superior de $f(x) = x^2 + 1$ com 10 retângulos

Como os subintervalos da partição podem ser quaisquer, podemos admitir que todos possuem o mesmo diâmetro, isto é, $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n$. Portanto, temos que $\Delta x = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$ e podemos atribuir valores para cada $x_i \in P$ como sendo

$$x_0 = 0, x_1 = \Delta x, x_2 = 2\Delta x, x_3 = 3\Delta x, \dots, x_n = n\Delta x.$$

Seja M_i o supremo de $f(x) = x^2 + 1$ no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Como neste exemplo temos uma função crescente, o máximo de f em cada subintervalo ocorre no seu extremo direito, ou seja, $M_i = f(x_i)$. Assim, a soma superior de f é dada por

$$\begin{aligned}
 \overline{S}(f, P) &= M_1\Delta x + M_2\Delta x + M_3\Delta x + \dots + M_n\Delta x \\
 &= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x \\
 &= f(\Delta x)\Delta x + f(2\Delta x)\Delta x + f(3\Delta x)\Delta x + \dots + f(n\Delta x)\Delta x \\
 &= \Delta x[(\Delta x)^2 + 1 + (2\Delta x)^2 + 1 + (3\Delta x)^2 + 1 + \dots + (n\Delta x)^2 + 1] \\
 &= \Delta x[1 + 1 + \dots + 1 + (\Delta x)^2 + 4(\Delta x)^2 + 9(\Delta x)^2 + \dots + n^2(\Delta x)^2] \\
 &= \Delta x[n + \Delta x^2(1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)] \\
 &= \Delta x \left(n + \Delta x^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\
 &= \frac{4}{n} \left(n + \frac{4^2}{n^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \\
 &= 4 + \frac{64}{6} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \\
 &= 4 + \frac{32}{3} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 4 + \frac{64}{3} + \frac{32}{n} + \frac{32}{3n^2}.
 \end{aligned}$$

Portanto, a área desejada é dada por

$$\int_0^4 (x^2 + 1)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{64}{3} + \frac{32}{n} + \frac{32}{3n^2} \right) = \frac{76}{3}.$$

Agora, se desejarmos encontrar a soma inferior de f , quais modificações deveremos efetuar nos cálculos acima? Sugere-se que o estudante refaça este exercício, prestando bastante atenção no que ocorre com as alturas dos retângulos inscritos e nas consequências deste fato.

EXEMPLO 1.5.5 Usando a definição de soma inferior, encontre a área delimitada pelas curvas $y = 16 - x^2$, $x = 1$, $x = 4$ e $y = 0$ (sabendo que a função é integrável).

Solução: Tomamos $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ uma partição do intervalo $[1, 4]$, conforme ilustra a Figura 1.9

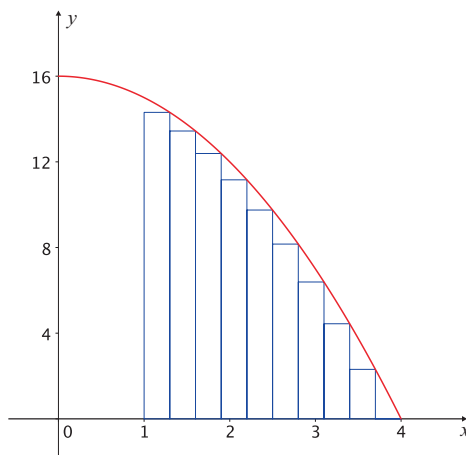


Figura 1.9: Soma Inferior de $f(x) = 16 - x^2$ com 10 retângulos

Como os subintervalos da partição podem ser quaisquer, podemos admitir que todos possuem o mesmo diâmetro, isto é, $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n$. Portanto, temos que $\Delta x = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$ e podemos atribuir valores para cada $x_i \in P$ como sendo

$$x_0 = 1, x_1 = 1 + \Delta x, x_2 = 1 + 2\Delta x, x_3 = 1 + 3\Delta x, \dots, x_n = 1 + n\Delta x.$$

Seja m_i o ínfimo de $f(x) = 16 - x^2$ no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Como no intervalo $[1, 4]$ a função é decrescente, o mínimo de f em cada subintervalo ocorre no seu extremo direito, ou seja, $m_i = f(x_i)$. Assim, a soma inferior de f é dada por

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, P) &= m_1\Delta x + m_2\Delta x + m_3\Delta x + \dots + m_n\Delta x \\ &= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x \\ &= f(1 + \Delta x)\Delta x + f(1 + 2\Delta x)\Delta x + f(1 + 3\Delta x)\Delta x + \dots + f(1 + n\Delta x)\Delta x \\ &= [16 - (1 + \Delta x)^2 + 16 - (1 + 2\Delta x)^2 + 16 - (1 + 3\Delta x)^2 + \dots + 16 - (1 + n\Delta x)^2]\Delta x \\ &= 16n\Delta x + [1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 + 2 \cdot 2\Delta x + (2\Delta x)^2 + 1 + 2 \cdot 3\Delta x + (3\Delta x)^2 + \\ &\quad + \dots + 1 + 2 \cdot n\Delta x + (n\Delta x)^2]\Delta x \\ &= 16n\Delta x - n\Delta x - 2(1 + 2 + 3 + \dots + n)(\Delta x)^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)(\Delta x)^3 \\ &= 15n\Delta x - 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot (\Delta x)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot (\Delta x)^3 \\ &= 15n \cdot \frac{3}{n} - 9 \cdot \frac{n^2 + n}{n^2} - 9 \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2n^3} \\ &= 45 - 9 - \frac{9}{n} - 9 - \frac{27}{2n} - \frac{9}{2n^2} = 27 - \frac{45}{2n} - \frac{9}{2n^2} \end{aligned}$$

Portanto, a área desejada é dada por

$$\int_1^4 (16 - x^2)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(27 - \frac{45}{2n} - \frac{9}{2n^2} \right) = 27.$$

OBSERVAÇÃO 1.5.6 Até o momento não exigimos que a função seja contínua. Isso porque a condição de continuidade não é necessária para que uma função seja integrável. Daqui para frente só trabalharemos com funções contínuas. A integrabilidade de funções não contínuas não será objeto de nosso estudo.

Propriedades das Integrais

Se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções integráveis, então são válidas as seguintes propriedades:

- i. Se $f(x)$ é uma função constante, i.e., $f(x) = c$ então $\int_a^b c dx = c(b - a)$.
- ii. Se k é uma constante então $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$.
- iii. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.
- iv. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ então $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

v. Se $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, então $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

vi. Se $c \in [a, b]$ então $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

vii. A troca dos limitantes de integração acarreta a mudança no sinal da integral definida, ou seja,

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

viii. $\int_a^a f(x) dx = 0$.

EXEMPLO 1.5.7 Determine a soma superior e a soma inferior para $f(x) = x^2 - 2x + 2$ no intervalo $[-1, 2]$. A seguir, utilize-as para calcular a área da região situada abaixo do gráfico de f e entre as retas $y = 0$, $x = -1$ e $x = 2$.

Solução: A Figura 1.10 ilustra o gráfico da soma superior de f referente a uma partição composta de 15 pontos. Observe que as alturas dos retângulos circunscritos não possuem o mesmo comportamento em todo o intervalo. Isso ocorre porque a função é decrescente no intervalo $[-1, 1]$ e crescente em $[1, 2]$. Para obter a expressão para a soma superior de f usaremos a Propriedade v. Tomaremos uma partição para o intervalo $[-1, 1]$ e outra para o intervalo $[1, 2]$.

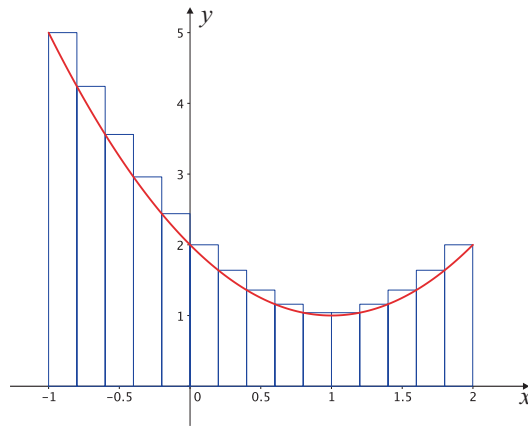


Figura 1.10: Soma Superior de $f(x) = x^2 - 2x + 2$ com 15 retângulos

Soma Superior para o intervalo $[-1, 1]$

Seja $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ uma partição do intervalo $[-1, 1]$, de tal forma que todos os subintervalos de P possuam o mesmo diâmetro, isto é, $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n$. Portanto, temos que a base de cada um dos retângulos é dada por $\Delta x = \frac{1 - (-1)}{n} = \frac{2}{n}$ e assim podemos atribuir valores para cada $x_i \in P$ como sendo

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -1 + \Delta x, \quad x_2 = -1 + 2\Delta x, \quad x_3 = -1 + 3\Delta x, \quad \dots, \quad x_n = -1 + n\Delta x.$$

Agora vamos determinar as alturas dos retângulos circunscritos. Seja M_i o supremo de $f(x) = x^2 - 2x + 2$ no subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Como neste intervalo a função é decrescente o

máximo de f em cada subintervalo ocorre no seu extremo esquerdo, ou seja, $M_i = f(x_{i-1})$. Assim, a soma superior de f é dada por

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, P) &= M_1\Delta x + M_2\Delta x + M_3\Delta x + \cdots + M_n\Delta x \\
&= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x \\
&= f(-1)\Delta x + f(-1 + \Delta x)\Delta x + f(-1 + 2\Delta x)\Delta x + \cdots + f(-1 + (n-1)\Delta x)\Delta x \\
&= \Delta x \{5 + [(-1 + \Delta x)^2 - 2(-1 + \Delta x) + 2] + [(-1 + 2\Delta x)^2 - 2(-1 + 2\Delta x) + 2] + \\
&\quad + \cdots + [(-1 + (n-1)\Delta x)^2 - 2(-1 + (n-1)\Delta x) + 2]\} \\
&= \Delta x \{5 + [(1 - 2\Delta x + (\Delta x)^2) + 2 - 2\Delta x + 2] + [1 - 4\Delta x + 2^2(\Delta x)^2 + 2 - 4\Delta x + 2] + \\
&\quad + \cdots + [1 - 2(n-1)\Delta x + (n-1)^2(\Delta x)^2 + 2 - 2(n-1)\Delta x + 2]\} \\
&= \Delta x \{5 + [5 - 4\Delta x + (\Delta x)^2] + [5 - 8\Delta x + 2^2(\Delta x)^2] + \\
&\quad + \cdots + [5 - 4(n-1)\Delta x + (n-1)^2(\Delta x)^2]\} \\
&= \Delta x [5n - 4\Delta x(1 + 2 + \cdots + (n-1)) + (\Delta x)^2(1 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2)] \\
&= \frac{2}{n} \cdot \left[5n - 4 \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right] \\
&= \frac{2}{n} \cdot \left[5n - 4(n-1) + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2n^2 - 3n + 1}{n}\right) \right] \\
&= 2 + \frac{8}{n} + \frac{4}{3} \cdot \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{14}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}.
\end{aligned}$$

Soma Superior para o intervalo $[1, 2]$

Seja $Q = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ uma partição do intervalo $[1, 2]$, de tal forma que todos os subintervalos de Q possuam o mesmo diâmetro, isto é, $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n$. Portanto, temos que a base de cada um dos retângulos é dada por $\Delta x = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$ e assim podemos atribuir valores para cada $x_i \in Q$ como sendo

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1 + \Delta x, \quad x_2 = 1 + 2\Delta x, \quad x_3 = 1 + 3\Delta x, \quad \cdots, \quad x_n = 1 + n\Delta x.$$

Como neste intervalo a função é decrescente as alturas dos retângulos circunscritos, M_i , ocorre no extremo direito de cada subintervalo, i.e., $M_i = f(x_i)$. Assim a soma superior de f em $[1, 2]$ relativa a partição Q é dada por

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, Q) &= M_1\Delta x + M_2\Delta x + M_3\Delta x + \cdots + M_n\Delta x \\
&= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x \\
&= [f(1 + \Delta x) + f(1 + 2\Delta x) + f(1 + 3\Delta x) + \cdots + f(1 + n\Delta x)]\Delta x \\
&= \{[(1 + \Delta x)^2 - 2(1 + \Delta x) + 2] + [(1 + 2\Delta x)^2 - 2(1 + 2\Delta x) + 2] + \\
&\quad + [(1 + 3\Delta x)^2 - 2(1 + 3\Delta x) + 2] + \cdots + [(1 + n\Delta x)^2 - 2(1 + n\Delta x) + 2]\}\Delta x \\
&= \{[1 + (\Delta x)^2] + [1 + (2\Delta x)^2] + [1 + (3\Delta x)^2] + \cdots + [1 + (n\Delta x)^2]\}\Delta x \\
&= n\Delta x + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)(\Delta x)^3 \\
&= n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{4}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}
\end{aligned}$$

Portanto, a soma superior de f em $[-1, 2]$ é

$$\overline{S}(f, P \cup Q) = \frac{14}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} + \frac{4}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} = 6 + \frac{9}{2n} + \frac{3}{2n^2}.$$

Para determinar a soma inferior de f , basta encontrar as alturas dos retângulos inscritos. A Figura 1.11 ilustra o gráfico da soma inferior de f referente a uma partição composta de 15 pontos. Observe que as alturas dos retângulos inscritos não possuem o mesmo comportamento em todo o intervalo. Isso ocorre porque a função é decrescente no intervalo $[-1, 1]$ e crescente em $[1, 2]$. Para obter a expressão para a soma inferior de f usaremos novamente a Propriedade v, tomando uma partição para o intervalo $[-1, 1]$ e outra para o intervalo $[1, 2]$.

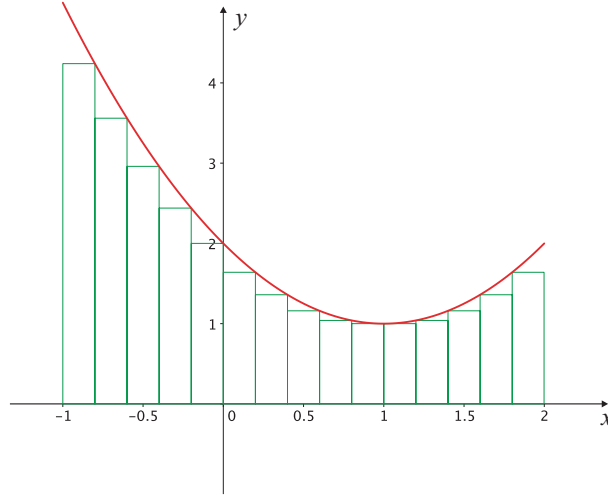


Figura 1.11: Soma Inferior de $f(x) = x^2 - 2x + 2$ com 15 retângulos

Soma Inferior para o intervalo $[-1, 1]$

Considere a partição P tomada acima. A altura dos retângulos inscritos, m_i , ocorre no extremo direito de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, i.e., $m_i = f(x_i)$.

Assim, a soma inferior de f em $[-1, 1]$, relativa a partição P , é dada por

$$\begin{aligned}
 \underline{S}(f, P) &= m_1\Delta x + m_2\Delta x + m_3\Delta x + \cdots + m_n\Delta x \\
 &= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x \\
 &= f(-1 + \Delta x)\Delta x + f(-1 + 2\Delta x)\Delta x + f(-1 + 3\Delta x)\Delta x + \cdots + f(-1 + n\Delta x)\Delta x \\
 &= \Delta x \{ [(-1 + \Delta x)^2 - 2(-1 + \Delta x) + 2] + [(-1 + 2\Delta x)^2 - 2(-1 + 2\Delta x) + 2] + \\
 &\quad + \cdots + [(-1 + n\Delta x)^2 - 2(-1 + n\Delta x) + 2] \} \\
 &= \Delta x \{ [1 - 2\Delta x + (\Delta x)^2 + 2 - 2\Delta x + 2] + [1 - 4\Delta x + 2^2(\Delta x)^2 + 2 - 4\Delta x + 2] + \\
 &\quad + \cdots + [1 - 2n\Delta x + n^2(\Delta x)^2 + 2 - 2n\Delta x + 2] \} \\
 &= \Delta x \{ [5 - 4\Delta x + (\Delta x)^2] + [5 - 8\Delta x + 2^2(\Delta x)^2] + \cdots + [5 - 4n\Delta x + n^2(\Delta x)^2] \} \\
 &= \Delta x [5n - 4\Delta x(1 + 2 + \cdots + n) + (\Delta x)^2(1 + 2^2 + \cdots + n^2)] \\
 &= \frac{2}{n} \cdot \left[5n - 4 \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{(n+1)n}{2} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \\
 &= \frac{2}{n} \cdot \left[5n - 4(n+1) + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2n^2 + 3n + 1}{n}\right) \right] \\
 &= 2 - \frac{8}{n} + \frac{4}{3} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{14}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}.
 \end{aligned}$$

Soma Inferior para o intervalo $[1, 2]$

Considere a partição Q tomada acima. A altura dos retângulos inscritos, m_i , ocorre no extremo esquerdo de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, i.e., $m_i = f(x_{i-1})$.

Assim, a soma inferior de f em $[1, 2]$, relativa a partição Q , é dada por

$$\begin{aligned}\underline{S}(f, Q) &= m_1\Delta x + m_2\Delta x + m_3\Delta x + \cdots + m_n\Delta x \\&= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x \\&= f(1)\Delta x + f(1 + \Delta x)\Delta x + f(1 + 2\Delta x)\Delta x + \cdots + f(1 + (n-1)\Delta x)\Delta x \\&= \Delta x \{1 + [(1 + \Delta x)^2 - 2(1 + \Delta x) + 2] + [(1 + 2\Delta x)^2 - 2(1 + 2\Delta x) + 2] + \\&\quad + \cdots + [(1 + (n-1)\Delta x)^2 - 2(1 + (n-1)\Delta x) + 2]\} \\&= \Delta x \{1 + [1 + (\Delta x)^2] + [1 + (2\Delta x)^2] + \cdots + [1 + ((n-1)\Delta x)^2]\} \\&= n\Delta x + [1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2](\Delta x)^3 \\&= n \cdot \frac{1}{n} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{4}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.\end{aligned}$$

Portanto, a soma inferior de f em $[-1, 2]$ é

$$\underline{S}(f, P \cup Q) = \frac{14}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} + \frac{4}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} = 6 - \frac{9}{2n} + \frac{3}{2n^2}.$$

Finalmente, utilizando a soma superior de f , obtemos que a área da região desejada é dada por

$$\begin{aligned}A &= \int_{-1}^1 (x^2 - 2x + 2)dx + \int_1^2 (x^2 - 2x + 2)dx \\&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{14}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \right) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) = \frac{14}{3} + \frac{4}{3} = 6.\end{aligned}$$

Note que obteríamos o mesmo resultado utilizando a soma inferior de f .

1.5.8 Teorema do Valor Médio para Integrais

TEOREMA 1.5.9 Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, existe $c \in [a, b]$ tal que $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$.

EXEMPLO 1.5.10 No Exemplo 1.5.4 obtemos que $\int_0^4 (x^2 + 1)dx = \frac{76}{3}$. Determine, se existir, um número que satisfaça o teorema do valor médio para esta integral.

Solução: Como $f(x) = x^2 + 1$ é uma função contínua no intervalo $[0, 4]$ o Teorema do Valor Médio para Integrais garante que existe $c \in (0, 4)$ de modo que

$$\int_0^4 (x^2 + 1)dx = f(c)(4 - 0).$$

Assim,

$$c^2 + 1 = \frac{76}{4 \cdot 3} \Rightarrow c^2 = \frac{16}{3} \Rightarrow c = \pm \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Observe que $c = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$ não está no intervalo que procuramos a solução. Portanto, $c = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ satisfaz a conclusão do Teorema 1.5.9.

O Teorema do Valor Médio para Integrais tem uma interpretação geométrica interessante se $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$. Neste caso $\int_a^b f(x)dx$ é a área sob o gráfico de f de a até b , e o número $f(c)$ do Teorema 1.5.9 é a ordenada do ponto P do gráfico de f com abscissa c (veja a Figura 1.12) Traçando-se uma reta horizontal por P a área da região retangular limitada por essa reta, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$ é $f(c)(b - a)$ e que, pelo Teorema 1.5.9, é a mesma que a área sob o gráfico de f de a até b .

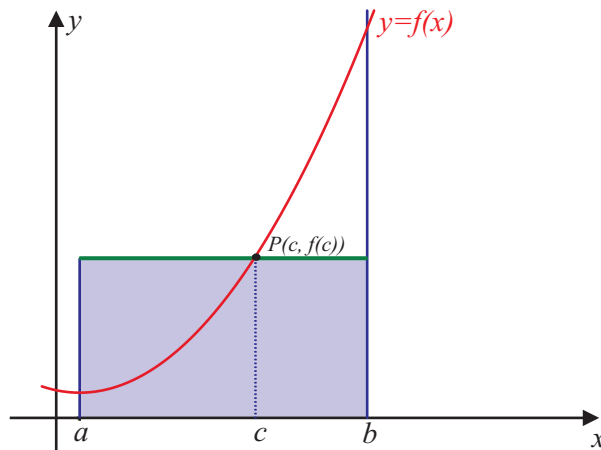


Figura 1.12: Interpretação geométrica do Teorema 1.5.9

OBSERVAÇÃO 1.5.11 O número c do Teorema 1.5.9 não é necessariamente único. De fato, se f for uma função constante então qualquer número c pode ser utilizado.

OBSERVAÇÃO 1.5.12 O número $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ é dito valor médio de f em $[a, b]$.

1.6 Teorema Fundamental do Cálculo

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua integrável. Vamos fixar o limite inferior a e variar o limite superior. Definiremos a função

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \forall x \in [a, b].$$

Caso $f(t)$ seja sempre positiva, então $F(x)$ será numericamente igual a área do trapezóide curvilíneo da Figura 1.13.

TEOREMA 1.6.1 Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$, então a função $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ é uma primitiva da função f , ou seja, $F'(x) = f(x)$.

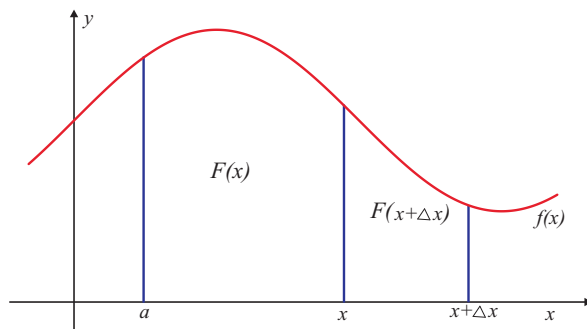


Figura 1.13: Representação geométrica de $F(x)$

DEMONSTRAÇÃO: Utilizando a definição de derivada, temos que

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt,
 \end{aligned}$$

porém, pelo Teorema 1.5.9, sabemos que existe $c \in [x, x + \Delta x]$ tal que

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(c)(x + \Delta x - x) = f(c)\Delta x$$

e portanto

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c)$$

mas, quando $\Delta x \rightarrow 0$ temos que $c \rightarrow x$ como f é contínua, obtemos que $f(c) \rightarrow f(x)$ e assim fica demonstrado que

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x).$$

■

Uma consequência desse teorema é o corolário que segue:

COROLÁRIO 1.6.2 Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua no intervalo $[a, b]$, então $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em (a, b) e $F'(x) = f(x)$.

A função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definida acima, é denominada primitiva de $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e pelo Teorema 1.6.1 toda função contínua num intervalo $[a, b]$ possui primitiva em $[a, b]$.

TEOREMA 1.6.3 Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

onde G é qualquer primitiva de f , isto é, uma função tal que $G' = f$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Pelo Teorema 1.6.1 sabemos que $F'(x) = f(x)$, isto é, F é uma primitiva de f . Se G for qualquer outra primitiva de f em $[a, b]$, então elas diferem por uma constante, isto é,

$$G(x) = F(x) + c.$$

Assim,

$$G(b) - G(a) = [F(b) + c] - [F(a) + c] = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

Trocando t por x obtemos

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

como queríamos demonstrar. ■

A notação usual é

$$\int_a^b f(x)dx = G(x) \Big|_a^b.$$

O teorema fundamental do cálculo permite que sejam determinadas as integrais definidas das funções contínuas em intervalos fechados sem usar o método visto para encontrar somas superiores e inferiores.

EXEMPLO 1.6.4 *Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo encontre a área sob o gráfico de $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$.*

Solução: Pelo Teorema 1.6.3 a área desejada é dada por

$$A = \int_0^4 (x^2 + 1)dx = \frac{x^3}{3} + x \Big|_0^4 = \frac{64}{3} + 4 = \frac{76}{3}.$$

Compare este resultado com o resultado obtido no Exemplo 1.5.4.

EXEMPLO 1.6.5 *Calcule a área da região situada entre o eixo x e a curva $f(x) = \frac{1}{8}(x^2 - 2x + 8)$, com x no intervalo de $[-2, 4]$.*

Solução: Uma representação gráfica pode ser visualizada na figura 1.14.

Pelo teorema fundamental do cálculo temos que

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^4 \frac{1}{8}(x^2 - 2x + 8)dx = \frac{1}{8} \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 8x \right) \Big|_{-2}^4 \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{4^3}{3} - 4^2 + 8(4) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2 + 8(-2) \right) \right] \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{64}{3} - 16 + 32 + \frac{8}{3} + 4 + 16 \right] = \frac{60}{8} = \frac{15}{2} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

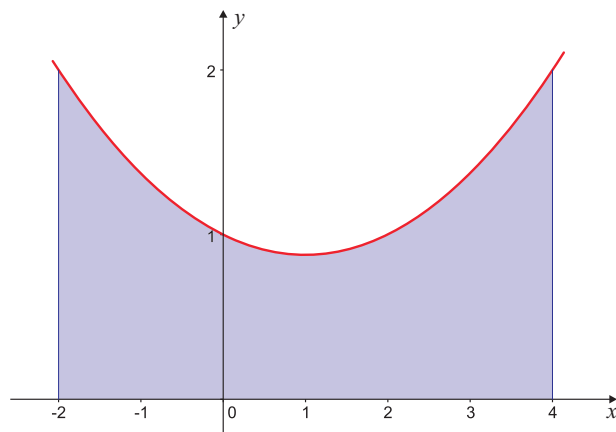


Figura 1.14: Área sob o gráfico de $f(x) = \frac{1}{8}(x^2 - 2x + 8)$

1.6.6 Fórmulas Clássicas para Resolver Integrais (Revisão)

Para utilizar o teorema fundamental do cálculo, é essencial que se saiba obter a primitiva (anti-derivada) de uma função. Vamos então relembrar, do cálculo I, alguns processos clássicos de integração que serão muito úteis na resolução de problemas que envolvem integral definida.

i. Mudança de Variável

TEOREMA 1.6.7 *Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que g' é integrável e $g([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$ e, além disso $g(\alpha) = a$ e $g(\beta) = b$. Então*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) g'(t) dt.$$

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável com g' integrável e $g([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$ com $g(\alpha) = a$ e $g(\beta) = b$. Então f possui uma primitiva $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_a^b f(x) dx = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)).$$

Por outro lado, pela regra da cadeia temos que

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t)) g'(t) = f(g(t)) g'(t)$$

para todo $t \in [\alpha, \beta]$, conseqüentemente,

$$(F \circ g)(t) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$$

é uma primitiva da função integrável $f(g(t)) g'(t)$. Portanto, obtém-se:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) g'(t) dt = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \int_a^b f(x) dx.$$

■

EXEMPLO 1.6.8 *Calcular a integral definida $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$, usando o Teorema 1.6.7.*

Solução: Primeiro vamos encontrar a função $g(t)$. Seja $t = \sqrt{x-1}$ (note que $t \geq 0$), então podemos escrever $x = t^2 + 1$ e assim obtemos $g(t) = t^2 + 1$, cuja derivada é $g'(t) = 2t$. Vamos agora determinar os valores de α e β . Como temos que $g(\alpha) = a = 1$ e $g(\beta) = b = 5$ segue que

$$\begin{aligned}\alpha^2 + 1 = 1 &\Rightarrow \alpha^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \\ \beta^2 + 1 = 5 &\Rightarrow \beta^2 = 4 \Rightarrow \beta = 2.\end{aligned}$$

Na sequência, determinaremos $f(g(t))$. Como $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$, obtemos

$$f(g(t)) = \frac{\sqrt{g(t)-1}}{g(t)} = \frac{\sqrt{t^2+1-1}}{t^2+1} = \frac{t}{t^2+1}.$$

Finalmente, vamos determinar o valor da integral, usando o Teorema 1.6.7, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx &= \int_0^2 \frac{t}{t^2+1} 2t dt = 2 \int_0^2 \frac{t^2}{t^2+1} dt = 2 \int_0^2 \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = \\ &= 2 \int_0^2 \frac{t^2+1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1} dt = 2 \int_0^2 dt - 2 \int_0^2 \frac{dt}{t^2+1} = \\ &= 2t \Big|_0^2 - 2 \arctan t \Big|_0^2 = 4 - 2 \arctan 2.\end{aligned}$$

ii. Integração por partes

TEOREMA 1.6.9 *Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções que possuem derivadas integráveis, então*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Na prática, costumamos chamar

$$\begin{aligned}u = f(x) &\Rightarrow du = f'(x)dx \\ dv = g'(x)dx &\Rightarrow v = g(x)\end{aligned}$$

e substituindo na igualdade acima, obtemos:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

EXEMPLO 1.6.10 *Determine o valor da integral $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x dx$.*

Solução: Nesse caso, fazemos:

$$\begin{aligned}u = \sin^2 x &\Rightarrow du = 2 \sin x \cos x dx \\ dv = \sin x dx &\Rightarrow v = \int \sin x dx = -\cos x\end{aligned}$$

e encontramos

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x dx &= \sin^2 x (-\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} -\cos x (2 \sin x \cos x) dx \\
 &= -\sin^2 x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \sin x dx \\
 &= \left(-\sin^2 x \cos x - \frac{2}{3} \cos^3 x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \\
 &= -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{2}{3} = \frac{5}{24}.
 \end{aligned}$$

1.7 Integrais Impróprias

DEFINIÇÃO 1.7.1 Seja $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua para todo $x \in [a, +\infty)$. Definimos

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

desde que o limite exista.

EXEMPLO 1.7.2 Encontre o valor numérico da integral $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

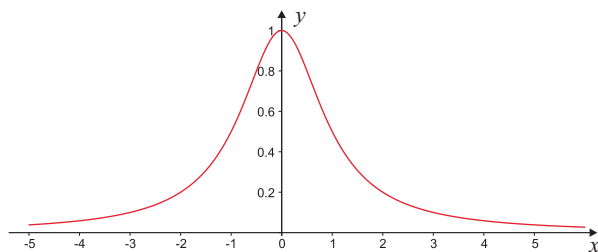


Figura 1.15: Área sob o gráfico de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Solução: Veja o gráfico de f na Figura 1.15. Pela definição 1.7.1 temos que

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan x \Big|_0^b \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctan b - \arctan 0) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

DEFINIÇÃO 1.7.3 Seja $f : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua para todo $x \in (-\infty, b]$. Definimos

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

desde que o limite exista.

EXEMPLO 1.7.4 Encontre o valor numérico da integral $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$.

Solução: Pela definição 1.7.3 temos que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctan x \Big|_a^0 \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} [\arctan 0 - \arctan a] = - \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctan a = - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

DEFINIÇÃO 1.7.5 Seja $f : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua para todo $x \in (-\infty, +\infty)$. Definimos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx,$$

desde que os limites existam.

EXEMPLO 1.7.6 Encontre o valor numérico da integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

Solução: Pela definição 1.7.5, tomando $c = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctan x \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan x \Big|_0^b \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctan 0 - \arctan a) + \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctan b - \arctan 0) \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctan a + \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan b \\ &= - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi.\end{aligned}$$

1.8 Integral de uma Função Descontínua num Ponto $c \in [a, b]$

DEFINIÇÃO 1.8.1 Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$, exceto no ponto $c \in [a, b]$. Definimos

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow c^-} \int_a^\alpha f(x) dx + \lim_{\beta \rightarrow c^+} \int_\beta^b f(x) dx,$$

desde que os limites acima existam.

EXEMPLO 1.8.2 Encontre o valor numérico da integral $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$.

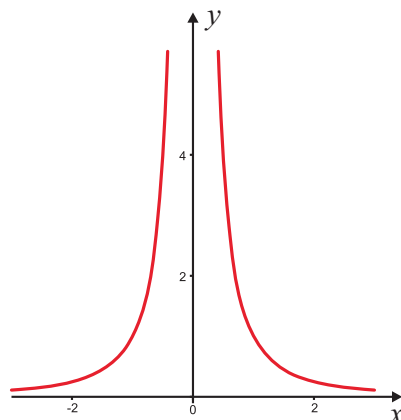


Figura 1.16: Área sob o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Solução: O integrando é contínuo em todo ponto pertencente ao intervalo $[-1, 1]$, exceto em $x = 0$ (observe a Figura 1.16). Pela definição 1.8.1, temos que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^-} \int_{-1}^{\alpha} \frac{1}{x^2} dx + \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \int_{\beta}^1 \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^-} \left. \frac{-1}{x} \right|_{-1}^{\alpha} + \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \left. \frac{-1}{x} \right|_{\beta}^1 \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^-} \left[\frac{-1}{\alpha} - \left(\frac{-1}{-1} \right) \right] + \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \left[-1 - \left(\frac{-1}{\beta} \right) \right] \\ &= [+ \infty - 1] + [-1 + \infty] = + \infty \end{aligned}$$

Consequentemente, a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ não é integrável no intervalo $[-1, 1]$.

OBSERVAÇÃO 1.8.3 Quando os limites que aparecem nas definições anteriores existirem e forem finitos, dizemos que a integral imprópria **converge**. Caso contrário, ou seja, quando um dos limites não existir, dizemos que a integral imprópria **diverge**.

1.9 Aplicações da Integral Definida

1.9.1 Área em coordenadas retangulares

Vimos que, se uma função f for não negativa, isto é, $f(x) \geq 0$ para todo x no intervalo $[a, b]$, então a área da região delimitada pelas curvas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e $y = f(x)$ é dada por

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

No caso mais geral, estaremos interessados em calcular a área da região situada entre os gráficos de duas funções f e g , com $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, de acordo com a Figura 1.17.

Nesta situação, devemos utilizar uma diferença de áreas e obter que

$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

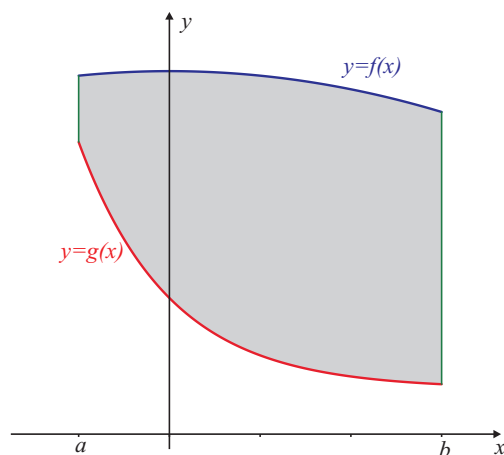


Figura 1.17: Região entre duas curvas

Na expressão acima, o termo $f(x) - g(x)$ corresponde à altura de um retângulo infinitesimal de base dx .

Note que, se uma função g for negativa, isto é, se $g(x) < 0$ para todo $x \in [a, b]$, a área da região situada entre as curvas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e $y = g(x)$ será dada por

$$A = \int_a^b (0 - g(x)) dx = - \int_a^b g(x) dx.$$

EXEMPLO 1.9.2 Calcule a área da região situada entre o eixo x e o gráfico da função $f(x) = 2x$, com x no intervalo $[-2, 2]$.

Solução: A representação gráfica de f pode ser observada na Figura 1.18. Como esta função tem imagem negativa no intervalo $[-2, 0]$ e não negativa no intervalo $[0, 2]$, devemos proceder como segue

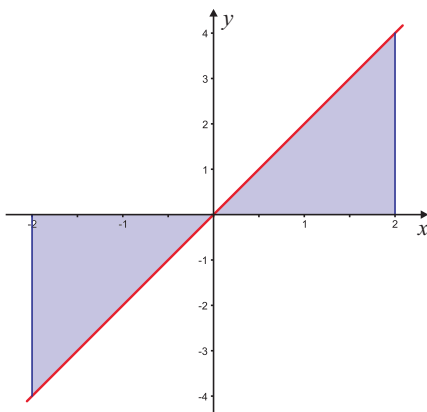


Figura 1.18: Área entre o eixo x e o gráfico de $f(x) = 2x$

$$A = \int_{-2}^0 (0 - 2x) dx + \int_0^2 (2x - 0) dx = \int_{-2}^0 -2x dx + \int_0^2 2x dx = -x^2 \Big|_{-2}^0 + x^2 \Big|_0^2 = 8 \text{ u.a.}$$

Logo, a área sob o gráfico da função $f(x) = 2x$, no intervalo $[-2, 2]$, é igual a 8 unidades de área.

EXEMPLO 1.9.3 Calcule a área da região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

Solução: Nesse exemplo não foi especificado o intervalo em que está situada a região delimitada pelas curvas. Devemos determinar este intervalo encontrando os pontos de interseção das curvas.

Para isso, basta resolver o sistema de equações $\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$. É fácil ver que a solução vem da igualdade $x^2 = \sqrt{x}$ e os valores de x que tornam essa sentença verdadeira são $x = 0$ e $x = 1$. Desse modo, a região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ fica determinada se $x \in [0, 1]$.

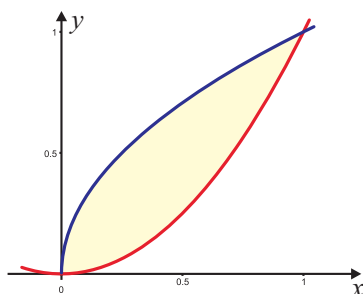


Figura 1.19: Região delimitada por $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

De acordo com a Figura 1.19, podemos observar que a área desejada pode ser obtida através da diferença entre as áreas das regiões situadas sob o gráfico de $y = \sqrt{x}$ e sob o gráfico de $y = x^2$, com $x \in [0, 1]$.

Assim, temos que

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left. \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3 \right|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ u.a.}$$

Portanto, a área desejada é igual a $\frac{1}{3}$ unidades de área.

EXEMPLO 1.9.4 Calcule a área da região hachurada na Figura 1.20.

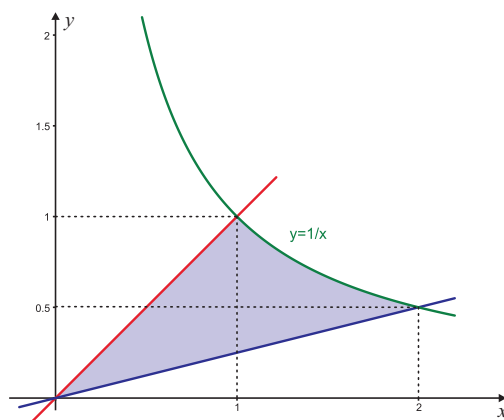


Figura 1.20: Área sob o gráfico de $f(x) = \frac{1}{8}(x^2 - 2x + 8)$

Solução: Primeiro vamos identificar a lei que define as funções lineares presentes no gráfico. Uma reta passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$ e a outra passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(2, \frac{1}{2})$. Portanto

as equações destas retas são $y = x$ e $y = \frac{x}{4}$, respectivamente. Existem várias maneiras de calcular esta área, uma delas está apresentada a seguir:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{4}x \right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}x \right) dx \\
 &= \frac{3}{4} \int_0^1 x dx + \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \frac{1}{4} \int_1^2 x dx \\
 &= \frac{3}{8} x^2 \Big|_0^1 + \left(\ln|x| - \frac{1}{8} x^2 \right) \Big|_1^2 \\
 &= \frac{3}{8} + \ln(2) - \frac{1}{2} - \left(\ln(1) - \frac{1}{8} \right) \\
 &= \frac{4}{8} - \frac{1}{2} + \ln(2) = \ln(2) \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$

Portanto, a área desejada é igual a $\ln(2)$ unidades de área.

EXEMPLO 1.9.5 Achar a área da região delimitada pelos gráficos de $y + x^2 = 6$ e $y + 2x = 3$.

Solução: Inicialmente, encontramos as interseções das curvas:

$$\begin{cases} y = 6 - x^2 \\ y = 3 - 2x \end{cases} \Rightarrow 6 - x^2 = 3 - 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 3.$$

A seguir, fazemos a representação gráfica da área delimitada, conforme ilustra a Figura 1.21.

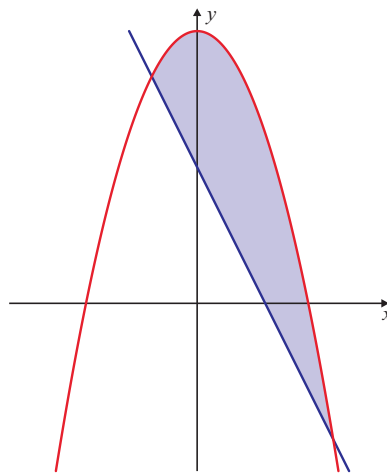


Figura 1.21: Área delimitada por $y + x^2 = 6$ e $y + 2x = 3$.

Podemos então obter a área desejada calculando a área sob a parábola e descontando a área sob a reta, no intervalo de $[-1, 3]$, ou seja,

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^3 [(6 - x^2) - (3 - 2x)] dx \\
 &= \int_{-1}^3 (3 - x^2 + 2x) dx \\
 &= 3x - \frac{x^3}{3} + x^2 \Big|_{-1}^3 \\
 &= 9 - \frac{27}{3} + 9 - \left(-3 + \frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{32}{3} \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$

Portanto, a área desejada é igual a $\frac{32}{3}$ unidades de área.

EXEMPLO 1.9.6 Encontre o valor da área delimitada pelas curvas $y = x^2$, $y = 2 - x^2$ e $y = 2x + 8$.

Solução: Inicialmente vamos fazer uma representação gráfica, conforme ilustra a Figura 1.22. Na sequência, vamos encontrar as interseções das curvas.

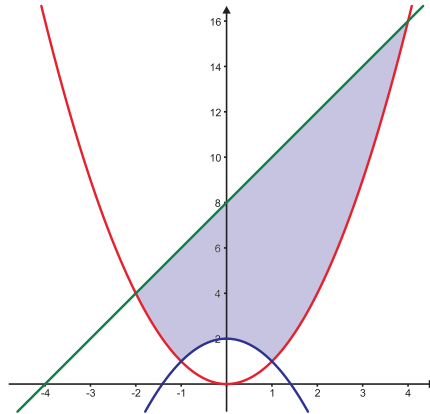


Figura 1.22: Região delimitada por $y = x^2$, $y = 2 - x^2$ e $y = 2x + 8$

Para a reta e a parábola, temos o sistema $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 8 \end{cases}$ cujas soluções são $x = 4$, $y = 16$ e $x = -2$, $y = 4$.

Para as duas parábolas, temos os sistemas $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$ cujas soluções são $x = 1$, $y = 1$ e $x = -1$, $y = 1$.

Como ocorre duas trocas no limitante inferior da região, devemos dividir a área desejada em três partes, a saber:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-2}^{-1} (2x + 8) - (x^2) dx = \int_{-2}^{-1} (2x + 8 - x^2) dx = \frac{8}{3}, \\ A_2 &= \int_{-1}^1 (2x + 8) - (2 - x^2) dx = \int_{-1}^1 (2x + 6 + x^2) dx = \frac{38}{3}, \\ A_3 &= \int_1^4 (2x + 8) - (x^2) dx = 18. \end{aligned}$$

Portanto, a área desejada é dada por

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{8}{3} + \frac{38}{3} + 18 = \frac{100}{3} \text{ u.a.}$$

EXEMPLO 1.9.7 Calcule, de duas formas distintas, a área da região delimitada pelas curvas $x = y + 1$ e $x = y^2 - 1$.

Solução: Iniciamos com a representação geométrica da região, que está esboçada na Figura 1.23. A seguir, devemos encontrar os pontos de interseção entre as curvas, igualando suas equações, obtendo

$$y^2 - 1 = y + 1 \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = -1 \text{ e } y = 2$$

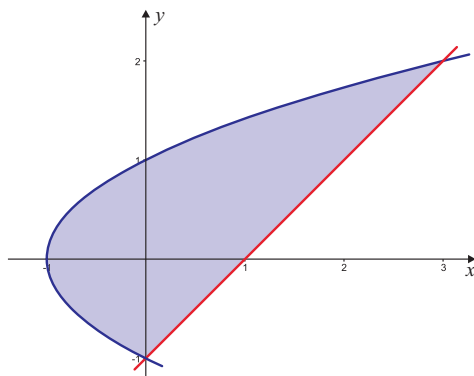


Figura 1.23: Região entre as curvas $x = y + 1$ e $x = y^2 - 1$

e ainda,

$$y = -1 \Rightarrow x = 0 \quad \text{e} \quad y = 2 \Rightarrow x = 3.$$

Uma primeira forma de calcular a área desejada é proceder como nos exemplos anteriores, onde tomamos x como variável de integração. Para isso, devemos isolar y em função de x , obtendo

$$y = x - 1 \quad \text{e} \quad y = \pm\sqrt{x+1}.$$

Note que o sinal positivo na última equação corresponde à porção da parábola situada acima do eixo x e o sinal negativo corresponde a parte situada abaixo do eixo.

Como ocorre troca na limitação inferior da região, devemos tomar uma soma de integrais para calcular sua área, conforme segue

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 \sqrt{x+1} - (-\sqrt{x+1}) dx + \int_0^3 \sqrt{x+1} - (x-1) dx \\ &= \int_{-1}^0 2\sqrt{x+1} dx + \int_0^3 (\sqrt{x+1} - x + 1) dx \\ &= \left. \frac{4}{3} \sqrt{(x+1)^3} \right|_{-1}^0 + \left. \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} - \frac{x^2}{2} + x \right|_0^3 \\ &= \frac{4}{3} + \frac{16}{3} - \frac{9}{2} + 3 - \frac{2}{3} = \frac{9}{2} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Uma segunda maneira de calcular esta área é mantendo y como variável independente e tomar a integração em relação a y . Neste caso, a curva superior está situada à direita, ou seja, é a reta $x = y + 1$ e a curva inferior está situada à esquerda, ou seja, é a parábola $x = y^2 - 1$. Como desta forma não ocorre troca de limitação, podemos calcular a área tomando uma única integral

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^2 (y+1) - (y^2-1) dy \\ &= \int_{-1}^2 (y - y^2 + 2) dy = \left. \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + 2y \right|_{-1}^2 \\ &= 2 - \frac{8}{3} + 4 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 2 \right) = \frac{9}{2} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Observe que a troca da variável de integração resultou numa expressão cuja integral era mais simples de ser resolvida. Desta forma, é importante saber escrever integrais que permitem calcular áreas tomando tanto x quanto y como variáveis de integração, para depois optar por resolver aquela que se mostrar mais simples.

EXEMPLO 1.9.8 Escreva a(s) integral(is) que permite(m) calcular a área da região delimitada **simultaneamente** pelas curvas de equações $y = \sqrt{x-2}$, $x+y=2$ e $x+2y=5$, tomando:

- (a) integração em relação a x . (b) integração em relação a y .

Solução: Iniciamos com a representação geométrica da região, esboçada na Figura 1.24. Note que temos apenas o ramo superior da parábola, pois $y = \sqrt{x-2} \geq 0$.

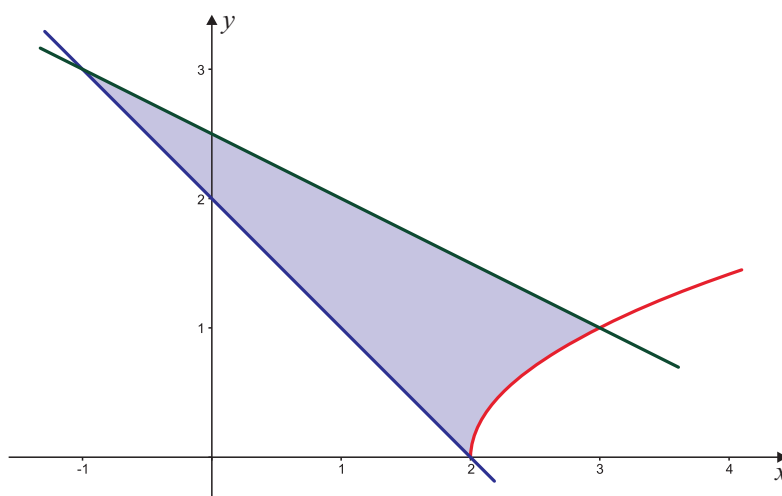


Figura 1.24: Região delimitada por $y = \sqrt{x-2}$, $x+y=2$ e $x+2y=5$

O próximo passo é obter as interseções entre as curvas.

Entre as duas retas, temos o sistema $\begin{cases} x+y=2 \\ x+2y=5 \end{cases}$, cuja solução é $x=-1$, $y=3$.

Entre a parábola e uma das retas, temos o sistema $\begin{cases} y = \sqrt{x-2} \\ x+y=2 \end{cases}$, cuja solução é $x=2$, $y=0$.

E entre a outra reta e a parábola, temos o sistema $\begin{cases} y = \sqrt{x-2} \\ x+2y=5 \end{cases}$, cuja solução é $x=3$, $y=1$.

Agora podemos montar as integrais que permitem calcular a área desejada.

(a) Tomando integração em relação a x , devemos isolar y em função de x , obtendo $y = \frac{5-x}{2}$ para a reta superior, $y = 2-x$ para a reta inferior e $y = \sqrt{x-2}$ para a parábola, que também é um limitante inferior. Como ocorre troca na limitação inferior em $x=2$, precisamos de duas integrais.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^2 \left(\frac{5-x}{2} \right) - (2-x) dx + \int_2^3 \left(\frac{5-x}{2} \right) - (\sqrt{x-2}) dx \\ &= \int_{-1}^2 \frac{1+x}{2} dx + \int_2^3 \left(\frac{5-x}{2} - \sqrt{x-2} \right) dx. \end{aligned}$$

(b) Tomando integração em relação a y , devemos isolar x em função de y , obtendo $x = 5-2y$ para a reta superior, $x = 2-y$ para a reta inferior e $x = y^2 + 2$ para a parábola, que neste

caso também é um limitante superior. Como ocorre troca na limitação superior em $y = 1$, necessitamos também de duas integrais.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (y^2 + 2) - (2 - y) dy + \int_1^3 (5 - 2y) - (2 - y) dy \\ &= \int_0^1 (y^2 + y) dy + \int_1^3 (3 - y) dy. \end{aligned}$$

Neste exemplo, as duas expressões obtidas envolvem soma de integrais. Mesmo assim, é fácil notar que a expressão na qual y é a variável independente é a mais simples de ser resolvida. Assim, se o enunciado solicitasse que fosse calculado o valor numérico da área em questão, deveríamos optar por resolver esta expressão.

1.9.9 Área delimitada por curvas escritas em equações paramétricas

Seja $y = f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$, cujo gráfico delimita uma região R . A seguir, vamos obter uma nova expressão para a área da região R , utilizando as equações paramétricas $x = \phi(t)$ e $y = \psi(t)$, com $t \in [\alpha, \beta]$, da curva descrita por f . Para isto, basta lembrar que a área de uma região retangular é dada por

$$A = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx.$$

Agora, fazendo a substituição $y = \psi(t)$ e $dx = \phi'(t)dt$ e supondo que $a = \phi(\alpha)$ e $b = \phi(\beta)$ obtemos a expressão para o cálculo de área em coordenadas paramétricas:

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \phi'(t) dt.$$

EXEMPLO 1.9.10 Encontre a área delimitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Solução: As equações paramétricas da elipse dada são

$$x = \phi(t) = a \cos t \quad \text{e} \quad y = \psi(t) = b \sin t.$$

Desse modo, temos que

$$dx = \phi'(t) dt = -a \sin t dt$$

Vamos agora determinar os valores de α e β . Utilizando a quarta parte da área desejada, temos que x varia de 0 até a . Assim, podemos fazer $x = \phi(\alpha) = 0$ e $x = \phi(\beta) = a$. Logo

$$\begin{aligned} \phi(\alpha) = 0 &\Rightarrow a \cos \alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \phi(\beta) = a &\Rightarrow a \cos \beta = a \Rightarrow \cos \beta = 1 \Rightarrow \beta = 0. \end{aligned}$$

Agora, para obter a área total interna à elipse basta utilizar a simetria da região e obter que

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = -4ab \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t dt \\ &= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt = 2ab \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2ab \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi - 0 \right) = ab\pi. \end{aligned}$$

EXEMPLO 1.9.11 Calcular a área da região que é interior a elipse $E_1 = \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}$ e exterior a elipse $E_2 = \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$.

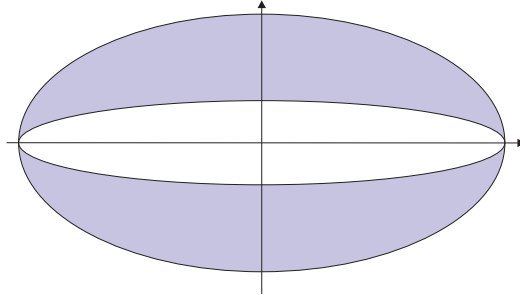


Figura 1.25: Região entre as elipses.

Solução: A região cuja área desejamos calcular pode ser vista na Figura 1.25. Novamente, podemos utilizar argumentos de simetria e calcular a área da região situada no primeiro quadrante do plano xy e multiplicar o resultado por quatro. Neste quadrante, temos que $x \in [0, 2]$. No entanto

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow 2 \cos t = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = 2 &\Rightarrow 2 \cos t = 2 \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow t = 0, \end{aligned}$$

logo, para descrever a região que nos interessa, em coordenadas paramétricas, devemos integrar de $t = \frac{\pi}{2}$ até $t = 0$. Assim, notando que neste exemplo devemos tomar a diferença entre as áreas sob as elipses E_1 e E_2 , obtemos

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 [4 \sin t (-2 \sin t) dt - 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin t (-2 \sin t) dt] \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-32 \sin^2 t + 8 \sin^2 t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -24 \sin^2 t dt \\ &= 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt = \left(12t - \frac{12}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6\pi \text{ u.a.} \end{aligned}$$

1.9.12 Área de um setor curvilíneo em coordenadas polares

Seja $r = f(\theta)$ uma função contínua que descreve uma curva em coordenadas polares, no intervalo $[\alpha, \beta]$. Como nosso interesse é determinar a área da região delimitada por $r = f(\theta)$ vamos tomar uma partição do intervalo $[\alpha, \beta]$, conforme ilustra a Figura 1.26.

Seja $X = \{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n\}$ uma partição de $[\alpha, \beta]$ em que

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \dots < \theta_n = \beta.$$

Sejam $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3, \dots, \Delta\theta_n$ os subarcos da partição X e seja r_i o comprimento do raio correspondente a um ângulo $\xi_i \in \Delta\theta_i$, isto é, $\theta_{i-1} \leq \xi_i \leq \theta_i$.

A área do setor circular de raio r_i e arco $\Delta\theta_i$ é dada por

$$A_i = \frac{1}{2} (r_i)^2 \Delta\theta_i$$

e a área aproximada da região delimitada por $r = f(\theta)$ é dada por

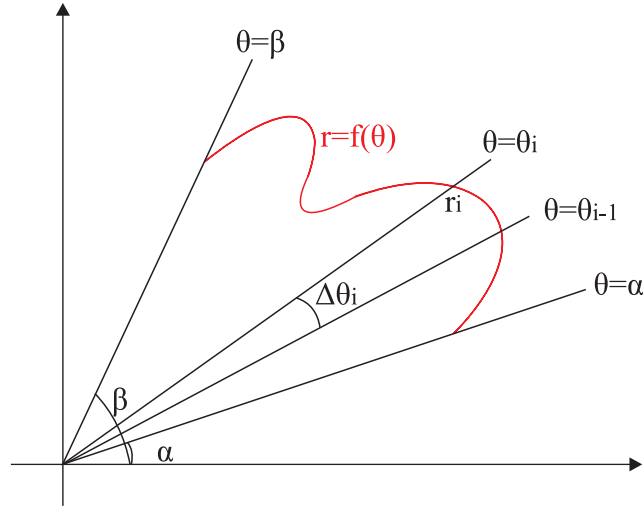


Figura 1.26: Região Polar, com $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ e $r_i = f(\theta_i)$.

$$A_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (r_i)^2 \Delta\theta_i.$$

Seja $|\Delta\theta|$ o subintervalo de maior diâmetro da partição X . Então, se n tender a infinito teremos que $|\Delta\theta|$ tenderá a zero. Desse modo poderemos escrever

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{|\Delta\theta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (r_i)^2 \Delta\theta_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$$

ou seja,

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta, \quad (1.9.1)$$

que nos fornece uma expressão para o cálculo de áreas delimitadas por curvas em coordenadas polares.

EXEMPLO 1.9.13 *Determine a área da região que é simultaneamente exterior à cardióide $r = 1 - \cos\theta$ e interior ao círculo $r = 1$.*

Solução: A Figura 1.27 ilustra a região considerada.

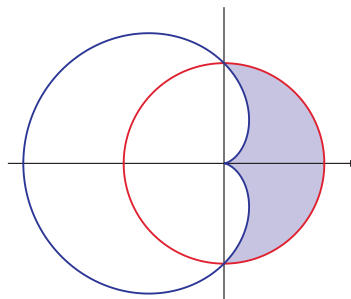


Figura 1.27: Região delimitada por um cardióide e por uma circunferência.

Como esta região é simétrica em relação ao eixo x , podemos calcular o dobro da área da porção situada no primeiro quadrante do plano xy . Neste quadrante, temos que o ângulo polar θ varia no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ainda, devemos notar que a área desejada é dada, em

coordenadas polares, pela diferença entre as áreas da circunferência e da cardióide. Assim, usando a expressão 1.9.1, obtemos

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1^2 d\theta - \frac{2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos \theta)^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos \theta - \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos \theta - \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) d\theta = 2 \sin \theta - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Portanto, a área desejada é igual $2 - \frac{\pi}{4}$ unidades de área.

EXEMPLO 1.9.14 *Escreva, em coordenadas polares, a integral que calcula a área da região simultaneamente exterior à circunferência $r = 1$ e interior a rosácea $r = 2 \cos(2\theta)$.*

Solução: A Figura 1.28 ilustra a região desejada. Para determinar os pontos de interseção das duas curvas fazemos

$$2 \cos(2\theta) = 1 \Rightarrow \cos 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \quad (\text{no } 1^\circ \text{ quadrante}).$$

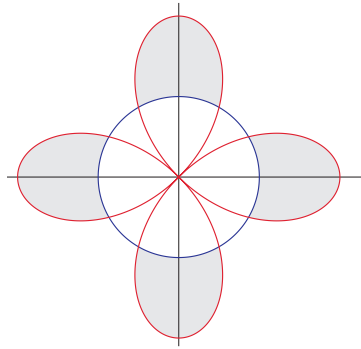


Figura 1.28: Região delimitada por uma rosácea e uma circunferência

Vamos calcular a área da região delimitada com θ no intervalo de $[0, \frac{\pi}{6}]$ e multiplicar por 8, já que as demais áreas são simétricas. Utilizando a Fórmula 1.9.1 e verificando que a área desejada é igual a área da rosácea menos a área da circunferência, obtemos

$$A = 8 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} [(2 \cos(2\theta))^2 - (1)^2] d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (4 \cos^2(2\theta) - 1) d\theta.$$

EXEMPLO 1.9.15 *Escreva a integral que permite calcular a área da região que é simultaneamente interior as curvas $r = 5 \cos \theta$ e $r = 5\sqrt{3} \sin \theta$.*

Solução: Inicialmente, devemos identificar as curvas dadas. Utilizando as relações polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ e $r^2 = x^2 + y^2$, obtemos que

$$\begin{aligned} r = 5 \cos \theta &\Rightarrow r^2 = 5r \cos \theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 5x \Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4} \\ r = 5\sqrt{3} \sin \theta &\Rightarrow r^2 = 5\sqrt{3}r \sin \theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 5\sqrt{3}y \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{75}{4} \end{aligned}$$

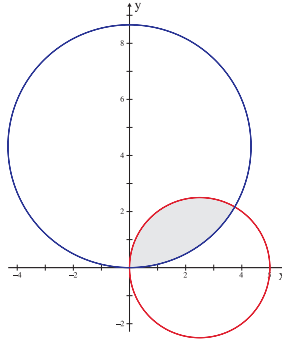


Figura 1.29: Região situada entre circunferências

e assim, vemos que a região que nos interessa está situada no interior de duas circunferências, de centros deslocados da origem, conforme ilustra a Figura 1.29.

A seguir, devemos determinar a interseção entre as curvas

$$5\sqrt{3}\sin\theta = 5\cos\theta \Rightarrow \sqrt{3}\tan\theta = 1 \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}.$$

Finalmente, observamos que ao descrever a região desejada, devemos considerar $r = 5\sqrt{3}\sin\theta$ para $\theta \in [0, \frac{\pi}{6}]$ e $r = 5\cos\theta$ para $\theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$. Portanto, como ocorre troca de limitação para o raio polar, necessitamos de uma soma de integrais para calcular a área desejada

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (5\sqrt{3}\sin\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (5\cos\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} 75 \sin^2\theta d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 25 \cos^2\theta d\theta. \end{aligned}$$

1.10 Comprimento de Arco

1.10.1 Comprimento de Arco em Coordenadas Cartesianas

Seja $y = f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$, cujo gráfico descreve o arco $\widehat{AB}$, conforme ilustra a Figura 1.30.

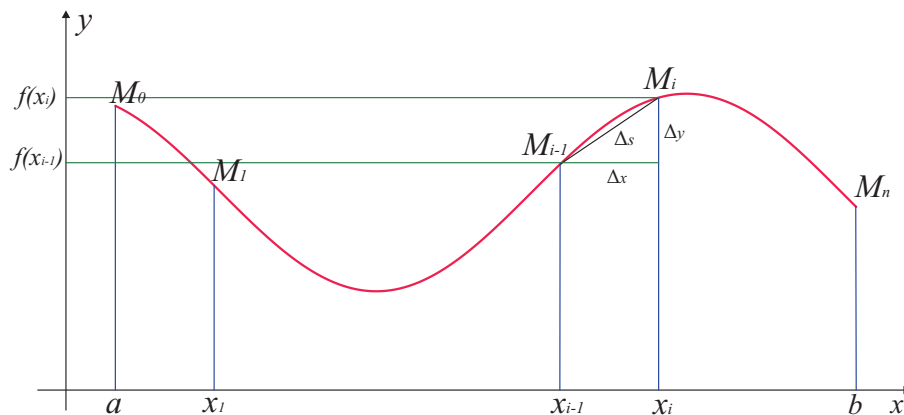


Figura 1.30: Comprimento de arco

Vamos dividir o arco $\widehat{AB}$ em subarcos por meio da partição

$$X = \{M_0, M_1, M_2, \dots, M_n\}$$

em que

$$A = M_0 < M_1 < M_2 < \dots < M_n = B$$

cujas abscissas são

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Tracemos as cordas

$$\overline{M_0M_1}, \overline{M_1M_2}, \dots, \overline{M_{i-1}M_i}, \dots, \overline{M_{n-1}M_n}$$

e designemos os seus comprimentos por

$$\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_i, \dots, \Delta S_n.$$

Obtém-se então a linha poligonal

$$AM_0M_1 \dots M_{n-1}B$$

ao longo do arco $\widehat{AB}$ cujo comprimento aproximado é dado por

$$l_n = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \dots + \Delta S_i + \dots + \Delta S_n$$

ou seja,

$$l_n = \sum_{i=1}^n \Delta S_i. \quad (I)$$

Mas ΔS_i é a hipotenusa do triângulo de lados Δx_i e Δy_i , de modo que podemos escrever

$$(\Delta S_i)^2 = (\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2,$$

dividindo tudo por Δx_i obtemos

$$\left(\frac{\Delta S_i}{\Delta x_i}\right)^2 = \left(\frac{\Delta x_i}{\Delta x_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2$$

ou seja,

$$\frac{\Delta S_i}{\Delta x_i} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$$

e assim

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i. \quad (II)$$

Agora, como

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \text{e} \quad \Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

segue que

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

e pelo teorema de Lagrange, sabemos que existe $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i).$$

Portanto, obtemos que

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(\xi_i). \quad (III)$$

Substituindo (II) em (I) resulta que

$$l_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i \quad (IV)$$

e substituindo (III) em (IV) resulta que

$$l_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i.$$

Seja $|\Delta x|$ o intervalo de maior diâmetro de cada partição de $\widehat{AB}$. Então, se $n \rightarrow \infty$, segue que $|\Delta x| \rightarrow 0$ e $(\xi_i) \rightarrow x$. Assim:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{|\Delta x| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Portanto, o comprimento do arco $\widehat{AB}$ no intervalo $[a, b]$ é dado por

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (1.10.1)$$

EXEMPLO 1.10.2 Determinar o comprimento do arco da curva descrita por $y = \sqrt{x}$, com x no intervalo $[0, 4]$.

Solução: A Figura 1.31 ilustra o comprimento de arco considerado.

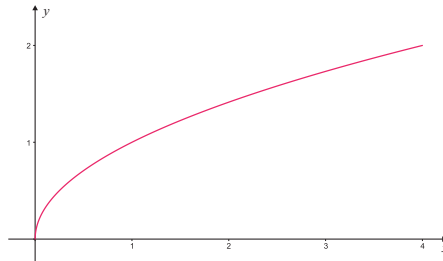


Figura 1.31: Arco de $f(x) = \sqrt{x}$

Como $y = f(x) = \sqrt{x}$ temos que $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Aplicando a fórmula 1.10.1, obtemos

$$\begin{aligned} l &= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx \\ &= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx = \int_0^4 \sqrt{\frac{4x+1}{4x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 \frac{\sqrt{4x+1}}{\sqrt{x}} dx. \end{aligned}$$

Note que esta última integral é imprópria, pois o integrando não é contínuo em $x = 0$. No entanto, neste exemplo não será preciso aplicar limites para resolver a integral, pois podemos utilizar uma mudança de variáveis. Fazendo a substituição $t^2 = x$, encontramos $dx = 2t dt$ e como $x \in [0, 4]$, obtemos que $t \in [0, 2]$. Logo

$$l = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{\sqrt{4t^2+1}}{\sqrt{t^2}} 2t dt = \int_0^2 \sqrt{4t^2+1} dt.$$

Como o novo integrando agora é contínuo no intervalo de integração, podemos utilizar o teorema fundamental do cálculo e uma tabela de integrais para encontrar que

$$\begin{aligned} l &= \left. \frac{1}{2}t\sqrt{4t^2+1} + \frac{1}{4}\ln\left(2t + \sqrt{4t^2+1}\right) \right|_0^2 \\ &= \sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln(4 + \sqrt{17}) \text{ u.c.} \end{aligned}$$

1.10.3 Comprimento de um arco em coordenadas paramétricas

Sejam $x = \phi(t)$ e $y = \psi(t)$, com $t \in [\alpha, \beta]$, as equações paramétricas da curva descrita por $y = f(x)$. Então, como $dx = \phi'(t) dt$ e $dy = \psi'(t) dt$, podemos escrever

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t) dt}{\phi'(t) dt} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}.$$

Substituindo na fórmula 1.10.1 obtemos

$$\begin{aligned} l &= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \frac{(\psi'(t))^2}{(\phi'(t))^2}} \phi'(t) dt \\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{\frac{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}{\phi'(t)^2}} \phi'(t) dt \\ &= \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}}{\phi'(t)} \phi'(t) dt \\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

Portanto, o comprimento de arco em coordenadas paramétricas é dado por

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt. \quad (1.10.2)$$

EXEMPLO 1.10.4 *Mostre, usando coordenadas paramétricas, que o comprimento de uma circunferência de raio r é igual a $2\pi r$.*

Solução: Em coordenadas paramétricas, a circunferência é descrita por

$$\begin{cases} x(t) = r \cos t \\ y(t) = r \sin t \end{cases} \text{ com } t \in [0, 2\pi].$$

O seu comprimento de arco, em paramétricas, de acordo com 1.10.2 é dado por

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = \int_0^{2\pi} r dt = rt \Big|_0^{2\pi} = 2\pi r.$$

EXEMPLO 1.10.5 *Calcule o comprimento de arco da astróide descrita por*

$$\phi(t) = 3 \cos^3 t, \quad \psi(t) = 3 \sin^3 t \quad \text{com } t \in [0, 2\pi].$$

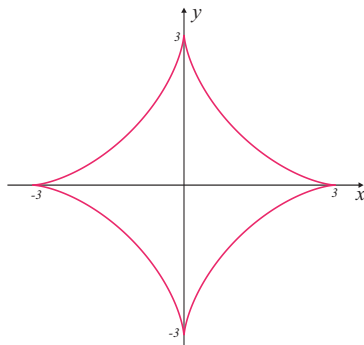


Figura 1.32: Astróide

Solução: A curva pode ser visualizada na Figura 1.32.

Como há simetria, podemos encontrar o comprimento do subarco situado no primeiro quadrante, tomando $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e multiplicar o resultado obtido por quatro.

Como $\phi'(t) = -9 \cos^2 t \sin t$ e $\psi'(t) = 9 \sin^2 t \cos t$, substituindo na fórmula 1.10.2, obtemos

$$\begin{aligned} l &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-9 \cos^2 t \sin t)^2 + (9 \sin^2 t \cos t)^2} dt = 4 \cdot 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} dt \\ &= 36 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = 36 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = 18 \sin^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 18 \text{ u.c.} \end{aligned}$$

Portanto, o comprimento de arco da astróide dada é 18 unidades de comprimento.

EXEMPLO 1.10.6 As equações paramétricas do movimento de uma partícula no plano são dadas por $x = 3t$ e $y = 2t^{\frac{3}{2}}$. Qual será a distância percorrida pela partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = 1$?

Solução: A distância percorrida pela partícula é igual ao comprimento de arco da curva que descreve a sua trajetória. Aplicando a fórmula 1.10.2 para

$$x = \phi(t) = 3t \quad \text{e} \quad y = \psi(t) = 2t^{\frac{3}{2}}$$

com $t \in [0, 1]$, obtemos

$$\begin{aligned} l &= \int_0^1 \sqrt{3^2 + (3t^{\frac{1}{2}})^2} dt = \int_0^1 \sqrt{9 + 9t} dt \\ &= 3 \int_0^1 \sqrt{1 + t} dt = 2(1 + t)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 \\ &= 2(2)^{\frac{3}{2}} - 2(1)^{\frac{3}{2}} = 4\sqrt{2} - 2 \text{ u.c.} \end{aligned}$$

Portanto, a distância percorrida pela partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = 1$ é igual a $4\sqrt{2} - 2$ unidades de comprimento.

1.10.7 Comprimento de arco em coordenadas polares

Sejam $\phi(\theta) = r \cos \theta$ e $\psi(\theta) = r \sin \theta$ as coordenadas polares da curva $r = f(\theta)$, com $\theta \in [\alpha, \beta]$. Substituindo r por $f(\theta)$ nas equações paramétricas vem

$$\phi(\theta) = f(\theta) \cos \theta \quad \text{e} \quad \psi(\theta) = f(\theta) \sin \theta$$

e assim

$$\begin{aligned}\phi'(\theta) &= f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta = r' \cos \theta - r \sin \theta \\ \psi'(\theta) &= f'(\theta) \operatorname{sen} \theta + f(\theta) \cos \theta = r' \operatorname{sen} \theta + r \cos \theta.\end{aligned}$$

Agora

$$(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 = (r' \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta)^2 + (r' \operatorname{sen} \theta + r \cos \theta)^2$$

que após aplicar os produtos notáveis e simplificar, resulta em

$$(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 = (r')^2 + r^2.$$

Substituindo na equação 1.10.2, obtemos a fórmula para o cálculo do comprimento de arco em coordenadas polares, que é dada por

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\theta. \quad (1.10.3)$$

EXEMPLO 1.10.8 Encontrar o comprimento de arco do cardióide $r = a(1 + \cos \theta)$.

Solução: Por simetria, podemos determinar o comprimento do arco situado no primeiro e segundo quadrante e multiplicar por dois. Como $r = a(1 + \cos \theta)$ tem-se $r' = -a \sin \theta$. Substituindo na fórmula 1.10.3 vem

$$\begin{aligned}l &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{(-a \sin \theta)^2 + (a(1 + \cos \theta))^2} d\theta \\ &= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 \theta + 1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta} d\theta \\ &= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2 \cos \theta} d\theta \\ &= 2a \cdot 2 \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 4a \cdot 2 \sin \frac{1}{2} \theta \Big|_0^{\pi} = 8a \text{ u.c.}\end{aligned}$$

Logo, o comprimento de arco do cardióide $r = a(1 + \cos \theta)$ é igual a $8a \text{ u.c.}$

EXEMPLO 1.10.9 Determine o comprimento de arco da porção da espiral $r = 2e^{2\theta}$ (com $\theta \geq 0$) que está situada dentro da circunferência $r = a$, onde $a > 2$.

Solução: Inicialmente, vamos obter os limitantes de integração. Na interseção da espiral com a circunferência, temos que

$$2e^{2\theta} = a \Rightarrow e^{2\theta} = \frac{a}{2} \Rightarrow 2\theta = \ln \frac{a}{2} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2} \ln \frac{a}{2}$$

Portanto, a porção da espiral que nos interessa é descrita por $\theta \in [0, \frac{1}{2} \ln \frac{a}{2}]$. Ainda, como temos $r = 2e^{2\theta}$ segue que $r' = 4e^{2\theta}$ e assim, substituindo na expressão 1.10.3 obtemos o comprimento em coordenada polares

$$\begin{aligned}l &= \int_0^{\frac{1}{2} \ln \frac{a}{2}} \sqrt{(4e^{2\theta})^2 + (2e^{2\theta})^2} d\theta = \int_0^{\frac{1}{2} \ln \frac{a}{2}} \sqrt{20e^{4\theta}} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{1}{2} \ln \frac{a}{2}} 2\sqrt{5}e^{2\theta} d\theta = \sqrt{5}e^{2\theta} \Big|_0^{\frac{1}{2} \ln \frac{a}{2}} = \sqrt{5} \left(\frac{a}{2} - 1 \right) \text{ u.c.}\end{aligned}$$

1.11 Volume de um Sólido de Revolução

Considere o sólido T gerado pela rotação da curva $y = f(x)$ em torno do eixo x , no intervalo $[a, b]$ como na Figura 1.33

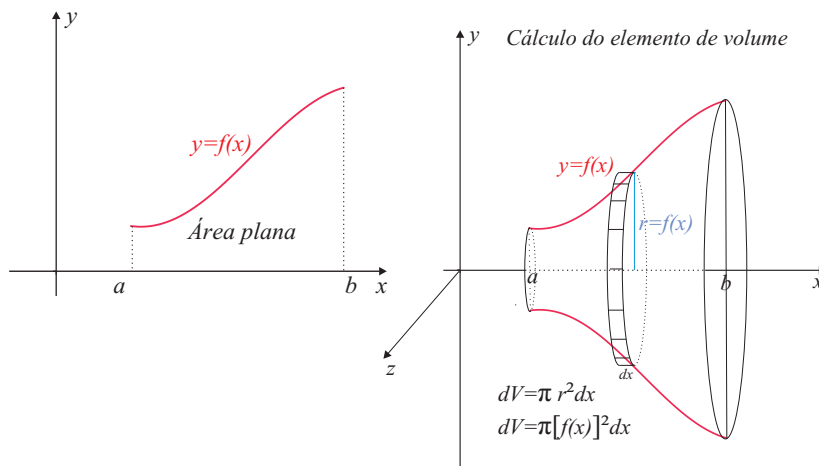


Figura 1.33: Rotação de uma curva em torno do eixo x

Seja $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$ e sejam $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ os subintervalos da partição. Se $\xi_i \in \Delta x_i$, então o volume do cilindro de raio $f(\xi_i)$ e altura Δx_i é dado por

$$V_i = \pi [f(\xi_i)]^2 \Delta x_i$$

e o volume aproximado do sólido será dado pela soma dos volumes dos n – cilindros, isto é,

$$V_n = \sum_{i=1}^n \pi [f(\xi_i)]^2 \Delta x_i.$$

Seja $|\Delta\theta|$ o subintervalo de maior diâmetro, então se $n \rightarrow \infty$, segue que $|\Delta\theta| \rightarrow 0$, $\xi_i \rightarrow x$ e o volume V do sólido T será dado por

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{|\Delta\theta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi [f(\xi_i)]^2 \Delta x_i = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Portanto, o volume de um sólido de revolução (em torno do eixo x) é calculado pela expressão

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx. \quad (1.11.1)$$

EXEMPLO 1.11.1 *A fim de que não haja desperdício de ração e para que seus animais estejam bem nutridos, um fazendeiro construiu um recipiente com uma pequena abertura na parte inferior, que permite a reposição automática da alimentação, conforme mostra a Figura 1.34. Determine, usando sólidos de revolução, a capacidade total de armazenagem do recipiente, em metros cúbicos.*

Solução: Vamos encontrar o volume do cilindro (V_1) e do cone (V_2 .) Assim, o volume total será dado por $V = V_1 + V_2$.

Para determinar V_1 vamos rotacionar a reta $y = 2$ em torno do eixo x (Figura 1.35).

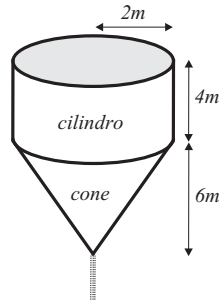


Figura 1.34: Forma do recipiente.

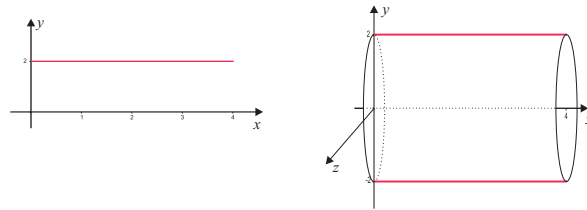


Figura 1.35: Cilindro de Revolução

Aplicando a expressão 1.11.1, obtemos

$$V_1 = \pi \int_0^4 2^2 dx = 4\pi \cdot 4 = 16\pi.$$

Já para o cone, como temos um raio $r = 2$ e altura $h = 6$, obtemos a reta $y = \frac{1}{3}x$ para rotacionar em torno do eixo x (Figura 1.36).

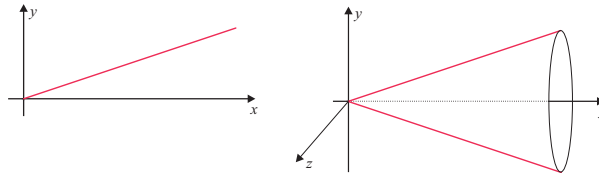


Figura 1.36: Cone de Revolução

Aplicando a expressão 1.11.1 mais uma vez, obtemos

$$V_2 = \pi \int_0^6 \frac{1}{9} x^2 dx = \frac{1}{27} \pi x^3 \Big|_0^6 = \frac{6^3 \pi}{27} = 8\pi.$$

Portanto o volume desejado é dado por $V = 16\pi + 8\pi = 24\pi$ u.v.

EXEMPLO 1.11.2 Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da curva $f(x) = x^3$, com x no intervalo $[1, 2]$, em torno do eixo x .

Solução: O sólido desejado pode ser visualizado na Figura 1.37.

E o volume desejado é dado por

$$V = \pi \int_1^2 (x^3)^2 dx = \pi \int_1^2 x^6 dx = \frac{\pi x^7}{7} \Big|_1^2 = \frac{127\pi}{7} \text{ u.v.}$$

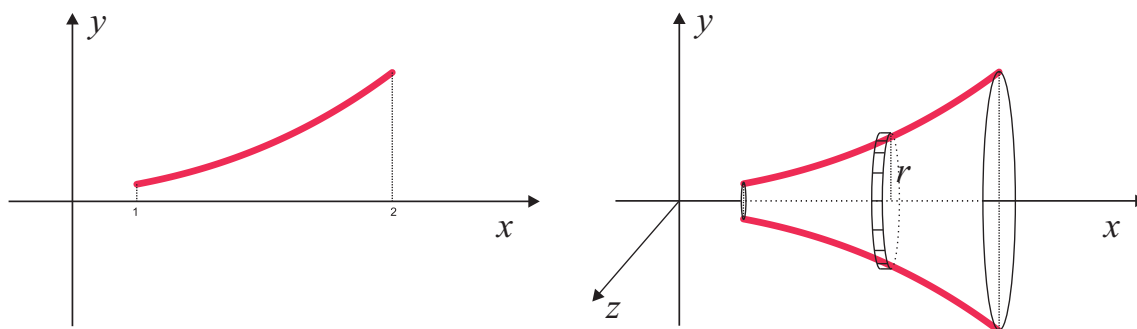


Figura 1.37: Sólido gerado pela rotação de $y = x^3$ em torno do eixo x

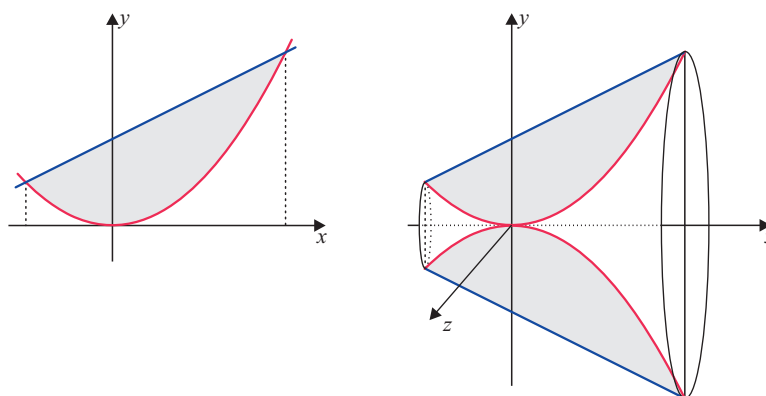


Figura 1.38: Sólido gerado pela rotação de uma região plana em torno do eixo x

EXEMPLO 1.11.3 *Determinar o volume do sólido gerado pela revolução da região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = x + 2$ em torno do eixo x (veja a Figura 1.38).*

Solução: Nesse exemplo não foi especificado o intervalo em que está situada a região delimitada pelas curvas. Para determinar este intervalo, devemos encontrar os pontos de interseção das curvas dadas. Igualando suas equações, obtemos

$$x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ e } x = 2.$$

A Figura 1.38 indica que o sólido desejado está situado entre duas superfícies. Assim, seu volume é dado pela diferença entre os volumes externo e interno. De acordo com 1.11.1, temos que

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^2 (x+2)^2 dx - \pi \int_{-1}^2 (x^2)^2 dx \\ &= \pi \int_{-1}^2 (x^2 + 4x + 4 - x^4) dx \\ &= \pi \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x - \frac{1}{5}x^5 \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{72}{5}\pi \text{ u.v.} \end{aligned}$$

EXEMPLO 1.11.4 *Encontre o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da curva $(x-2)^2 + y^2 = 1$ em torno do eixo y .*

Solução: Observe na Figura 1.39 a circunferência geratriz do sólido.

Isolando a variável x na equação da circunferência, obtemos

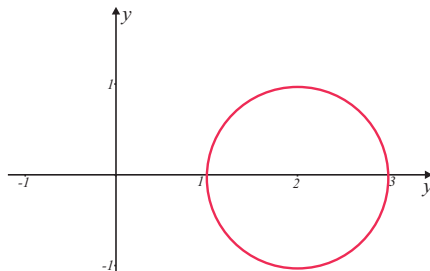


Figura 1.39: circunferência $(x - 2)^2 + y^2 = 1$

$$(x - 2)^2 = 1 - y^2 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \pm \sqrt{1 - y^2}$$

Observe que o volume do sólido desejado é formado pelo volume obtido pela rotação da curva $x = 2 + \sqrt{1 - y^2}$ em torno do eixo y , menos o volume obtido pela rotação da curva $x = 2 - \sqrt{1 - y^2}$. Portanto, o volume desejado é igual a

$$V = V_1 - V_2,$$

onde

$$V_1 = \pi \int_{-1}^1 (2 + \sqrt{1 - y^2})^2 dy$$

e

$$V_2 = \pi \int_{-1}^1 (2 - \sqrt{1 - y^2})^2 dy$$

ou seja,

$$V = \pi \int_{-1}^1 (2 + \sqrt{1 - y^2})^2 - (2 - \sqrt{1 - y^2})^2 dy = \pi \int_{-1}^1 8\sqrt{1 - y^2} dy.$$

Para resolver esta integral, utilizamos a substituição trigonométrica $y = \sin \theta$, com $dy = \cos \theta d\theta$ e assim, obtemos que

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 8\sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cos \theta d\theta \\ &= 8\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = 4\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= 4\theta + 2\pi \sin(2\theta) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi. \end{aligned}$$

Portanto, o volume desejado é igual a 4π unidades de volume.

1.11.5 Rotação em torno de uma Reta Paralela a um Eixo Coordenado

Até agora consideremos somente sólidos gerados por rotações de curvas em torno de um dos eixos coordenados, onde $y = f(x)$ ou $x = g(y)$ eram os raios dos cilindros de revolução (elementos de volume).

No caso mais geral, podemos rotacionar a curva $y = f(x)$, com $x \in [a, b]$, em torno da reta $y = c$, de acordo com a Figura a 1.40.

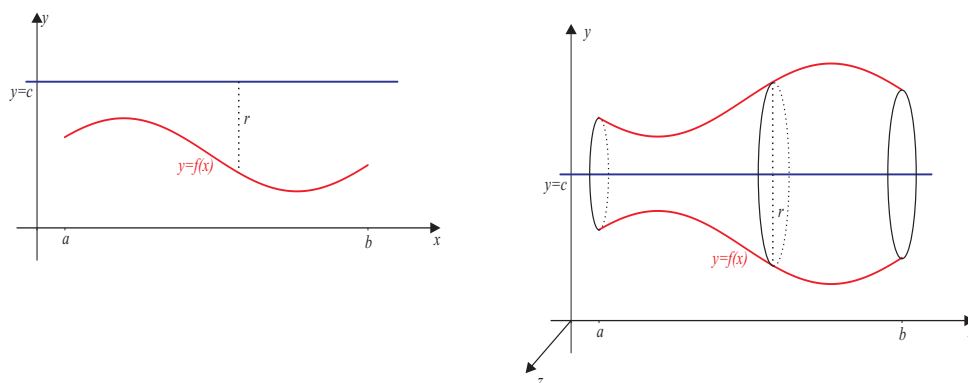


Figura 1.40: Sólido obtido pela rotação $y = f(x)$ em torno da reta $y = c$

Neste caso, o raio do cilindro infinitesimal é igual à distância entre a curva e o eixo de revolução, ou seja, é dado por

$$r = c - f(x)$$

e o volume do sólido resultante é dado por

$$V = \pi \int_a^b (c - f(x))^2 dx.$$

De forma semelhante, se a curva $x = g(y)$, com $y \in [a, b]$, for rotacionada em torno da reta $x = c$, o volume do sólido resultante é dado por

$$V = \pi \int_a^b (c - g(y))^2 dy.$$

Note que quando $c = 0$ temos novamente a revolução em torno dos eixos coordenados.

EXEMPLO 1.11.6 Calcule o volume do sólido obtido quando a porção da parábola $y = 2 - x^2$ que está situada acima do eixo x é rotacionada em torno da reta $y = 3$.

Solução: Na Figura 1.41 podemos observar a curva geratriz, o eixo de revolução e o sólido de revolução obtido.

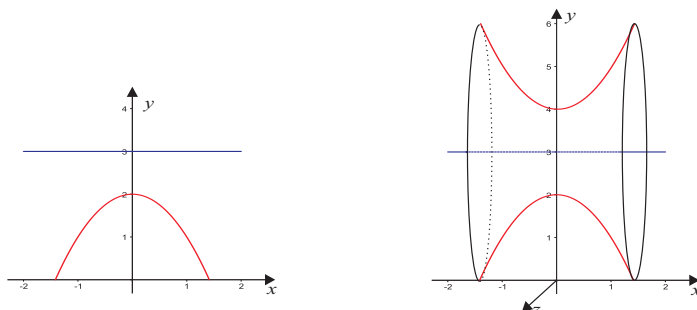


Figura 1.41: Curva geratriz e sólido de revolução obtido pela rotação de $y = 2 - x^2$ em torno de $y = 3$.

Como rotacionamos em torno de uma reta paralela ao eixo das abscissas, devemos efetuar a integração em relação a x . O intervalo de integração, definido aqui pela parte da parábola situada acima do eixo x , é descrito por $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Já o raio de rotação, dado pela distância entre a curva e o eixo de rotação, é dado por

$$r = 3 - (2 - x^2) = 1 + x^2$$

e assim, o volume desejado é dado por

$$V = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (1 + x^2)^2 dx = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (1 + 2x^2 + x^4) dx = \frac{94}{15} \sqrt{2} \pi.$$

EXEMPLO 1.11.7 *Escreva as integrais que permitem calcular o volume do sólido obtido quando a região situada entre as curvas $y = x^2$ e $y = 2x$ é rotacionada em torno:*

- (a) do eixo y ; (b) da reta $y = 5$; (c) da reta $x = 2$.

Solução: A região a ser rotacionada está representada na Figura 1.42.

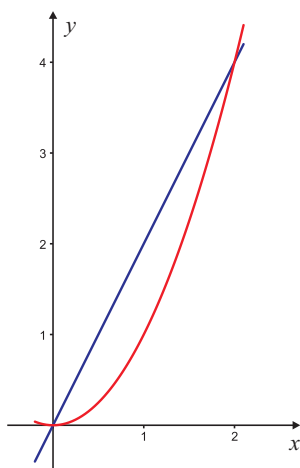


Figura 1.42: Região a ser rotacionada

As interseções entre as curvas são dadas por

$$x^2 = 2x \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2 \Rightarrow y = 0, y = 4.$$

No item (a), rotacionamos em torno do eixo das ordenadas e, por isso, devemos tomar a integração em relação a y . Como o sólido resultante será vazado, devemos tomar a diferença entre os volumes dos sólidos externo e interno.

O raio externo, definido pela parábola, é dado por $x = \sqrt{y}$. O raio interno é definido pela reta e é dado por $x = \frac{y}{2}$. Assim, o volume desejado é calculado pela integral

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2 dy - \pi \int_0^4 \left(\frac{y}{2}\right)^2 dy = \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4}\right) dy.$$

Já no item (b), como rotacionamos em torno de uma reta paralela ao eixo das abscissas, devemos tomar a integração em relação a x . Novamente o sólido resultante será vazado e devemos tomar a diferença entre os volumes dos sólidos externo e interno.

O raio externo, definido pela distância entre a parábola e o eixo de rotação, é dado por $r = 5 - x^2$ e o raio interno, definido pela distância entre a reta e o eixo de rotação, é dado

por $r = 5 - 2x$. O volume do novo sólido é calculado pela integral

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (5 - x^2)^2 dx - \pi \int_0^2 (5 - 2x)^2 dx \\ &= \pi \int_0^2 (25 - 10x^2 + x^4) - (25 - 20x + 4x^2) dx \\ &= \pi \int_0^2 (-14x^2 + x^4 + 20x) dx. \end{aligned}$$

Por fim, como no item (c) rotacionamos em torno de uma reta paralela ao eixo das ordenadas, devemos tomar a integração em relação a y . Mais uma vez devemos tomar a diferença entre os volumes dos sólidos externo e interno.

O raio externo, neste caso, é definido pela reta e é dado por $r = 2 - \frac{y}{2}$ e o raio interno, agora definido pela parábola, é dado por $r = 2 - \sqrt{y}$.

Assim, o último volume desejado é calculado pela integral

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 (2 - \frac{y}{2})^2 dy - \pi \int_0^4 (2 - \sqrt{y})^2 dy \\ &= \pi \int_0^4 (4 - 2y + \frac{y^2}{4}) - (4 - 4\sqrt{y} + y) dy \\ &= \pi \int_0^4 (-3y + \frac{y^2}{4} + 4\sqrt{y}) dy. \end{aligned}$$

1.12 Exercícios Gerais

1. Dadas as funções $f, g : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x^2 + x$ encontre $\overline{S}(f, P)$ e $\overline{S}(g, P)$.
2. Dada a função $f : [-2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 2$ encontre $\underline{S}(f, P)$.
3. Determine as expressões para a **soma superior** e para a **soma inferior** de $f(x) = 5 - x^2$, considerando $x \in [1, 2]$.
4. Utilize somas superiores para calcular a área da região situada entre as curvas $y = x^4 + 2$, $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$.
5. Utilize a definição de integral definida para calcular $\int_1^3 (x^2 - 2x)dx$.
6. Utilize soma de áreas de retângulos inscritos para calcular $\int_0^4 (-x^2 - 1)dx$.
7. Utilize soma de áreas de retângulos circunscritos para determinar a área sob o gráfico de $f(x) = x^3 + 1$, para $x \in [0, b]$, onde $b > 0$ é arbitrário.
8. Calcule, usando somas superiores, a área da região situada entre o gráfico de $f(x) = e^x$ e o eixo x , entre as retas $x = -1$ e $x = 2$.
9. Utilize somas inferiores para calcular a área da região situada entre a curva $x = y^2$ e o eixo y , com $y \in [0, 2]$.
10. Seja $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Verifique se $\int_0^1 f(x) dx$ existe.
11. Considere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que:
 - (a) Se f é uma função par, então $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$.
 - (b) Se f é uma função ímpar, então $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.
 - (c) Interprete geometricamente os itens anteriores.
12. Um meteorologista estabelece que a temperatura T (em $^{\circ}F$), num dia de inverno é dada por $T(t) = \frac{1}{20}t(t-12)(t-24)$, onde o tempo t é medido em horas e $t = 0$ corresponde à meia-noite. Ache a temperatura média entre as 6 horas da manhã e o meio dia. Sugestão: utilize o teorema do valor médio para integrais.
13. Encontre uma função f contínua, positiva e tal que a área da região situada sob o seu gráfico e entre as retas $x = 0$ e $x = t$ seja igual a $A(t) = t^3$, para todo $t > 0$.
14. Determine uma função f diferenciável, positiva e tal que $\int_0^x f(t)dt = [f(x)]^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
15. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e defina uma nova função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = \int_{x^2}^{x^3} f(t)dt$. Calcule o valor de $g'(1)$, sabendo que $f(1) = 2$.

16. Encontre, se existir, o valor de cada uma das seguintes integrais:

$$\begin{array}{llll}
 (a) \int_0^1 \left(x + \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx & (e) \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx & (i) \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} dx & (m) \int_{-\infty}^1 e^x dx \\
 (b) \int_1^2 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt[4]{x} \right) dx & (f) \int_1^4 \frac{x}{\sqrt{2+4x}} dx & (j) \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx & (n) \int_{-1}^1 \frac{1}{x^4} dx \\
 (c) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx & (g) \int_1^5 \frac{1}{\sqrt{5-x}} dx & (k) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx & (o) \int_0^1 \frac{1}{x^3} dx \\
 (d) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx & (h) \int_0^{+\infty} e^{-x} dx & (l) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx & (p) \int_0^2 \frac{1}{x-1} dx
 \end{array}$$

17. Determine o valor das seguintes integrais, se possível.

$$\begin{array}{lll}
 (a) \int_1^{\sqrt{2}} x e^{-x^2} dx & (b) \int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+9}} dx & (c) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \sec^2 x dx \\
 (d) \int_0^1 x \sin x dx & (e) \int_{-\infty}^0 x e^x dx & (f) \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx \\
 (g) \int_0^2 x^2 \ln(x) dx & (h) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx & (i) \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-|x-4|} dx
 \end{array}$$

18. Os engenheiros de produção de uma empresa estimam que um determinado poço produzirá gás natural a uma taxa dada por $f(t) = 700e^{-\frac{1}{5}t}$ milhares de metros cúbicos, onde t é o tempo desde o início da produção. Estime a quantidade total de gás natural que poderá ser extraída desse poço.

19. Determine todos os valores de p para os quais $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ converge.

20. Determine para quais valores de $p \in \mathbb{R}$ a integral $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx$ converge.

21. Calcule, se possível, as seguintes integrais impróprias:

$$\begin{array}{lll}
 (a) \int_1^{+\infty} x e^{-x^2} dx & (b) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1} dx & (c) \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx \\
 (d) \int_0^1 x \ln x dx & (e) \int_0^9 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx & (f) \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx
 \end{array}$$

22. Em equações diferenciais, define-se a Transformada de Laplace de uma função f por

$$L(f(x)) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx,$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ para o qual a integral imprópria seja convergente. Encontre a Transformada de Laplace de:

$$\begin{array}{lll}
 (a) f(x) = e^{ax} & (b) f(x) = \cos x & (c) f(x) = \sin x
 \end{array}$$

23. A função gama é definida para todo $x > 0$ por

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

(a) Calcule $\Gamma(1)$ e $\Gamma(2)$.

(b) Mostre que, para n inteiro positivo, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.

24. Encontre a área da região limitada pelas curvas:

(a) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

(b) $y - x = 6$, $y - x^3 = 0$ e $2y + x = 0$.

(c) $y = -x^2 + 9$ e $y = 3 - x$.

(d) $y = \sin x$, $y = x \sin x$, $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

(e) $28 - y - 5x = 0$, $x - y - 2 = 0$, $y = 2x$ e $y = 0$.

25. Represente geometricamente a região cuja área é calculada por

$$A = \int_0^2 (y + 6) - (\sqrt{4 - y^2}) dy.$$

26. Calcule a área de cada região delimitada pelas curvas dadas abaixo através de:

(i) integração em relação a x (ii) integração em relação a y .

(a) $y = x + 3$ e $x = -y^2 + 3$.

(b) $2x + y = -2$, $x - y = -1$ e $7x - y = 17$.

(c) $y = x^2 - 1$, $y = \frac{2}{x^2}$ e $y = 32x^2$.

(d) $y + x = 6$, $x = y^2$ e $y + 2 = 3x$.

27. Represente geometricamente a região cuja área é calculada pela expressão

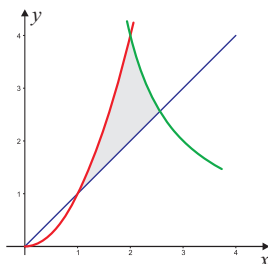
$$A = \int_1^2 (2x^2) - \left(\frac{2}{x}\right) dx + \int_2^4 \left(\frac{62 - 15x}{4}\right) - \left(\frac{2}{x}\right) dx.$$

A seguir, reescreva esta expressão utilizando y como variável independente.

28. Estabeleça a(s) integral(is) que permite(m) calcular a área da região hachurada na figura abaixo, delimitada simultaneamente pelas curvas $y = x$, $y = x^2$ e $y = \frac{4}{x-1}$, mediante:

(a) integração em relação a x .

(b) integração em relação a y .



29. Encontre uma reta horizontal $y = k$ que divida a área da região compreendida entre as curvas $y = x^2$ e $y = 9$ em duas partes iguais.

30. A área de uma determinada região R pode ser calculada pela expressão

$$A = \int_{\frac{-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{2}x^2) dx.$$

Reescreva esta expressão, utilizando:

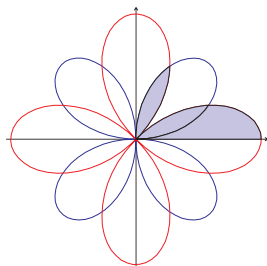
(a) integração em relação a y ;

(b) coordenadas paramétricas.

31. Represente geometricamente a região cuja área, em coordenadas paramétricas, é dada por

$$A = 2 \int_{\pi}^0 3 \sin t (-3 \sin t) dt - 2 \int_{\pi}^0 3 \sin t (-2 \sin t) dt.$$

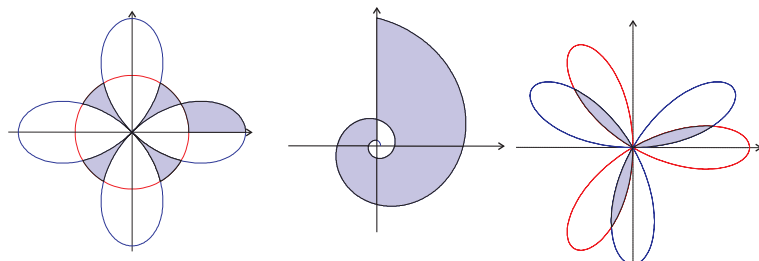
32. Uma cicloide é uma curva que pode ser descrita pelo movimento do ponto $P(0,0)$ de um círculo de raio a , centrado em $(0,a)$, quando este círculo gira sobre o eixo x . Pode-se representar esta cicloide através das equações $x = a(t - \sin t)$ e $y = a(1 - \cos t)$, com $t \in [0, 2\pi]$. Determine a área da região delimitada pela cicloide.
33. Uma curva de equação $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ é chamada astróide. Calcule a área da região delimitada pela astróide obtida quando $a = 5$.
34. Calcule a área da região situada simultaneamente no interior dos seguintes pares de curvas:
- (a) $r = 3 \cos \theta$ e $r = 1 + \cos \theta$;
 - (b) $r = 1 + \cos \theta$ e $r = 1$;
 - (c) $r = \sin \theta$ e $r = 1 - \cos \theta$;
 - (d) $r^2 = \cos(2\theta)$ e $r^2 = \sin(2\theta)$;
 - (e) $r = 2(1 + \sin \theta)$ e $r = 2(1 + \cos \theta)$.
35. Encontrar a área simultaneamente interior ao círculo $r = 6 \cos \theta$ e exterior a $r = 2(1 + \cos \theta)$.
36. Calcule a área da região simultaneamente interior à curva $r = 4 + 4 \cos \theta$ e exterior à $r = 6$.
37. Calcule a área da região simultaneamente interior à curva $r = 1 + \cos \theta$ e exterior à $r = 2 \cos \theta$.
38. Calcule a área da região simultaneamente interior às curvas $r = \sin(2\theta)$ e $r = \sin \theta$.
39. Determine a área da região simultaneamente interior às rosáceas $r = \sin(2\theta)$ e $r = \cos(2\theta)$.
40. Escreva a integral que permite calcular a área sombreada entre as curvas $r = \sin(2\theta)$ e $r = \sqrt{3} \cos(2\theta)$, dada na figura abaixo.



41. Seja R a porção da região simultaneamente interior às curvas $r = 2 \cos \theta$ e $r = 4 \sin \theta$ que está situada no exterior da curva $r = 1$. Escreva as integrais que permitem calcular:
- (a) a área da região R ;
 - (b) o comprimento de arco da fronteira da região R .

42. Calcule a área das regiões sombreadas nas figuras abaixo:

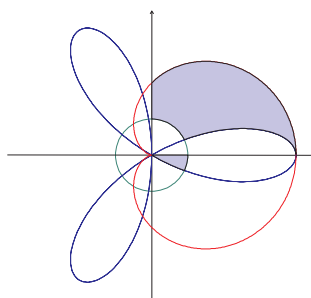
(a) $r = 1$ e $r = 2 \cos(2\theta)$ (b) $r = 2e^{\frac{1}{4}\theta}$ (c) $r = \sin(3\theta)$ e $r = \cos(3\theta)$



43. Represente geometricamente a região cuja área, em coordenadas polares, é dada por

$$I = 2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 \theta d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(2\theta) d\theta \right].$$

44. Monte a(s) integral(is) que permite(m) calcular a área hachurada na figura abaixo, delimitada pelas curvas $r = 2 + 2 \cos \theta$, $r = 4 \cos(3\theta)$ e $r = 2$.



45. Calcule o comprimento de arco das curvas dadas por:

- (a) $x = \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4y}$, com $2 \leq y \leq 5$;
- (b) $x = 3 + t^2$ e $y = 6 + 2t^2$, com $1 \leq t \leq 5$;
- (c) $x = 5t^2$ e $y = 2t^3$, com $0 \leq t \leq 1$;
- (d) $x = e^t \cos t$ e $y = e^t \sin t$, com $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$;
- (e) $r = e^{-\theta}$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$;
- (f) $r = \cos^2 \frac{1}{2}\theta$, com $0 \leq \theta \leq \pi$;

46. A posição de uma partícula, num instante t , é dada por $x(t) = 2 \cos t + 2t \sin t$ e $y(t) = 2 \sin t - 2t \cos t$. Calcule a distância percorrida por esta partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = \frac{\pi}{2}$.

47. Suponha que as equações $x(t) = 4t^3 + 1$ e $y(t) = 2t^{\frac{9}{2}}$ descrevam a trajetória de uma partícula em movimento. Calcule a distância que esta partícula percorre ao se deslocar entre os pontos $A(5, 2)$ e $B(33, 32\sqrt{2})$.

48. Calcule a distância percorrida por uma partícula que se desloca, entre os instantes $t = 0$ e $t = 4$, de acordo com as equações $x(t) = 1 + 2 \cos(3t^{\frac{5}{2}})$ e $y(t) = 5 - 2 \sin(3t^{\frac{5}{2}})$.

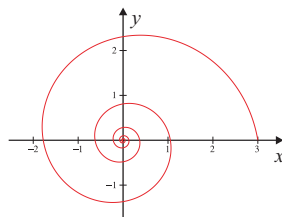


Figura 1.43: Espiral logarítmica

49. A curva descrita por $x(t) = 3e^{-t} \cos 6t$ e $y(t) = 3e^{-t} \sin 6t$, chamada de espiral logarítmica e está representada geometricamente na Figura 1.43. Mostre que o arco descrito por esta espiral, quando $t \in [0, +\infty)$, possui comprimento finito.
50. Encontre o comprimento das curvas que limitam a região formada pela interseção das curvas $r = \sqrt{3} \sin \theta$ e $r = 3 \cos \theta$, situada no primeiro quadrante.
51. Represente graficamente o arco cujo comprimento é calculado pela integral

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{48 \cos^2 \theta + 48 \sin^2 \theta} d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{16 \sin^2 \theta + 16 \cos^2 \theta} d\theta.$$

52. Monte as integrais que permitem calcular o comprimento do arco da fronteira da região que é simultaneamente interior à $r = 1 + \sin \theta$ e $r = 3 \sin \theta$.
53. Calcule o volume do sólido obtido pela revolução da curva $yx^2 = 1$, com $x \geq 1$, em torno do eixo x .
54. Determinar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da curva $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ em torno do eixo x .
55. Determinar o volume do toro gerado pela rotação do círculo de equação $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ em torno do eixo x , supondo $a < b$.
56. Obtenha o volume do sólido obtido pela revolução da região delimitada por:
- (a) $y = \sqrt{4 - x}$, $3y = x$ e $y = 0$, em torno do eixo x ;
 - (b) $y = |x| + 2$, $y = x^2$, $x = -2$ e $x = 1$ em torno do eixo x ;
 - (c) $y = x^2$ e $y = 2$, em torno da reta $y = 2$;
 - (d) $y = 1 - x^2$ e $x - y = 1$, em torno da reta $y = 3$;
 - (e) $x + y = 3$ e $y + x^2 = 3$, em torno da reta $x = 2$.
57. Determine o volume do sólido obtido quando a região situada sob a curva $y = e^x$, com $x \leq 0$, é rotacionada em torno da reta $y = 2$.
58. Um hiperbolóide de uma folha de revolução pode ser obtido pela rotação de uma hipérbole em torno do seu eixo imaginário. Calcule o volume do sólido delimitado pelos planos $x = -3$, $x = 3$ e pelo hiperbolóide obtido pela rotação de $9y^2 - 4x^2 = 36$ em torno do eixo x .

59. Quando uma determinada região R é rotacionada em torno do eixo y , o volume do sólido resultante pode ser calculado pela expressão

$$V = \pi \int_{\frac{1}{3}}^2 \left[\left(\frac{7-3y}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{y} \right)^2 \right] dy.$$

Represente geometricamente a região R e, a seguir, calcule o volume do sólido obtido quando R é rotacionada em torno da reta $y = 3$.

60. Considere a região R delimitada simultaneamente pelas curvas $y = x^3$ e $x = y^3$.
- (a) Obtenha a(s) integral(is) que permite(m) calcular o perímetro da região R .
 - (b) Calcule o volume do sólido obtido quando a região R é rotacionada em torno do eixo y .
 - (c) Escreva as integrais que permitem calcular o volume do sólido obtido quando a região R é rotacionada em torno da reta $y = 1$.
61. Escreva as integrais que permitem calcular o volume do sólido obtido quando a região delimitada pelas curvas $y = x^2 - 4$ e $y = x - 2$ é rotacionada em torno:
- (a) do eixo x (b) da reta $y = 2$ (c) da reta $x = -3$.
62. Considere a região R delimitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = 2x$, que está situada no primeiro quadrante e **abaixo** da reta $y = 2 - x$.
- (a) Determine o volume do sólido obtido quando a região R é revolucionada em torno do eixo x .
 - (b) Escreva as integrais que permitem calcular o volume do sólido obtido quando a região R é revolucionada em torno da reta $x = -1$.
63. Mostre, via volume de sólidos de revolução, que o volume de um cone de raio r e altura h é $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$.
64. Mostre, via volume de sólidos de revolução, que o volume de uma esfera de raio a é $V = \frac{4}{3}\pi a^3$.

1.13 Respostas

1. $\overline{S}(f, P) = 8 + \frac{2}{n}$ e $\overline{S}(g, P) = \frac{38}{3} + \frac{10}{n} + \frac{4}{3n^2}$
2. $\underline{S}(f, P) = \frac{175}{3} - \frac{133}{2n} + \frac{133}{6n^2}$
3. $\overline{S}(f, P) = \frac{8}{3} + \frac{3}{2n} - \frac{1}{6n^2}$ e $\underline{S}(f, P) = \frac{8}{3} - \frac{3}{2n} - \frac{1}{6n^2}$
4. $\overline{S}(f, P) = \frac{11}{5} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{30n^4}$
5. $\frac{2}{3}$
6. $-\frac{76}{3}$
7. $\frac{1}{4}b^4 + b$
8. $e^2 - e^{-1}$
9. $\frac{8}{3}$
10. $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}\pi$
11. Dica para os itens (a) e (b): use propriedades para quebrar o lado esquerdo em duas integrais, use a definição de função par (ou ímpar) e use a substituição de variáveis $u = -x$ para reescrever uma das integrais.
12. $18,9^\circ F$
13. $f(t) = 3t^2$
14. $f(x) = \frac{x}{2}$
15. $g'(1) = 2$
16. .

(a) $-\frac{1}{3}$	(e) $0.405\,47$	(i) 4	(m) $e = 2.718\,3$
(b) $3.202\,8$	(f) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$	(j) 1	(n) <i>não existe</i>
(c) $\ln 2$	(g) 4	(k) $\frac{1}{2}\pi$	(o) ∞
(d) $\frac{1}{4}\pi$	(h) 1	(l) 2	(p) <i>não existe</i>
17. .

(a) $\frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-2}$	(b) $\frac{2}{3}\sqrt{10} - \frac{4}{3}\sqrt{2}$	(c) $\frac{1}{3}$
(d) $\sin 1 - \cos 1$	(e) -1	(f) $\frac{8}{3}$
(g) $\frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9}$	(h) $\sin 1$	(i) 8
18. $3500\, m^3$
19. Converge para $p > 1$.
20. Converge para $p > 1$.

21. . (a) $\frac{1}{2}e^{-1}$ (b) 0 (c) *não existe*
 (d) $-\frac{1}{4}$ (e) $2e^3 - 2$ (f) 0

22. (a) $\frac{1}{s-a}$ para $s > a$ (b) $\frac{s}{s^2+1}$ para $s > 0$ (c) $\frac{1}{s^2+1}$ para $s > 0$

23. (a) $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(2) = 1$

24. (a) $2\sqrt{2} - 2$ (b) 22 (c) $\frac{125}{6}$ (d) $2 - 2\sin 1$ (e) 17



26. (a) $\frac{125}{6}$ (b) 16 (c) $\frac{32-4\sqrt{2}}{3}$ (d) $\frac{23}{6}$

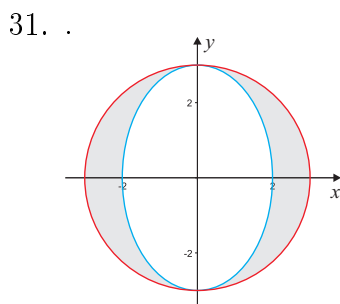
27. $A = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{62-4y}{15} \right) - \left(\frac{2}{y} \right) dy + \int_2^8 \left(\frac{62-4y}{15} \right) - \left(\frac{\sqrt{2}y}{2} \right) dy$

28. .
 (a) $A = \int_1^2 (x^2 - x) dx + \int_2^{\frac{1+\sqrt{17}}{2}} \left(\frac{4}{x-1} - x \right) dx$
 (b) $A = \int_1^{\frac{1+\sqrt{17}}{2}} (y - \sqrt{y}) dy + \int_{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}^4 \left(\frac{y+4}{y} - \sqrt{y} \right) dy$

29. $k = \frac{9}{\sqrt[3]{4}}$

30. .
 (a) $A = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt[4]{2}} dy + 2 \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \sqrt{1-y^2} dy$

(b) $A = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} -\sin^2 t dt - \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{2} t^2 dt$



32. $3a\pi^2$

33. $\frac{3\pi a^2}{8}$

34. (a) $\frac{5\pi}{4}$ (b) $\frac{5}{4}\pi - 2$ (c) $\frac{1}{2}(\pi - 2)$ (d) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ (e) $6\pi - 8\sqrt{2}$

35. 4π

36. $18\sqrt{3} - 4\pi$

37. $\frac{\pi}{2}$

38. $\frac{1}{4}\pi - \frac{3}{16}\sqrt{3}$

39. $\frac{\pi}{2} - 1$

40. Uma das várias respostas possíveis é:

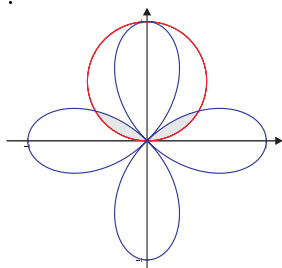
$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(\sqrt{3} \cos 2\theta)^2 d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}(\sin 2\theta)^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(\sqrt{3} \cos 2\theta)^2 d\theta$$

41. (a) $A = \frac{1}{2} \int_{\arcsin \frac{1}{4}}^{\arctan \frac{1}{2}} (16 \sin^2 \theta - 1) d\theta + \frac{1}{2} \int_{\arctan \frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{3}} (4 \cos^2 \theta - 1) d\theta$

(b) $l = \int_{\arcsin \frac{1}{4}}^{\arctan \frac{1}{2}} 4 d\theta + \int_{\arctan \frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{3}} 2 d\theta + \int_{\arcsin \frac{1}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta$

42. (a) $\frac{9\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{4}$ (b) $4e^{\frac{9\pi}{4}} - 8e^{\frac{5\pi}{4}} + 4e^{\frac{\pi}{4}}$ (c) $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$

43. .



44. Uma das várias respostas possíveis é:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{9}} [(2 + 2 \cos \theta)^2 - (4 \cos 3\theta)^2] d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{2}} [(2 + 2 \cos \theta)^2 - 4] d\theta \\ + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{9}} 4 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{6}} (4 \cos 3\theta)^2 d\theta$$

45. .

(a) $\frac{1563}{40}$ (b) $24\sqrt{5}$ (c) $\frac{68}{27}\sqrt{34} - \frac{250}{27}$
 (d) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}}$ (e) $\sqrt{2}(1 - e^{-2\pi})$ (f) 2

46. $\frac{\pi^2}{4}$

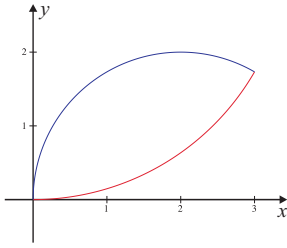
47. $\frac{352}{27}\sqrt{22} - \frac{250}{27}$

48. 192

49. O comprimento desejado é finito e igual a $\sqrt{333}$.

50. $\frac{1}{3}\sqrt{3}\pi + \frac{\pi}{2}$

51. Arco composto de dois subarcs de circunferências, conforme figura abaixo:



52. $l = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{9 \cos^2 \theta + 9 \sin^2 \theta} d\theta + 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 \theta + (1 + \sin \theta)^2} d\theta$

53. $\frac{\pi}{3}$

54. $\frac{4\pi ab^2}{3}$

55. $2\pi^2 a^2 b$

56. (a) $\frac{3}{2}\pi$ (b) $\frac{92\pi}{15}$ (c) $\frac{64}{15}\sqrt{2}\pi$ (d) $\frac{162}{5}\pi$ (e) $\frac{1}{2}\pi$

57. $\frac{7}{2}\pi$

58. 32π

59. $\frac{410}{27}\pi - 6\pi \ln 6$

60. (a) $l = \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1 + 9x^4} + \sqrt{1 + \frac{1}{9}x^{-4}} \right) dx$ (b) $V = \frac{32}{35}\pi$

(c) $V = \pi \int_{-1}^0 (1 - \sqrt[3]{x})^2 - (1 - x^3)^2 dx + \pi \int_0^1 (1 - x^3)^2 - (1 - \sqrt[3]{x})^2 dx$

61. .

(a) $V = \pi \int_{-1}^2 (x^4 - 9x^2 + 4x + 12) dx$ (b) $V = \pi \int_{-1}^2 (20 - 13x^2 - x^4 + 8x) dx$

(c) $V = \pi \int_{-4}^{-1} (y + 8 + 4\sqrt{y + 4}) dy - \pi \int_{-4}^{-3} (y + 8 - 4\sqrt{y + 4}) dy - \pi \int_{-3}^0 (y^2 + 8y + 16) dy$

62. (a) $\frac{134}{189}\pi$ (b) $V = \pi \int_0^1 (1 + \sqrt[3]{y})^2 - \left(1 + \frac{y}{2}\right)^2 dy + \pi \int_1^{\frac{4}{3}} (3 - y)^2 - \left(1 + \frac{y}{2}\right)^2 dy$

63. Dica: Note que um cone tal como desejado pode ser obtido pela rotação em torno do eixo y da reta $y = \frac{h}{r}x$, com $x \in [-r, r]$ e $y \in [0, h]$.

64. Dica: Note que a esfera pode ser obtida pela rotação da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ em torno de qualquer eixo coordenado.

Capítulo 2

FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS E DIFERENCIAÇÃO PARCIAL

Objetivos (ao final do capítulo espera-se que o aluno seja capaz de):

1. Definir funções de várias variáveis e dar exemplos práticos;
2. Encontrar o domínio e fazer o gráfico (esferas, cones, cilindros, parabolóides, planos e interseções entre essas superfícies) com funções de várias variáveis com duas variáveis independentes;
3. Usando a definição mostrar que o limite de uma função de duas variáveis existe;
4. Verificar se uma função de duas variáveis é contínua num ponto;
5. Encontrar derivadas parciais e interpretá-las geometricamente quando a função for de duas variáveis independentes;
6. Encontrar derivadas parciais de funções compostas;
7. Encontrar as derivadas parciais de funções implícitas;
8. Resolver problemas que envolvam derivadas parciais como taxa de variação;
9. Representar geometricamente as diferenciais parciais e totais;
10. Resolver problemas que envolvam diferenciais parciais e totais;
11. Encontrar derivadas parciais de ordem superior;
12. Encontrar os extremos de uma função de duas variáveis quando existem;
13. Resolver problemas que envolvam extremos de funções de duas variáveis;
14. Resolver exercícios usando uma ferramenta tecnológica.

A prova será composta por questões que possibilitam verificar se os objetivos foram atingidos. Portanto, esse é o roteiro para orientações de seus estudos. O modelo de formulação das questões é o modelo adotado na formulação dos exercícios e no desenvolvimento teórico desse capítulo, nessa apostila.

2.1 Introdução

Um fabricante pode constatar que o custo da produção C de um determinado artigo depende da qualidade do material usado, do salário-hora dos operários, do tipo de maquinaria necessário, das despesas de manutenção e da supervisão. Dizemos então que C é função de cinco variáveis, porque depende de cinco quantidades diferentes. Neste Capítulo estudaremos as funções de várias variáveis, começando com o caso de funções de duas variáveis e estendendo então a um número arbitrário de variáveis. Como exemplo de função de duas variáveis podemos utilizar a área de um retângulo, função esta muito conhecida.

Consideremos o retângulo de base a e altura b . A área desse retângulo é

$$A = ab.$$

Por outro lado, se a for uma variável x podemos escrever a área desse retângulo em função de x , isto é,

$$A(x) = xb.$$

Desse modo, temos a área como função de uma variável. Podemos também, fazer variar a base e a altura simultaneamente. Nesse caso, tomando $b = y$ teremos a área dada por

$$A(x, y) = xy,$$

ou seja, a área é expressa como função de duas variáveis.

A função $A(x, y)$ é definida para todo par de pontos pertencentes ao plano $\mathbb{R}^2$ e a imagem é um número real. O convencional é escrever $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Um raciocínio análogo pode ser feito para o volume de um paralelepípedo. Sejam a , b e c as dimensões de um paralelepípedo. O volume será dado por

$$V = abc.$$

Por outro lado, se a for uma variável x podemos escrever o volume desse paralelepípedo expresso como função de uma variável x , isto é,

$$V(x) = xbc.$$

Podemos também, fazer variar as dimensões a e b simultaneamente, isto é, tomando $b = y$ teremos o volume do paralelepípedo expresso como uma função de duas variáveis x e y , ou seja,

$$V(x, y) = xyc.$$

Também é possível variar as três dimensões simultaneamente e, nesse caso tomando $z = c$ o volume do paralelepípedo será expresso como uma função de três variáveis x , y e z , isto é,

$$V(x, y, z) = xyz.$$

A função $V(x, y, z)$ é definida para toda tripla de pontos pertencentes ao espaço $\mathbb{R}^3$ e a imagem é um número real. O convencional é escrever $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Vejamos um exemplo que envolve mais do que três variáveis.

EXEMPLO 2.1.1 *Suponhamos que uma pessoa vá a um supermercado e a nota de compras seja descrita conforme o modelo abaixo.*

Nota de compras

Produtos	Unidades	Preço por unidade	Total
Leite	2 pacotes	1,00	2,00
Pão	10	0,10	1,00
Laranja	2kg	0,50	1,00
Maçã	2kg	2,50	5,00
Açúcar	5kg	0,60	3,00
		Total a pagar	12,00

Suponhamos que as variáveis x , y , z , w e t representem, respectivamente, leite, pão, laranja, maçã e açúcar, então podemos escrever a função "total a pagar" por

$$T(x, y, z, w, t) = x + 0,1y + 0,5z + 2,5w + 0,6t.$$

A função T é uma função de cinco variáveis. Para encontrar o total a pagar referente a tabela anterior, fazemos

$$\begin{aligned} T(2, 10, 2, 2, 5) &= 2 + 0,1(10) + 0,5(2) + 2,5(2) + 0,6(5) \\ &= 2 + 1 + 1 + 5 + 3 = 12. \end{aligned}$$

A função $T(x, y, z, w, t)$ é definida para todo ponto $(x, y, z, w, t) \in \mathbb{R}^5$. O convencional é escrever $T: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$.

Note que, em todos os exemplos acima, a imagem da função é um número real. Com base nesses exemplos vamos definir funções de várias variáveis.

2.2 Função de Várias Variáveis

DEFINIÇÃO 2.2.1 *Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e seja $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in D$. Se a cada n -upla ordenada pertencente a D corresponder um único número real $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, dizemos que f é uma função de n -variáveis, definida em D com imagem em $\mathbb{R}$. O subconjunto D é chamado domínio de f . Convencionalmente escreve-se $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.*

EXEMPLO 2.2.2 *Vejam os exemplos de funções de várias variáveis:*

- (a) $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 2x + 3y + 1$.
- (b) $f: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 + y + z + 6$.
- (c) $f: D \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z + w + 6$.
- (d) $f: D \subset \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z, w, t) = x^2 + y^2 + z + w + t^2 + 6$.

EXEMPLO 2.2.3 *A função $z = f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y-x}}$ é uma função de duas variáveis, cujo domínio é $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } y > x\}$. Geometricamente, D é formado por todos os pontos do plano xy que estão situados "acima" da reta $y = x$. Já a função $w = f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ é uma função de três variáveis cujo domínio são todos os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ para os quais $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$, ou seja, todos os pontos de $\mathbb{R}^3$, com exceção da origem.*

EXEMPLO 2.2.4 *A temperatura em um ponto (x, y) de uma placa de metal plana é dada por $T(x, y) = x^2 + 4y^2$ graus.*

- (a) *Determine a temperatura no ponto $(3, 1)$.*
- (b) *Determine e represente geometricamente a curva ao longo da qual a temperatura tem um valor constante igual a 16 graus.*

Solução: (a) Temos que $T(3, 1) = 3^2 + 4 = 13$ graus.

(b) A curva desejada tem equação $T(x, y) = 16$, ou seja, $x^2 + 4y^2 = 16$, que nos fornece a elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, representada na Figura 2.1.

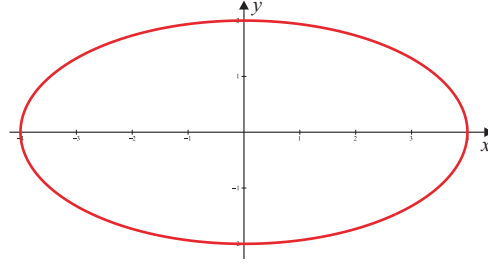


Figura 2.1: 16 graus ao longo da elipse.

2.2.5 Gráfico de uma Função de Várias Variáveis

DEFINIÇÃO 2.2.6 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de n variáveis. Definimos o gráfico de f como o subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ formado por todos os pontos da forma*

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

onde $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

No caso $n = 2$, o gráfico de f é uma superfície em $\mathbb{R}^3$. Quando $n \geq 3$, não é mais possível visualizar o gráfico de f , pois este será um subconjunto de $\mathbb{R}^4$.

EXEMPLO 2.2.7 *O gráfico de $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ é um parabolóide, conforme mostra a Figura 2.2.*

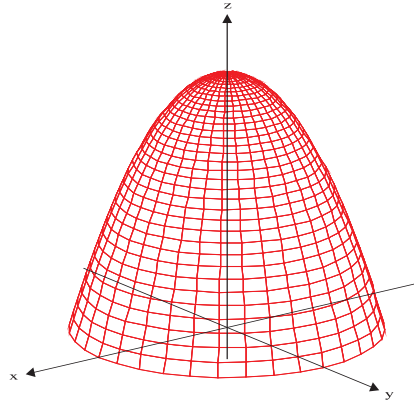


Figura 2.2: Parabolóide $z = f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$

A equação de uma superfície pode ser escrita na forma implícita ou explícita, em função de duas variáveis, isto é, $F(x, y, z) = 0$ ou $z = f(x, y)$.

EXEMPLO 2.2.8 *A equação da esfera centrada na origem pode ser escrita como segue*

- *Implicitamente: $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.*
- *Explicitamente em função de x e y , com $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.*

Representação Gráfica de uma Superfície

Para representar graficamente uma superfície procede-se como segue:

1. Determina-se as interseções com os eixos cartesianos determinando os pontos

$$(x, 0, 0), (0, y, 0) \text{ e } (0, 0, z).$$

2. Determina-se os traços das superfícies sobre os planos coordenados

- (a) xy fazendo $z = 0$ na equação da superfície;
- (b) xz fazendo $y = 0$ na equação da superfície;
- (c) yz fazendo $x = 0$ na equação da superfície.

3. Determina-se as simetrias

- (a) em relação aos planos coordenados

- Uma superfície é simétrica em relação ao plano xy se para qualquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(x, y, -z)$;
- Uma superfície é simétrica em relação ao plano xz se para qualquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(x, -y, z)$;
- Uma superfície é simétrica em relação ao plano yz se para qualquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(-x, y, z)$.

- (b) em relação aos eixos coordenados

- Uma superfície é simétrica em relação ao eixo x se para qualquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(x, -y, -z)$;
- Uma superfície é simétrica em relação ao eixo y se para qualquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(-x, y, -z)$;
- Uma superfície é simétrica em relação ao eixo z se para qualquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(-x, -y, z)$.

- (c) em relação à origem

- Uma superfície é simétrica em relação à origem se para qualquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(-x, -y, -z)$.

4. Secções e Extensão: Quando os traços principais não forem suficientes para caracterização da superfície, recorre-se a determinação de secções com planos paralelos aos planos coordenados. Para isso fazemos

- $z = k$ sendo k uma constante na equação $F(x, y, z) = 0$, isto é, teremos a equação $F(x, y, k) = 0$ sobre o plano coordenado xy ;
- $y = k$ sendo k uma constante na equação $F(x, y, z) = 0$, isto é, teremos a equação $F(x, k, z) = 0$ sobre o plano coordenado xz ;
- $x = k$ sendo k uma constante na equação $F(x, y, z) = 0$, isto é, teremos a equação $F(k, y, z) = 0$ sobre o plano coordenado yz .

EXEMPLO 2.2.9 *Esboçar geometricamente a superfície de equação*

$$-\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1.$$

Solução: Vamos proceder conforme os passos listados acima.

1. Interseções com os eixos coordenados: Os pontos $(x, 0, 0)$ e $(0, 0, z)$ não são reais e o ponto $(0, y, 0)$ é duplo ou seja temos os pontos $P(0, 4, 0)$ e $P'(0, -4, 0)$.
2. Traços sobre os planos coordenados

- Sobre o plano xy : Fazendo $z = 0$ tem-se a hipérbole $-\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ (Figura 2.3).

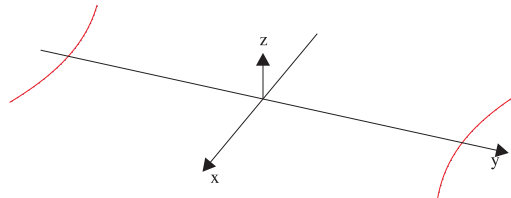


Figura 2.3: Traço sobre xy

- Sobre o plano xz : Fazendo $y = 0$ tem-se o conjunto vazio.
- Sobre o plano yz : Fazendo $x = 0$ tem-se a hipérbole $\frac{y^2}{4^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1$ (Figura 2.4).

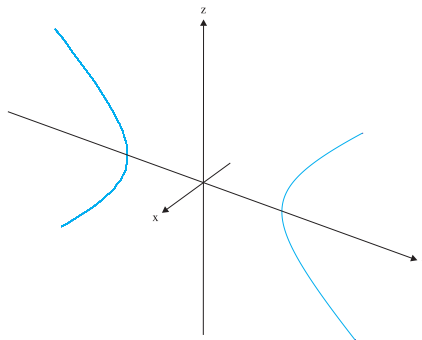


Figura 2.4: Traço sobre yz

3. Simetrias: Explicitamente, a equação $-\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1$ pode ser escrita como

$$y = 4\sqrt{1 + \frac{x^2}{5^2} + \frac{z^2}{3^2}} \quad \text{ou} \quad y = -4\sqrt{1 + \frac{x^2}{5^2} + \frac{z^2}{3^2}}$$

logo, é simétrica em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem.

4. Secções e extensões: fazendo $z = k$, com $k \in \mathbb{R}$, obtemos uma família de hipérboles de eixo real paralelo ao eixo y . Fazendo $y = k$, com $k > 4$ ou $k < -4$, obtemos uma família de elipses. Fazendo $x = k$, com $k \in \mathbb{R}$, obtemos novamente uma família de hipérboles de eixo real paralelo ao eixo y .

- Por exemplo, fazendo $z = 3$ temos a equação de uma hipérbole (Figura 2.5)

$$-\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} - \frac{3^2}{3^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 2.$$

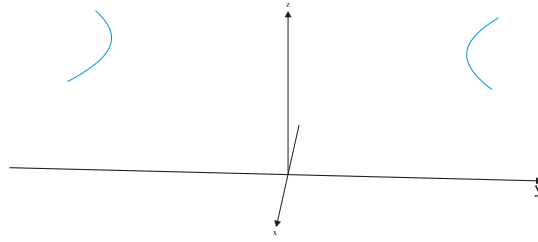


Figura 2.5: Traço sobre o plano $z = 3$.

- Por exemplo, fazendo $y = \pm 8$ temos a equação de elipses (Figura 2.6)

$$-\frac{x^2}{5^2} + \frac{(\pm 8)^2}{4^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1 \Rightarrow -\frac{x^2}{5^2} - \frac{z^2}{3^2} = -3 \Rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{z^2}{3^2} = 3.$$

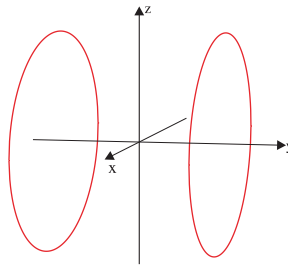


Figura 2.6: Traços sobre os planos $y = \pm 8$.

5. Construção da superfície. Os elementos fornecidos pela discussão acima permitem construir a superfície hipérbólica de duas folhas, conforme a Figura 2.7.

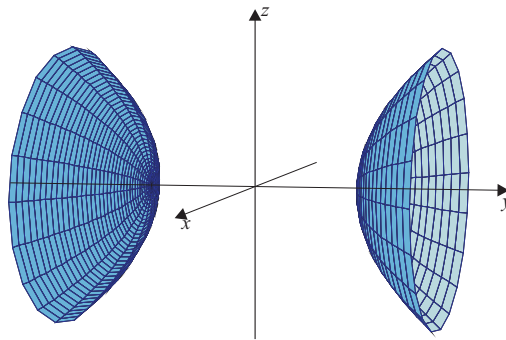


Figura 2.7: Hiperbolóide de duas folhas

2.2.10 Curvas e Súperfícies de Nível (Opcional)

Uma curva ao longo da qual uma função de duas variáveis $z = f(x, y)$ tem valor constante (como a elipse do Exemplo 2.2.4) é denominada **curva de nível** ou **curva de contorno** de f .

A equação de uma curva de nível k para f é da forma $f(x, y) = k$. Quando a função f representa uma distribuição de temperatura, suas curvas de nível são chamadas **isotermas**. Se f representa o potencial elétrico, as curvas de nível de f são chamadas de **curvas equipotenciais**.

Suponha que uma superfície S é o gráfico de uma função $z = f(x, y)$. Se a interseção de S com o plano $z = k$ é não vazia, então ela é uma curva de nível $f(x, y) = k$. A cada ponto desta curva de nível corresponde um único ponto na superfície S que está k unidades acima do plano xy , se $k > 0$, ou k unidades abaixo dele, se $k < 0$. Ao considerarmos diferentes valores para a constante k , obtemos um conjunto de curvas chamado de **mapa de contorno de S** .

Tal mapa de contorno facilita a visualização da superfície. Quando as curvas de nível são mostradas em intervalos equi-espçados de k , a proximidade de curvas sucessivas nos dá a informação sobre a aclividade de S . Quanto mais próximas as curvas, significa que os valores de z mudam mais rapidamente do que quando elas estão mais afastadas, ou seja, quando curvas de nível estão juntas, a superfície é "íngreme".

EXEMPLO 2.2.11 *Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Faça um mapa de contorno de f , mostrando as curvas de nível em 1, 2, 3, 4, 5.*

Solução: As curvas de nível são as circunferências $x^2 + y^2 = k$. Um mapa de contorno de f pode ser visto na Figura 2.8.

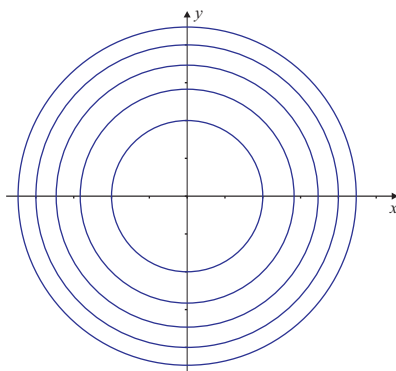


Figura 2.8: Curvas de Nível: $x^2 + y^2 = k$

Embora não possamos visualizar o gráfico de uma função de três variáveis $w = f(x, y, z)$, podemos considerar as superfícies de equações $f(x, y, z) = k$, que são chamadas de superfícies de nível de f . Ainda, toda superfície definida por uma equação em x, y, z pode ser considerada como uma superfície de nível de alguma função de três variáveis. Por exemplo, o hiperbolóide da Figura 2.7 é a superfície de nível $g(x, y, z) = 1$ onde $g(x, y, z) = -\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} - \frac{z^2}{3^2}$.

2.2.12 Distâncias e Bolas no Espaço

Sejam $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $A(y_1, y_2, \dots, y_n)$ dois pontos de $\mathbb{R}^n$. A distância de P até A , denotada por $\|P - A\|$, é dada por

$$\|P - A\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

DEFINIÇÃO 2.2.13 *Sejam $A(y_1, y_2, \dots, y_n)$ um ponto de $\mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$ um número real. Denominamos bola aberta de centro A e raio ε ao conjunto de todos os pontos $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tais que $\|P - A\| < \varepsilon$, ou seja,*

$$B(A, \varepsilon) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \|P - A\| < \varepsilon\}.$$

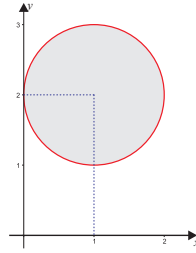


Figura 2.9: Bola aberta $B((1, 2), 1)$.

EXEMPLO 2.2.14 No plano, para $\varepsilon = 1$ e $A(1, 2)$ temos a bola aberta

$$B((1, 2), 1) = \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2; \|(x, y) - (1, 2)\| < 1\}$$

que é graficamente representada pela Figura 2.9.

EXEMPLO 2.2.15 Sejam $A(1, 1, 2)$ e $\varepsilon = 1$ então a bola aberta

$$B((1, 1, 2), 1) = \{P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \|(x, y, z) - (1, 1, 2)\| < 1\}$$

está graficamente representada pela Figura 2.10.

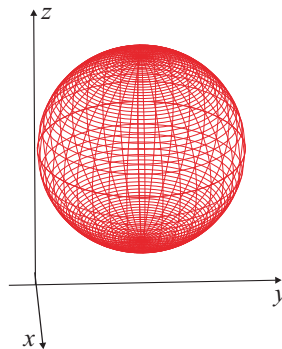


Figura 2.10: Bola aberta $B((1, 1, 2), 1)$

2.3 Limite de uma Função de duas Variáveis

Vamos estudar a existência do limite de uma função de duas variáveis. O raciocínio análogo é feito para funções de n variáveis.

DEFINIÇÃO 2.3.1 Seja f uma função de duas variáveis definida numa bola aberta $B(A, r)$, exceto possivelmente em $A(x_0, y_0)$. Dizemos que o número L é o limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende para (x_0, y_0) se, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar um $\delta > 0$ tal que $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$. Nesse caso, escrevemos

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L.$$

EXEMPLO 2.3.2 Mostre que $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 3)} 2x + 3y = 11$.

Solução: Devemos mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x, y) - 11| < \varepsilon$ sempre que $0 < \|(x, y) - (1, 3)\| < \delta$. Assim

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 11| &= |2x + 3y - 11| \\ &= |(2x - 2) + (3y - 9)| \\ &= |2(x - 1) + 3(y - 3)| \\ &\leq |2(x - 1)| + |3(y - 3)| \\ &= 2|(x - 1)| + 3|(y - 3)| < \varepsilon \end{aligned}$$

e obtemos que

$$2|(x - 1)| + 3|(y - 3)| < \varepsilon. \quad (I)$$

Por outro lado, de $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$, segue que

$$0 < \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2} < \delta.$$

Agora, pela definição de módulo, temos que

$$|x - 1| = \sqrt{(x - 1)^2} \leq \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2} < \delta$$

e

$$|y - 3| = \sqrt{(y - 3)^2} \leq \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2} < \delta$$

e assim

$$2|(x - 1)| + 3|(y - 3)| < 2\delta + 3\delta = 5\delta. \quad (II)$$

Portanto, de (I) e (II) podemos formar o sistema de inequações

$$\begin{cases} 2|(x - 1)| + 3|(y - 3)| < \varepsilon \\ 2|(x - 1)| + 3|(y - 3)| < 5\delta \end{cases}$$

Assim, podemos admitir que $5\delta = \varepsilon$ e encontrar que $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$.

Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ tal que $|f(x, y) - 11| < \varepsilon$ sempre que $0 < \|(x, y) - (1, 3)\| < \delta$, o que prova pela definição que $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 3)} 2x + 3y = 11$.

OBSERVAÇÃO 2.3.3 No Cálculo 1, vimos que para existir o limite de uma função de uma variável, quando x se aproxima de x_0 , é necessário que os limites laterais $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ existam e sejam iguais. Já para funções de duas variáveis, a situação análoga é mais complicada, pois no plano há uma infinidade de curvas (caminhos) ao longo das quais o ponto (x, y) pode se aproximar de (x_0, y_0) . Porém, se o limite da Definição 2.3.1 existe, é preciso então que $f(x, y)$ tenda para L , independentemente do caminho considerado. Essa ideia nos fornece uma importante regra (Teorema 2.3.4) para investigar a existência de limites de funções de duas variáveis.

TEOREMA 2.3.4 Seja f uma função de duas variáveis definida numa bola aberta centrada em $A(x_0, y_0)$, exceto possivelmente em $A(x_0, y_0)$. Se $f(x, y)$ tem limites diferentes quando (x, y) tende para (x_0, y_0) por caminhos diferentes então

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) \text{ não existe.}$$

EXEMPLO 2.3.5 Vamos mostrar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ não existe.

Solução: Considere $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 0\}$. Note que C_1 é exatamente o eixo y e é um caminho que passa pelo ponto $(0, 0)$. Assim,

$$\lim_{(x,y) \xrightarrow{C_1} (0,0)} f(x, y) = \lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 \cdot y}{0^2 + y^2} = 0.$$

Considere agora $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = kx\}$. Note que C_2 é o conjunto de retas que passam pelo ponto $(0, 0)$. Assim

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \xrightarrow{C_2} (0,0)} f(x, y) &= \lim_{(x,kx) \rightarrow (0,0)} f(x, kx) = \lim_{(x,kx) \rightarrow (0,0)} \frac{xkx}{x^2 + (kx)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 k}{x^2 (1 + k^2)} = \frac{k}{1 + k^2}. \end{aligned}$$

Mostramos então que

$$\lim_{(x,y) \xrightarrow{S_1} (0,0)} f(x, y) \neq \lim_{(x,y) \xrightarrow{S_2} (0,0)} f(x, y)$$

e com isso, concluímos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ não existe.

EXEMPLO 2.3.6 Vamos mostrar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2}$ existe.

Solução: Primeiro vamos verificar se, por caminhos diferentes, o limite tem o mesmo valor numérico. Considerando $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = kx\}$, o conjunto de retas que passam pelo ponto $(0, 0)$ temos

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \xrightarrow{C_1} (0,0)} f(x, y) &= \lim_{(x,kx) \rightarrow (0,0)} f(x, kx) = \lim_{(x,kx) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 kx}{x^2 + (kx)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 k}{x^2 (1 + k^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xk}{1 + k^2} = 0. \end{aligned}$$

Considerando agora $C_2 = \{(x, y) \in D; y = kx^2\}$, o conjunto de parábolas que passam pelo ponto $(0, 0)$, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \xrightarrow{C_2} (0,0)} f(x, y) &= \lim_{(x,kx^2) \rightarrow (0,0)} f(x, kx^2) = \lim_{(x,kx^2) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 kx^2}{x^2 + (kx^2)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4 k}{x^2 (1 + k^2 x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 k}{1 + k^2 x^2} = 0. \end{aligned}$$

Como $\lim_{(x,y) \xrightarrow{C_1} (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \xrightarrow{C_2} (0,0)} f(x, y)$, segue que há probabilidades de que $L = 0$

seja o limite de $f(x, y) = \frac{3xy}{x^2 + y^2}$. Para confirmar, devemos verificar se a Definição 2.3.1 está satisfeita. Devemos mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$ sempre que $0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$. Assim,

$$|f(x, y) - 0| = \left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|3x^2y|}{|x^2 + y^2|} = \frac{3|x^2||y|}{x^2 + y^2} < \varepsilon. \quad (\text{I})$$

De $0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$ obtemos $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$. Sendo $x^2 \leq x^2 + y^2$ e $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ podemos escrever

$$\frac{3|x^2||y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{3(x^2 + y^2)|y|}{x^2 + y^2} = 3|y| < 3\sqrt{x^2 + y^2} < 3\delta. \quad (\text{II})$$

Comparando (I) com (II) podemos admitir que $3\delta = \varepsilon$, donde vem $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

Portanto, mostramos que existe o limite existe e que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0$.

EXEMPLO 2.3.7 Calcule, se possível, o valor de $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{3x^4(y-1)^4}{(x^4 + y^2 - 2y + 1)^3}$.

Solução: Iniciamos investigando a existência do limite, utilizando diferentes caminhos que passam pelo ponto $(0, 1)$.

Utilizando os caminhos lineares $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = kx + 1\}$ temos que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \xrightarrow{C_1} (0,1)} \frac{3x^4(y-1)^4}{(x^4 + (y-1)^2)^3} &= \lim_{(x,kx+1) \rightarrow (0,1)} \frac{3x^4(kx)^4}{(x^4 + (kx)^2)^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3k^4x^8}{x^6(x^2 + k^2)^3} = 0. \end{aligned}$$

Agora, usando os caminhos parabólicos $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = kx^2 + 1\}$ temos que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \xrightarrow{C_2} (0,1)} \frac{3x^4(y-1)^4}{(x^4 + (y-1)^2)^3} &= \lim_{(x,kx^2+1) \rightarrow (0,1)} \frac{3x^4(kx^2)^4}{(x^4 + (kx^2)^2)^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3k^4x^{12}}{x^{12}(1 + k^2)^3} = \frac{3k^4}{(1 + k^2)^3}. \end{aligned}$$

Portanto, como obtemos limites diferentes por caminhos distintos, concluímos que o limite não existe.

EXEMPLO 2.3.8 Calcule, se possível, o valor de $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (3,1,-5)} \frac{(x+2y+z)^3}{(x-3)(y-1)(z+5)}$.

Solução: Iniciamos investigando a existência do limite. Como temos uma função de 3 variáveis, devemos usar caminhos em $\mathbb{R}^3$. Se $v = (a, b, c)$ são as coordenadas de um vetor diretor de uma reta que passa pelo ponto $(3, 1, -5)$, podemos utilizar as equações paramétricas para definir o caminho retilíneo

$$C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 3 + at, y = 1 + bt, z = -5 + ct\}.$$

Para nos aproximarmos de $(3, 1, -5)$ por C_1 , basta fazermos o parâmetro $t \rightarrow 0$ e assim

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y,z) \xrightarrow{C_1} (3,1,-5)} \frac{(x+2y+z)^3}{(x-3)(y-1)(z+5)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(3+at+2+2bt-5+ct)^3}{(at)(bt)(ct)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(at+2bt+ct)^3}{abct^3} = \frac{(a+2b+c)^3}{abc}. \end{aligned}$$

Atribuindo diferentes valores para a, b, c , ou seja, utilizando caminhos retilíneos distintos para nos aproximarmos de $(3, 1, -5)$ obtemos limites também distintos. Portanto, pela regra dos dois caminhos, o limite em questão não existe.

2.3.9 Propriedades dos Limites

- (i) Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $f(x, y) = ax + by + c$, então $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = ax_0 + by_0 + c$.
- (ii) Se $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y)$ existem e $c \in \mathbb{R}$, então:
- (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} [f(x, y) \pm g(x, y)] = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) \pm \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y)$.
- (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} cf(x, y) = c \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$
- (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} [f(x, y) \cdot g(x, y)] = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y)$.
- (d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \left[\frac{f(x, y)}{g(x, y)} \right] = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y)}$ desde que $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y) \neq 0$.
- (e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} [f(x, y)]^n = \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) \right)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+^*$.

PROPOSIÇÃO 2.3.10 Se g é uma função de uma variável, contínua num ponto a , e $f(x, y)$ é uma função tal que $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = a$, então $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} (g \circ f)(x, y) = g(a)$, ou seja,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(f(x, y)) = g \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) \right).$$

EXEMPLO 2.3.11 Calcular $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \ln(x^2 + xy - 1)$.

Solução: Considerando as funções

$$f(x, y) = x^2 + xy - 1 \quad \text{e} \quad g(u) = \ln u,$$

temos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} f(x, y) = 2$ e que g é contínua em $u = 2$. Aplicando a proposição acima, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (g \circ f)(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \ln(x^2 + xy - 1) \\ &= \ln \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2 + xy - 1) \right) = \ln 2. \end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 2.3.12 Se $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = 0$ e $g(x, y)$ é uma função limitada em alguma bola aberta de centro (x_0, y_0) então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) \cdot g(x, y) = 0.$$

EXEMPLO 2.3.13 Mostre que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$.

Solução: Consideremos $f(x, y) = x$ e $g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Sabemos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0$, então basta mostrar que $g(x, y)$ é limitada.

Escrevendo g em coordenadas polares, temos que

$$g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} = \cos \theta \sin \theta.$$

Evidentemente, $|\cos \theta \sin \theta| \leq 1$ e portanto temos que $g(x, y)$ é limitada. Logo, pela proposição anterior, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$.

2.4 Continuidade de uma Função de duas Variáveis

DEFINIÇÃO 2.4.1 Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis e $(x_0, y_0) \in D$. Dizemos que f é contínua em (x_0, y_0) se, e somente se, satisfaz as condições:

- (i) $f(x_0, y_0)$ existe
- (ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ existe
- (iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

EXEMPLO 2.4.2 Verifique se a função $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ é contínua em $(0, 0)$.

Solução: Devemos verificar se f satisfaz as condições da Definição 2.4.1.

- (i) Como $f(0, 0) = 0$, a primeira condição está satisfeita.
- (ii) Vimos no Exemplo 2.3.5 que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ não existe. Portanto, a segunda condição da Definição 2.4.1 não é satisfeita.

Logo, $f(x, y)$ não é contínua em $(0, 0)$.

EXEMPLO 2.4.3 A função definida por $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - (y - 1)^4}{x^2 + (y - 1)^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 1) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 1) \end{cases}$ é contínua em $(0, 1)$?

Solução: Devemos verificar se f satisfaz as condições da Definição 2.4.1.

- (i) Como $f(0, 1) = 0$, a primeira condição está satisfeita.
- (ii) Vamos verificar se $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x, y)$ existe e é igual a zero (se for diferente a função não será contínua no ponto)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^4 - (y - 1)^4}{x^2 + (y - 1)^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{[x^2 - (y - 1)^2][x^2 + (y - 1)^2]}{x^2 + (y - 1)^2} = 0.$$

(iii) Dos itens anteriores, segue que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x,y) = 0 = f(0,1).$$

Portanto, a função $f(x,y)$ dada é contínua no ponto $(0,1)$.

EXEMPLO 2.4.4 Verifique se a função $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é contínua em $(0,0)$.

Solução: Devemos verificar se f satisfaz as condições da Definição 2.4.1.

(i) Como $f(0,0) = 0$, a primeira condição está satisfeita.

(ii) Como vimos no Exemplo 2.3.6, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$, a segunda condição está satisfeita.

(iii) Segue dos itens anteriores que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0).$$

Portanto, as três condições da Definição 2.4.1 estão satisfeitas. Logo, $f(x,y)$ é contínua em $(0,0)$.

2.5 Derivadas Parciais

As técnicas, regras e fórmulas desenvolvidas para derivação de funções de uma variável são generalizadas para funções de duas ou mais variáveis.

DEFINIÇÃO 2.5.1 Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis e $(x,y) \in D$. As derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ de f em (x,y) são dadas por

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

e

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

EXEMPLO 2.5.2 Seja $f(x,y) = x^2y + xy^2$ encontre $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

Solução: Aplicando a Definição 2.5.1 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 y + (x + \Delta x) y^2 - (x^2 y + x y^2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 y + 2xy\Delta x + y(\Delta x)^2 + xy^2 + y^2\Delta x - x^2 y - xy^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2xy\Delta x + y(\Delta x)^2 + y^2\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2xy + y\Delta x + y^2)\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2xy + y\Delta x + y^2 = 2xy + y^2. \end{aligned}$$

Analogamente, encontra-se que $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = x^2 + 2xy$.

OBSERVAÇÃO 2.5.3 Note que, para encontrar $\frac{\partial f}{\partial x}$ bastou considerar y como uma constante na função $f(x, y)$ e aplicar as regras de derivação estudadas na derivação de funções de uma variável. Para encontrar $\frac{\partial f}{\partial y}$ deriva-se em relação a y , mantendo x constante.

EXEMPLO 2.5.4 Seja $f(x, y) = 3x^2y + 2\sin xy$, encontre $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Solução: Tomando y constante no primeiro caso e x no segundo, obtemos

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 6xy + 2y \cos xy$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 3x^2 + 2x \cos xy.$$

OBSERVAÇÃO 2.5.5 No caso de f ter mais de duas variáveis, são consideradas constantes todas as variáveis em relação a qual f não está sendo derivada.

EXEMPLO 2.5.6 Seja $f(x, y, z, t) = 3x^2yz^3t^2 + 2\sin x^2yz^3t^2$. Encontre as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ e $\frac{\partial f}{\partial t}$.

Solução: Fazendo y, z, t constantes podemos derivar parcialmente em x :

$$\frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x} = 6xyz^3t^2 + 4xyz^3t^2 \cos x^2yz^3t^2.$$

Agora, fazendo x, z, t constantes, obtemos a derivada parcial em relação a y :

$$\frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial y} = 3x^2z^3t^2 + 2x^2z^3t^2 \cos x^2yz^3t^2.$$

Tomando x, y, t constantes temos a derivada parcial em z :

$$\frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial z} = 9x^2yz^2t^2 + 6x^2yz^2t^2 \cos x^2yz^3t^2.$$

Finalmente, mantendo x, y, z constantes, encontramos

$$\frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} = 6x^2yz^3t + 4x^2yz^3t \cos x^2yz^3t.$$

2.5.7 Interpretação Geométrica das derivadas parciais

Podemos interpretar geometricamente a derivada parcial como uma taxa de inclinação.

Seja $f(x, y)$ uma função de duas variáveis e seja $y = y_0$. Então, $f(x, y_0)$ descreve uma curva sobre a superfície S . Marcamos um ponto $P(x_0, y_0)$ sobre a curva $f(x, y_0)$ e traçamos uma reta tangente à curva neste ponto com coeficiente angular $m = \tan \alpha$. Então $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \tan \alpha$, ou seja, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva $f(x, y_0)$ no ponto $P(x_0, y_0)$ (veja a Figura 2.11). Analogamente, $\frac{\partial f}{\partial y}$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva $f(x_0, y)$ no ponto $P(x_0, y_0)$, conforme ilustra a Figura 2.12.

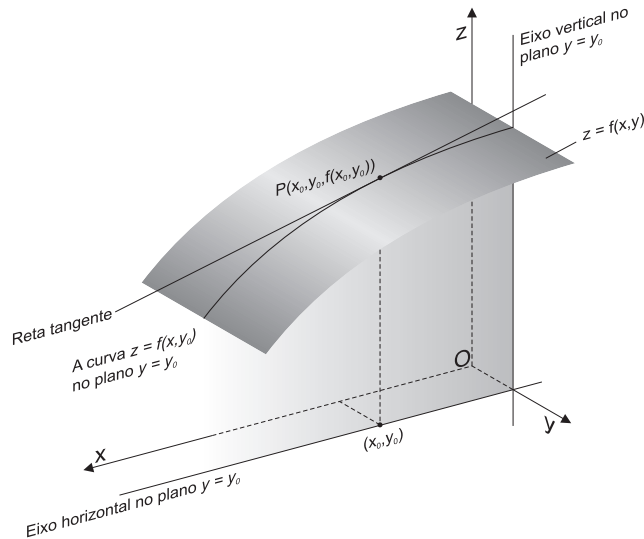


Figura 2.11: Interpretação Geométrica de $\frac{\partial f}{\partial x}$

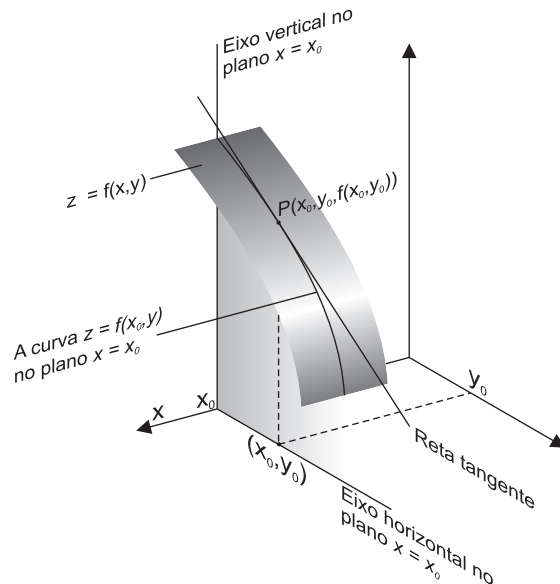


Figura 2.12: Interpretação Geométrica de $\frac{\partial f}{\partial y}$

EXEMPLO 2.5.8 Determine a equação de um plano que seja tangente ao parabolóide $z = x^2 + y^2$, no ponto $P(1, 2, 5)$.

Solução: Note que a superfície desejada é o gráfico da função $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Para determinar a equação do plano tangente desejado, devemos obter dois vetores pertencentes a este plano, ou seja, dois vetores tangentes ao parabolóide, no ponto P . Para isso, fazendo $y = 2$ encontramos a curva $z = f(x, 2) = x^2 + 4$. A reta tangente a essa curva, no ponto P , é dada por

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) = 2x_0(x - x_0),$$

ou seja,

$$z - 5 = 2(x - 1) \quad \Rightarrow \quad z = 2x + 3, \quad \text{no plano } y = 2.$$

Da geometria analítica, temos que o vetor diretor a esta reta tangente é dado por $b_1 = (1, 0, 2)$. Da mesma forma, fazendo $x = 1$, obtemos a curva $z = f(1, y) = 1 + y^2$, cuja reta

tangente, em P , é dada por

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) = 2y_0(y - y_0),$$

ou seja,

$$z - 5 = 4(y - 2) \Rightarrow z = 4y + 3 \text{ no plano } x = 1.$$

Assim, encontramos o vetor diretor $b_2 = (0, 1, 4)$. Agora podemos obter o vetor normal ao plano tangente desejado, tomando

$$b = b_1 \times b_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-2, -4, 1).$$

Portanto, a equação geral do plano desejado é dada por

$$-2x - 4y + 1z + d = 0.$$

Como este plano deve passar por $P(1, 2, 5)$, substituindo suas coordenadas na equação acima, obtemos $d = 5$. Portanto o plano tangente ao parabolóide $z = x^2 + y^2$ no ponto $P(1, 2, 5)$, tem equação $-2x - 4y + z + 5 = 0$.

2.6 Derivadas Parciais de Ordem Superior

Seja $z = f(x, y)$ uma função cujas derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ também são deriváveis. Cada uma dessas derivadas parciais poderá ser novamente derivada em relação a x e a y . Denotaremos:

- $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ é a segunda derivada parcial de f em relação a x ;
- $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ é a terceira derivada parcial de f em relação a x ;
- $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ é a segunda derivada parcial de f primeiro em relação a x e depois em relação a y ;
- $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ é a segunda derivada parcial de f primeiro em relação a y e depois em relação a x ;
- $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$ é a terceira derivada parcial de f em relação a y ;

No caso da função f ter mais de duas variáveis a notação segue a mesma lógica. Por exemplo, se temos $f(x, y, z, t)$ tem-se

- $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right) \right) = \frac{\partial^4 f}{\partial t \partial z \partial y \partial x}$ para representar a quarta derivada de f , primeiro em relação a x , depois em relação a y e assim sucessivamente.

EXEMPLO 2.6.1 Seja $f(x, y, z, t) = x^3 y^4 z^5 t^2$ encontrar $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z \partial t}$.

Solução: Derivamos inicialmente em relação a t , obtendo

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, y, z, t) = 2x^3 y^4 z^5 t,$$

a seguir, derivamos em relação a z

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial t}(x, y, z, t) = 10x^3 y^4 z^4 t,$$

para após derivarmos em y

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial t}(x, y, z, t) = 40x^3 y^3 z^4 t,$$

e finalmente derivarmos em x e obter

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z \partial t}(x, y, z, t) = 120x^2 y^3 z^4 t.$$

EXEMPLO 2.6.2 Uma função de duas variáveis u é dita harmônica se satisfaz a equação $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, conhecida como equação de Laplace em $\mathbb{R}^2$. Mostre que a função

$$u(x, y) = e^x \sin y + e^y \cos x$$

é uma função harmônica.

Solução: Tomando as derivadas parciais sucessivas de u , temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= (\sin y) e^x - (\sin x) e^y \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= (\sin y) e^x - (\cos x) e^y \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= (\cos x) e^y + (\cos y) e^x \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= (\cos x) e^y - (\sin y) e^x.\end{aligned}$$

Substituindo na equação de Laplace, obtemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (\sin y) e^x - (\cos x) e^y + (\cos x) e^y - (\sin y) e^x = 0.$$

Como a função u dada satisfaz a equação de Laplace, mostramos que ela é uma função harmônica.

2.7 Derivada de uma Função Composta

Antes de discutir a derivada de uma função composta, vamos falar sobre composição de funções de duas variáveis.

Consideremos as funções $u(x, y) = x^2y + y$ e $v(x, y) = x + y^2$. Podemos definir uma nova função F por $F(u, v) = 2u^2 + 3v$. Reescrevendo F em função de x e y temos:

$$\begin{aligned} F(u(x, y), v(x, y)) &= 2[u(x, y)]^2 + 3[v(x, y)] \\ &= 2(x^2y + y)^2 + 3(x + y^2) \\ &= 2(x^4y^2 + 2x^2y^2 + y^2) + 3x + 3y^2 \\ &= 2x^4y^2 + 4x^2y^2 + 2y^2 + 3x + 3y^2 \\ &= 2x^4y^2 + 4x^2y^2 + 5y^2 + 3x \end{aligned}$$

e assim,

$$F(u(1, 2), v(1, 2)) = 2(1)^4(2)^2 + 4(1)^2(2)^2 + 5(2)^2 + 3(1) = 47.$$

Ou, como

$$u(x, y) = x^2y + y \quad \text{e} \quad v(x, y) = x + y^2$$

segue que

$$u(1, 2) = (1)^2 2 + 2 = 4 \quad \text{e} \quad v(1, 2) = 1 + 2^2 = 5,$$

e então

$$F(u(1, 2), v(1, 2)) = F(4, 5) = 2(4)^2 + 3(5) = 47.$$

Nosso interesse é encontrar $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$. A função

$$F(x, y) = 2x^4y^2 + 4x^2y^2 + 5y^2 + 3x$$

pode ser escrita como uma função x e y . Isto é,

$$F(u(x, y), v(x, y)) = 2x^4y^2 + 4x^2y^2 + 5y^2 + 3x$$

e, nesse caso, temos

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 8x^3y^2 + 8xy^2 + 3$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 4x^4y + 8x^2y + 10y.$$

Como podemos observar, obter as derivadas parciais através desse processo não é muito animador. Isso é motivação suficiente para estudar a **Regra da Cadeia**. Se tivermos uma função composta $f(g(x))$ sabemos que $[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$. A mesma teoria é aplicada para encontrar a derivada parcial de uma função composta de várias variáveis.

DEFINIÇÃO 2.7.1 *Seja $z(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$ então*

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial F(u, v)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F(u, v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial F(u, v)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F(u, v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

EXEMPLO 2.7.2 Consideremos as funções $u(x, y) = x^2y + y$ e $v(x, y) = x + y^2$. Definindo uma nova função z por $z(x, y) = F(u, v) = 2u^2 + 3v$. Encontre as derivadas parciais de z em relação a x e y .

Solução: Inicialmente, determinamos as derivadas parciais das funções $u(x, y)$, $v(x, y)$ e $F(u, v)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} &= 4u, & \frac{\partial u}{\partial x} &= 2xy, & \frac{\partial v}{\partial x} &= 1, \\ \frac{\partial F}{\partial v} &= 3, & \frac{\partial u}{\partial y} &= x^2 + 1, & \frac{\partial v}{\partial y} &= 2y. \end{aligned}$$

e utilizando a regra da cadeia (Definição 2.7.1), obtemos as derivadas parciais

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= 4u \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= 4(x^2y + y)(2xy) + 3(1) \\ &= 8x^3y^2 + 8xy^2 + 3 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= 4u \frac{\partial u}{\partial y} + 3 \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= 4(x^2y + y)(x^2 + 1) + 3(2y) \\ &= 4x^4y + 8x^2y + 10y. \end{aligned}$$

EXEMPLO 2.7.3 Determine $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ para $F(x, y) = \ln \sqrt[5]{(x^4 + 2xy + y^3) + (2xy + 3x^2)}$.

Solução: Podemos reescrever a função F como $F(u, v) = \ln(u + v)^{\frac{1}{5}}$, onde

$$u(x, y) = x^4 + 2xy + y^3$$

e

$$v(x, y) = 2xy + 3x^2.$$

Usando a regra da cadeia, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{1}{5} \frac{1}{u + v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{5} \frac{1}{u + v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{1}{5} \frac{(4x^3 + 2y) + (2y + 6x)}{x^4 + y^3 + 4xy + 3x^2} \\ &= \frac{6x + 4y + 4x^3}{20xy + 15x^2 + 5x^4 + 5y^3}. \end{aligned}$$

O cálculo da derivada em relação a y é deixado como exercício para o estudante.

EXEMPLO 2.7.4 Variação dos valores de uma função ao longo de uma hélice:

Encontre $\frac{dw}{dt}$ se $w = xy + z$ onde $x = \cos t$, $y = \sin t$ e $z = t$. Qual é o valor desta derivada em $t = 0$?

Solução: Pela regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= y(-\sin t) + x(\cos t) + 1(1) \\ &= \sin t(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + 1 \\ &= -\sin^2 t + \cos^2 t + 1 = 1 + \cos 2t.\end{aligned}$$

Logo, para $t = 0$, temos que $\frac{dw}{dt} = 1 + \cos 0 = 2$.

EXEMPLO 2.7.5 Sendo α uma constante e $w = f(u, v)$, onde $u = x \cos \alpha - y \sin \alpha$ e $v = x \sin \alpha + y \cos \alpha$, sabendo que f é diferenciável mostre que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

Solução: Usando a regra da cadeia para as derivadas parciais de primeira e segunda ordem obtemos:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial v} \sin \alpha$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \right) + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right) \\ &= \cos \alpha \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \sin \alpha \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \cos \alpha \sin \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \quad (1)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} (-\sin \alpha) + \frac{\partial f}{\partial v} \cos \alpha$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \right) + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right) \\ &= -\sin \alpha \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \cos \alpha \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \cos \alpha \sin \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} - \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \quad (2)\end{aligned}$$

Das Expressões (1) e (2), temos:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$$

e assim provamos que de fato a equação dada é verdadeira.

2.8 Derivadas de Funções Implícitas

Seja $y = y(x)$ uma função definida implicitamente pela equação $F(x, y) = 0$. Por exemplo, $x^2 + y^2 - 9 = 0$ ou $x^2y^3 + x^3y^2 + xy + x + y - 9 = 0$. A equação $x^2 + y^2 - 9 = 0$ pode ser facilmente explicitada em função de x ou de y . Porém, não podemos fazer o mesmo com a equação $x^2y^3 + x^3y^2 + xy + x + y - 9 = 0$. Também, fazendo $F(x, y) = x^2 + y^2 - 9$ facilmente encontramos $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dx}{dy}$, o mesmo não ocorre se fizermos $F(x, y) = x^2y^3 + x^3y^2 + xy + x + y - 9$.

Nosso interesse está em encontrar uma forma de determinar com rapidez as derivadas $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dx}{dy}$.

Inicialmente, vamos resolver o problema usando o conhecimento adquirido em Cálculo I. Vamos derivar y implicitamente em relação a x , na equação

$$x^2y^3 + x^3y^2 + xy + x + y - 9 = 0,$$

obtendo

$$\begin{aligned} (2xy^3 + 3x^2y^2y') + (3x^2y^2 + 2x^3yy') + (y + xy') + 1 + y' &= 0 \\ (3x^2y^2y' + 2x^3yy' + xy' + y') + (2xy^3 + 3x^2y^2 + y + 1) &= 0 \\ (3x^2y^2 + 2x^3y + x + 1)y' &= -(2xy^3 + 3x^2y^2 + y + 1). \end{aligned}$$

Logo,

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^3 + 3x^2y^2 + y + 1}{3x^2y^2 + 2x^3y + x + 1}. \quad (\text{I})$$

Sendo $F(x, y) = x^2y^3 + x^3y^2 + xy + x + y - 9$, obtemos as derivadas parciais de F , dadas por

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 2xy^3 + 3x^2y^2 + y + 1$$

e

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 3x^2y^2 + 2x^3y + x + 1.$$

Observando estes resultados e comparando com (I), podemos escrever a fórmula

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}}$$

sempre que $F(x, y)$, $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$ forem contínuas em (x, y) e $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \neq 0$.

Se $z = z(x, y)$ é definida implicitamente em função de x e y pela equação $F(x, y, z) = 0$, usando o mesmo procedimento anterior obtém-se suas derivadas parciais, que serão denotadas por $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

EXEMPLO 2.8.1 Dada a função implícita $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$, encontrar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial x}$ e $\frac{\partial x}{\partial z}$.

Solução: Escrevendo $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$, obtemos

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} = 2x,$$

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} = 2y,$$

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = 2z.$$

Agora, substituindo convenientemente na fórmula acima, encontramos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z} = -\frac{x}{\sqrt{9 - (x^2 + y^2)}},$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{9 - (x^2 + z^2)}},$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = -\frac{2z}{2x} = -\frac{z}{x} = -\frac{z}{\sqrt{9 - (y^2 + z^2)}}.$$

EXEMPLO 2.8.2 Uma função $z(x, y)$ é dada **implicitamente** por uma equação do tipo $F\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{x^2}\right) =$

0, onde $F(u, v)$ é uma função diferenciável tal que $\frac{\partial F}{\partial v} \neq 0$. Mostre que z satisfaz a equação diferencial parcial $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

Resolução: Como z depende implicitamente de x e y , devemos utilizar a expressão para derivação implícita

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Agora, para obter as derivadas de F , definimos $u = \frac{x}{y}$ e $v = \frac{z}{x^2}$ e utilizamos a regra da cadeia para obter

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \left(\frac{1}{y}\right) + \frac{\partial F}{\partial v} \left(\frac{-2z}{x^3}\right) = \frac{1}{y} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{2z}{x^3} \frac{\partial F}{\partial v},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial F}{\partial v} \left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} \frac{\partial F}{\partial v},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \left(\frac{-x}{y^2}\right) + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot 0 = \frac{-x}{y^2} \frac{\partial F}{\partial u}.$$

Portanto, substituindo nas derivadas implícitas de z , obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\frac{1}{y} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{2z}{x^3} \frac{\partial F}{\partial v}}{\frac{1}{x^2} \frac{\partial F}{\partial v}} = -\frac{x^2}{y} \frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial v}} + \frac{2z}{x}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\frac{-x}{y^2} \frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{1}{x^2} \frac{\partial F}{\partial v}} = \frac{x^3}{y^2} \frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial v}}.$$

Portanto, substituindo na equação dada, temos

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x \left(-\frac{x^2}{y} \frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial v}} + \frac{2z}{x} \right) + y \left(\frac{x^3}{y^2} \frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial v}} \right) = \frac{-x^3}{y} \frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial v}} + 2z + \frac{x^3}{y} \frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial v}} = 2z.$$

2.9 Derivada Parcial como Taxa de Variação

Suponhamos que f é uma função de duas variáveis. Então, a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ nos dá a razão instantânea de variação de f , no ponto $P(x_0, y_0)$, por unidade de variação de x . Isto é, a taxa de variação de f por unidade de x no ponto $P(x_0, y_0)$. Analogamente, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ nos dá a taxa de variação de f por unidade de y .

EXEMPLO 2.9.1 Suponhamos que o volume de gás em um certo recipiente seja $V = 100 \text{ cm}^3$, a temperatura seja $T = 90^\circ\text{C}$ e a constante de proporcionalidade seja $k = 8$.

- (a) Encontre a taxa de variação instantânea da pressão P por unidade de T .
- (b) Encontre a taxa de variação instantânea de V por unidade de P .

Solução: De acordo com a lei dos gases ideais, para um gás comprimido vale a relação $PV = kT$. Na questão (a) do exercício estamos interessados na taxa de variação instantânea da pressão P por unidade de T , de modo que devemos escrever P em função de T e V , isto é,

$$P(T, V) = \frac{kT}{V}.$$

A taxa de variação instantânea da pressão P por unidade de T é dada pela derivada parcial

$$\frac{\partial P(T, V)}{\partial T} = \frac{k}{V}.$$

Assim, no ponto $P(90^\circ, 100)$, obtemos

$$\frac{\partial P(90^\circ, 100)}{\partial T} = \frac{8}{100} = 0,08.$$

Na questão (b) do exercício estamos interessados na taxa de variação instantânea de V por unidade de P , de modo que devemos escrever V em função de T e P , ou seja,

$$V(T, P) = \frac{kT}{P}.$$

A taxa de variação instantânea da pressão P por unidade de T é dada pela derivada parcial

$$\frac{\partial V(T, P)}{\partial P} = -\frac{kT}{P^2}.$$

Para determinar P usamos a relação

$$PV = kT$$

e obtemos

$$P = \frac{90(8)}{100} = 7,2.$$

Portanto,

$$\frac{\partial V(90, 7.2)}{\partial P} = -\frac{8(90)}{(7,2)^2} = -13,889.$$

EXEMPLO 2.9.2 A altura de um cone circular é 100 cm e decresce a uma razão de 10cm/s. O raio da base é 50cm e cresce à razão de 5cm/s. Determine a velocidade da variação do volume deste cone.

Solução: Primeiro vamos escrever o volume do cone em função do tempo:

$$V(t) = \frac{\pi r^2(t)h(t)}{3},$$

logo, pela regra da cadeia, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial V}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h} \frac{dh}{dt} = \frac{2\pi rh}{3} \frac{dr}{dt} + \frac{\pi r^2}{3} \frac{dh}{dt} \\ &= \frac{2\pi 50 \cdot 100}{3} (5) + \frac{\pi (50)^2}{3} (-10) \\ &= \frac{50000\pi}{3} - \frac{25000\pi}{3} = \frac{25000\pi}{3}. \end{aligned}$$

2.10 Diferencias Parciais e Totais

Os diferenciais de uma função nos dão uma **estimativa** da variação da função quando damos acréscimos às variáveis independentes.

Para entender o significado dos diferenciais parciais e total vamos, primeiramente, examinar alguns exemplos.

EXEMPLO 2.10.1 Consideremos um retângulo de lados x e y . A área desse retângulo é dada por $A(x, y) = xy$. Veja a Figura 2.13.

Se ao lado x for dado um acréscimo infinitesimal dx , a área do novo retângulo será dada por

$$A(x + dx, y) = (x + dx)y = xy + ydx$$

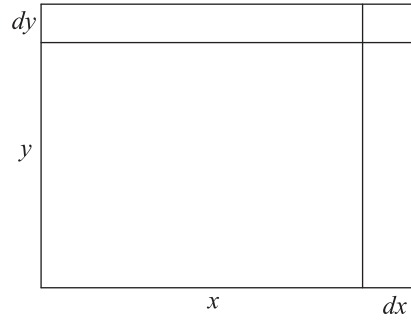


Figura 2.13: Acréscimos diferenciais nos lados de um retângulo

e assim obtemos

$$A(x + dx, y) - A(x, y) = ydx.$$

A variação infinitesimal desta área será $dA_x = ydx$.

Sendo $\frac{\partial A(x, y)}{\partial x} = y$, podemos escrever $dA_x = \frac{\partial A(x, y)}{\partial x} dx$.

Analogamente, a diferencial parcial em relação a y é dada por $dA_y = \frac{\partial A(x, y)}{\partial y} dy$.

Agora, se aos lados x e y forem dados acréscimos infinitesimais dx e dy , a área do novo retângulo será

$$\begin{aligned} A(x + dx, y + dy) &= (x + dx)(y + dy) \\ &= xy + ydx + xdy + dxdy \\ &= A(x, y) + ydx + xdy + dxdy \end{aligned}$$

e assim,

$$A(x + dx, y + dy) - A(x, y) = ydx + xdy + dxdy.$$

A estimativa da variação total dA , da área será

$$dA = ydx + xdy + dxdy.$$

Sendo $\frac{\partial A(x, y)}{\partial x} = y$, $\frac{\partial A(x, y)}{\partial y} = x$ e como o produto dos infinitesimais dx e dy é desprezível, isto é, $dxdy \approx 0$, podemos escrever

$$dA = \frac{\partial A(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial A(x, y)}{\partial y} dy.$$

EXEMPLO 2.10.2 Consideremos um paralelepípedo de lados x , y e z . Então o volume deste paralelepípedo será dado por $V(x, y, z) = xyz$. Desenvolvendo um raciocínio análogo ao do exemplo anterior obtemos:

$$V(x + dx, y, z) = (x + dx)yz = xyz + yzdx$$

ou seja,

$$V(x + dx, y, z) - V(x, y, z) = yzdx$$

e a variação infinitesimal do volume será $dV_x = yzdx$, que pode ser escrita como

$$dV_x = \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} dx.$$

Analogamente, obtemos

$$dV_y = \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} dy \quad \text{e} \quad dV_z = \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} dz.$$

Se aos lados x e y forem dados acréscimos infinitesimais dx e dy o volume do novo paralelepípedo será

$$\begin{aligned} V(x + dx, y + dy, z) &= (x + dx)(y + dy)z \\ &= xyz + yzdx + xzdy + zdx dy \\ &= V(x, y, z) + yzdx + xzdy + zdx dy \end{aligned}$$

e então

$$dV_{xy} = yzdx + xzdy + zdx dy.$$

O produto $zdx dy$ tende a zero. Logo, é desprezível e, portanto, a estimativa da variação infinitesimal parcial do volume do paralelepípedo após dado um acréscimo aos lados x e y será dada por

$$dV_{xy} = \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} dy.$$

Finalmente, se aos lados x, y, z forem dados acréscimos infinitesimais dx, dy e dz , o volume do novo paralelepípedo será

$$\begin{aligned} V(x + dx, y + dy, z + dz) &= (x + dx)(y + dy)(z + dz) \\ &= (xy + ydx + xdy + dxdy)(z + dz) \\ &= xyz + yzdx + xzdy + zdx dy + xydz + ydxdz + xdydz + dxdydz \end{aligned}$$

e então

$$V(x + dx, y + dy, z + dz) - V(x, y, z) = yzdx + xzdy + zdx dy + xydz + ydxdz + xdydz + dxdydz,$$

ou seja,

$$dV = yzdx + xzdy + zdx dy + xydz + ydxdz + xdydz + dxdydz.$$

Na Figura 2.14, podemos ver o paralelepípedo resultante dos acréscimos atribuídos a cada uma das variáveis e, na Figura 2.15, vemos cada um dos volumes resultantes que compõe o diferencial de volume dV .

Os produtos $zdx dy$, $ydxdz$, $xdydz$ e $dxdydz$ tendem a zero. Logo, a soma destes termos é desprezível e, portanto, a estimativa da variação infinitesimal total do volume do paralelepípedo, após dado um acréscimo aos lados x, y e z será dada por

$$dV = yzdx + xzdy + xydz,$$

que, em virtude de suas derivadas parciais, pode ser reescrita como

$$dV = \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} dz.$$

Geralmente, escreve-se

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz.$$

De forma geral,

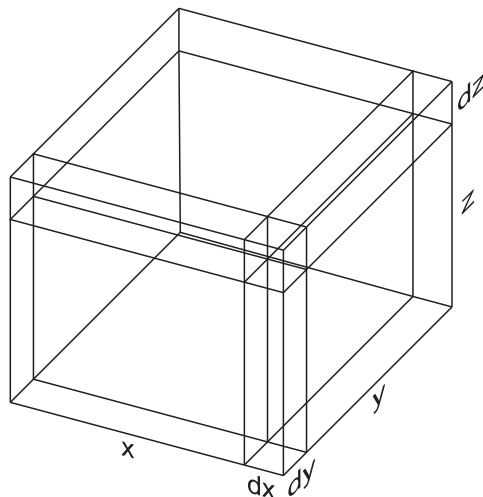


Figura 2.14: Papalelepípedo resultante dos acréscimos atribuídos a cada lado.

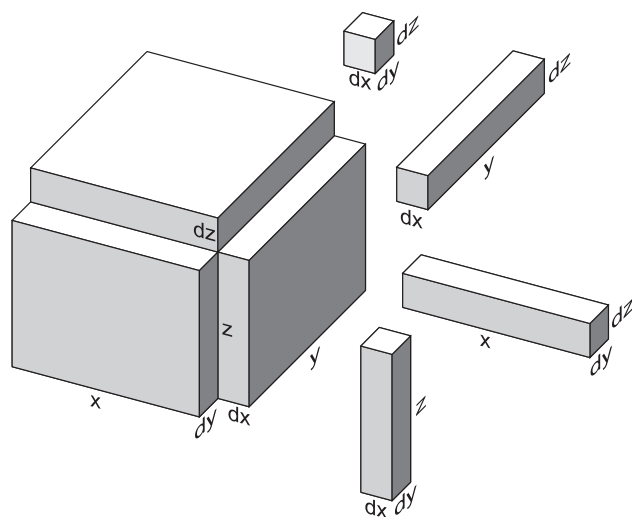


Figura 2.15: Volumes que compõe o diferencial de volume dV .

DEFINIÇÃO 2.10.3 Se $f(x, y, z)$ é uma função diferenciável, então a diferencial total de f é dada por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz. \quad (2.10.1)$$

EXEMPLO 2.10.4 Uma lata de metal fechada, na forma de um cilindro circular reto, possui altura interna igual a 6cm , raio interno 2cm e espessura $0,1\text{cm}$. Usando diferencial total faça uma estimativa da quantidade de material necessário para fabricação dessa lata em cm^3 .

Solução: O volume exato de metal necessário para fabricação da lata é dado pela diferença entre o volume interno e o volume total da lata. Sejam h a altura interna, H a altura total, r o raio interno e R o raio total. Então, teremos $h = 6\text{cm}$, $H = 6 + 2(0,1) = 6,2\text{cm}$, $r = 2\text{cm}$ e $R = 2 + 0,1 = 2,1\text{cm}$. Seja v o volume interno e V o volume total. Temos, então

$$v = \pi r^2 h = \pi (2)^2 6 = 24\pi \text{ cm}^3$$

e

$$V = \pi R^2 H = \pi (2,1)^2 6,2 = 27,342\pi \text{ cm}^3.$$

Portanto, a quantidade exata de material necessário é

$$\Delta V = V - v = 3,342\pi \text{ cm}^3.$$

Porém, a estimativa do volume de material necessário para fabricar a lata, obtida através da diferencial total é:

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial v}{\partial r} dr + \frac{\partial v}{\partial h} dh = 2\pi r h dr + \pi r^2 dh \\ &= 2\pi (2) (6) (0,1) + \pi (2)^2 (0,2) = 3,2\pi \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Note que, neste caso, a estimativa dV é menor do que ΔV , pois

$$\begin{aligned} \Delta V &= \pi(r + dr)^2 (h + dh) - \pi r^2 h \\ &= \pi r^2 dh + 2\pi r dr h + 2\pi r dr dh + \pi (dr)^2 h + \pi (dr)^2 dh \\ &= \frac{\partial v}{\partial h} dh + \frac{\partial v}{\partial r} dr + 2\pi r dr dh + \pi (dr)^2 h + \pi (dr)^2 dh \end{aligned}$$

e assim podemos ver que desprezamos, no cálculo anterior de dV , a combinação

$$2\pi r dr dh + \pi (dr)^2 h + \pi (dr)^2 dh,$$

o que nos mostra que $dV < \Delta V$.

EXEMPLO 2.10.5 Usando diferencial, determine a variação do volume do recipiente mostrado na Figura 2.16, quando sua altura aumenta em 3% e seu o raio decresce em 1%.

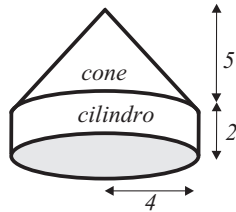


Figura 2.16: Recipiente do Exemplo 2.10.5

Solução: O volume desejado pode ser escrito como $V = V_1 + V_2$, onde V_1 é o volume do cilindro e V_2 é o volume do cone. No cilindro temos

$$V_1 = \pi R^2 h, \quad R = 4, h = 2, \quad dR = \frac{-4}{100} = -0.04; \quad dh = 2 \frac{3}{100} = 0.06$$

e no cone, temos

$$V_2 = \frac{\pi R^2 H}{3}, \quad R = 4, H = 5; \quad dR = \frac{-4}{100} = -0.04; \quad dH = 5 \frac{3}{100} = 0.15.$$

Portanto a diferencial do volume total é igual a

$$\begin{aligned} dV &= dV_1 + dV_2 \\ &= \left(\frac{\partial V_1}{\partial R} dR + \frac{\partial V_1}{\partial h} dh \right) + \left(\frac{\partial V_2}{\partial R} dR + \frac{\partial V_2}{\partial H} dH \right) \\ &= 2\pi R h dR + \pi R^2 dh + \frac{2\pi R h}{3} dR + \frac{\pi R^2}{3} dH \\ &= 2\pi \cdot 4 \cdot 2 \cdot (-0,04) + \pi \cdot 16 \cdot (0,06) + \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 5}{3} (-0,04) + \frac{16\pi}{3} (0,15) \\ &= -0,64\pi + 0,96\pi - \frac{1,6\pi}{3} + \frac{2,4\pi}{3} = 0,32\pi + \frac{0,8}{3}\pi \cong 0,59\pi. \end{aligned}$$

EXEMPLO 2.10.6 Vamos considerar uma lata cilíndrica fechada, com dimensões $r = 2\text{ cm}$ e $h = 5\text{ cm}$. O custo do material usado em sua confecção é de R\$ 0,81 por cm^2 . Se as dimensões sofrerem um acréscimo de 10% no raio e 2% na altura, qual será o valor aproximado do acréscimo no custo da caixa? E qual é o valor exato do acréscimo no custo da caixa?

Solução: Podemos escrever a função custo como

$$C(r, h) = 0.81(2\pi rh + 2\pi r^2),$$

onde $2\pi rh$ representa a área lateral da caixa e πr^2 a área da base e da tampa. Quando o raio de base sofre um acréscimo de 10%, passa de 2 para 2,2 cm, portanto $\Delta r = 0,2$. Quando a altura sofre um acréscimo de 2%, passa de 5 cm para 5,1 cm, portanto, $\Delta h = 0,1$. Vamos usar a diferencial para encontrar o valor aproximado do acréscimo do custo

$$\begin{aligned} dC &= \frac{\partial C}{\partial r} dr + \frac{\partial C}{\partial h} dh \\ &= 0,81(2\pi h + 4\pi r)dr + 0,81.(2\pi r)dh \\ &= 0,81(10\pi + 8\pi)0,2 + 0,81.(4\pi)0,1 \approx 10,17. \end{aligned}$$

Portanto, o valor aproximado do acréscimo no custo da caixa quando as dimensões são modificadas é de R\$10,17, ou um acréscimo de 14,28%.

Para saber o valor exato do acréscimo no custo da caixa, temos que calcular

$$\begin{aligned} \Delta C &= C(2,2; 5,1) - C(2, 5) \\ &= 0,81(2\pi(2,2) \cdot (5,1) + 2\pi(2,2)^2) - 0,81(20\pi + 8\pi) \approx 10,47. \end{aligned}$$

Assim, o valor exato é de R\$10,47, ou um acréscimo de 14,7%. Observamos, assim, que o erro do cálculo aproximado foi de 0,42%.

EXEMPLO 2.10.7 Uma caixa em forma de paralelepípedo, tem dimensões internas iguais a 6 cm, 8 cm e 12 cm. Sendo a espessura das paredes 0,2 cm, do fundo 0,3 cm e da tampa 0,1 cm, fazer uma estimativa em cm^3 do volume de material necessário a ser usado na confecção da caixa.

Solução: Vamos usar a diferencial total para fazer a estimativa solicitada. Sejam $x = 6$, $y = 8$ e $z = 12$. Como a espessura das paredes é 0,2 cm temos

$$dx = dy = 2(0,2) = 0,4$$

e sendo a espessura do fundo 0,3 e da tampa 0,1 temos

$$dz = 0,3 + 0,1 = 0,4.$$

Como $V = xyz$, segue que a estimativa desejada é dada por

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \\ &= yz dx + xz dy + xy dz \\ &= 8 \cdot 12 \cdot 0,4 + 6 \cdot 12 \cdot 0,4 + 6 \cdot 8 \cdot 0,4 = 86,4 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

EXEMPLO 2.10.8 O ângulo central de um setor circular é 80° e o raio desse setor é 20 cm. Qual deverá ser o acréscimo a ser dado no raio para que a área deste setor circular fique aproximadamente inalterada quando o ângulo central sofrer um decréscimo de 1° ?

Solução: Como a área do setor circular é dada por $A = \frac{r^2\theta}{2}$, com θ em radianos, devemos transformar os arcos fornecidos pelo problema, obtendo

$$\theta = 80^\circ = \frac{4\pi}{9} \text{ rad} \quad \text{e} \quad d\theta = -1^\circ = -\frac{\pi}{180} \text{ rad}.$$

O enunciado nos fornece ainda que $r = 20 \text{ cm}$ e pede para encontrarmos dr para o qual a área não se altera, ou seja, para que tenhamos $dA = 0$. Utilizando o diferencial total da área, temos que

$$dA = \frac{\partial A}{\partial r} dr + \frac{\partial A}{\partial \theta} d\theta = r\theta dr + \frac{r^2}{2} d\theta$$

e substituindo os dados acima, obtemos

$$0 = \frac{80\pi}{9} dr - \frac{10\pi}{9} \Rightarrow dr = \frac{1}{8} \text{ cm} = 0,125 \text{ cm}.$$

Portanto, com um acréscimo de 0,125 centímetros no raio, a área do setor circular ficará aproximadamente inalterada.

2.11 Extremos de uma Função de duas Variáveis

Seja f uma função de duas variáveis. Dizemos que f tem um máximo relativo no ponto (a, b) se existir uma bola aberta de centro (a, b) e raio $\epsilon > 0$ tal que, para todo (x, y) pertencente à bola, tem-se $f(x, y) \leq f(a, b)$. Por outro lado, se $f(x, y) \geq f(a, b)$ para todo (x, y) pertencente à bola, dizemos que f tem um ponto de mínimo relativo no ponto (a, b) .

Os pontos de máximos e de mínimos de f são denominados pontos extremos de f . A imagem de um ponto de máximo é chamada de valor máximo de f , da mesma forma que a imagem de um ponto de mínimo é denominada valor mínimo de f .

2.11.1 Ponto Crítico

DEFINIÇÃO 2.11.2 *Seja (a, b) um ponto pertencente ao domínio de f . Se $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ são ambas nulas ou se uma delas não existir, então (a, b) é denominado ponto crítico de f . Os pontos críticos de f são os candidatos a pontos de máximo ou mínimo.*

2.11.3 Ponto de Máximo e Ponto de Mínimo

TEOREMA 2.11.4 *Seja (a, b) um ponto pertencente ao domínio de f . Suponhamos que $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existem e são contínuas numa bola aberta de centro (a, b) . Suponhamos que (a, b) seja um ponto crítico e sejam ainda:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \Theta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b).$$

Então:

- (i) se $\Delta > 0$ e $\Theta < 0$, a função f tem um máximo relativo em (a, b) ;
- (ii) se $\Delta > 0$ e $\Theta > 0$, a função f tem um mínimo relativo em (a, b) ;
- (iii) se $\Delta = 0$, nada podemos afirmar;
- (iv) se $\Delta < 0$, a função f tem um ponto de sela em (a, b) .

EXEMPLO 2.11.5 Encontre os pontos críticos da função $f(x, y) = 4xy - x^4 - 2y^2$ e classifique-os como pontos de máximo, mínimo ou de sela.

Solução: Vamos iniciar encontrando os pontos críticos. Como as derivadas parciais são

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 4y - 4x \quad \text{e} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 4x - 4y$$

e estão sempre bem definidas, os pontos críticos de f são dados por

$$\begin{cases} 4x - 4y = 0 \\ 4y - 4x^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x - x^3 = 0 \Rightarrow x(1 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0; x = \pm 1$$

Assim os pontos críticos são $P(0, 0)$, $Q(1, 1)$ e $R(-1, -1)$. A seguir, vamos analisar o delta. Como

$$\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} -12x^2 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 48x^2 - 16,$$

temos que

$$\Delta(0, 0) = -16, \quad \Delta(1, 1) = 32 \quad \Delta(-1, -1) = 32.$$

Na sequência, vamos analisar o valor de $\Theta(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -12x^2$. Temos que

$$\Theta(0, 0) = 0 \quad \Theta(1, 1) = -12 \quad \Theta(-1, -1) = -12.$$

Portanto, de acordo com o Teorema 2.11.4, concluímos que

$$\begin{aligned} \Delta(0, 0) < 0 \text{ e o ponto } P(0, 0) \text{ é de sela,} \\ \Delta(1, 1) > 0 \text{ e } \Theta < 0 \text{ e o ponto } Q(1, 1) \text{ é ponto de máximo,} \\ \Delta(-1, -1) > 0 \text{ e } \Theta < 0 \text{ e o ponto } R(-1, -1) \text{ é ponto de máximo.} \end{aligned}$$

EXEMPLO 2.11.6 Determine as dimensões de uma caixa retangular sem tampa destinada ao acondicionamento de 108 cm^3 de volume se queremos usar a mínima quantidade em material para sua confecção.

Solução: Sejam x o comprimento da base, y a largura da base e z a altura da caixa, S a superfície e V o volume da caixa. Então podemos escrever o sistema

$$\begin{cases} S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz \\ V(x, y, z) = xyz \end{cases}$$

A função $S(x, y, z)$ pode ser escrita como uma função de duas variáveis, se z for substituído por $\frac{V}{xy}$. Desse modo temos

$$S(x, y) = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}.$$

Aplicando o Teorema 2.11.4, vamos determinar os pontos críticos de S . Inicialmente, devemos resolver o sistema de equações definido pelas derivadas parciais. Como

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial x}(x, y) = y - \frac{2V}{x^2} \\ \frac{\partial S}{\partial y}(x, y) = x - \frac{2V}{y^2} \end{cases}$$

temos que

$$\begin{cases} y - \frac{2V}{x^2} = 0 \\ x - \frac{2V}{y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yx^2 = 2V \\ xy^2 = 2V \end{cases} \Rightarrow yx^2 = xy^2$$

como sabemos que $x, y \neq 0$, podemos dividir ambos os lados da última igualdade por xy e encontrar que $x = y$. Portanto, obtemos que $2V = x^3$ e como $V = 108$, segue que $x = \sqrt[3]{2(108)} = 6$ e $y = 6$. Logo, o ponto $(a, b) = (6, 6)$ é único ponto crítico da função $S(x, y) = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}$.

Na sequência, vamos classificar este ponto crítico. Para isso, precisamos obter os valores de $\Delta(6, 6)$ e $\Theta(6, 6)$. Tomando as segundas derivadas, temos que

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x, y) = \frac{4V}{x^3} \quad \text{donde vem} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(6, 6) = \frac{4(108)}{6^3} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}(x, y) = 1 \quad \text{donde vem} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}(6, 6) = 1,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x}(x, y) = 1 \quad \text{donde vem} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x}(6, 6) = 1,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}(x, y) = \frac{4V}{y^3} \quad \text{donde vem} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}(6, 6) = \frac{4(108)}{6^3} = 2.$$

Portanto,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \quad \text{e} \quad \Theta = 2.$$

Como $\Delta = 3 > 0$ e $\Theta = 2 > 0$, pelo segundo item do Teorema 2.11.4, obtemos que f tem um mínimo relativo no ponto $(6, 6)$. Logo, as dimensões da base da caixa são $x = 6\text{cm}$ e $y = 6\text{cm}$. Ainda, como $z = \frac{V}{xy}$ segue que $z = \frac{108}{6(6)} = 3$.

Portanto, as dimensões da caixa, para que o custo de fabricação seja mínimo, são $x = 6\text{ cm}$, $y = 6\text{ cm}$ e $z = 3\text{ cm}$.

EXEMPLO 2.11.7 *Um fabricante faz 2 modelos de um item, padrão e de luxo. Custa R\$ 40,00 para fabricar um modelo padrão e R\$ 60,00 para o de luxo. Uma firma de pesquisa de mercado estima que se o modelo padrão for vendido por x reais e o de luxo por y reais, então o fabricante venderá $500(y - x)$ do item padrão e $45000 + 500(x - 2y)$ do de luxo a cada ano. Com que preços os itens devem ser vendidos para maximizar o lucro?*

Solução: A função lucro é dada por:

$$L(x, y) = 500(y - x)(x - 40) + (45000 + 500(x - 2y))(y - 60).$$

As derivadas parciais de L são dadas por

$$\frac{\partial L(x, y)}{\partial x} = 1000y - 1000x - 10\,000$$

e

$$\frac{\partial L(x, y)}{\partial y} = 1000x - 2000y + 85\,000$$

Como as derivadas estão sempre bem definidas, para encontrar os pontos críticos de L devemos fazer

$$\frac{\partial L(x, y)}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial L(x, y)}{\partial y} = 0$$

Resolvendo este sistema, temos

$$\begin{cases} 1000y - 1000x - 10\,000 = 0 \\ 1000x - 2000y + 85\,000 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1000x + 1000y = 10\,000 \\ 1000x - 2000y = -85\,000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 65 \\ y = 75 \end{cases}.$$

Portanto, o único ponto crítico é $(65, 75)$. Vamos analisar se este ponto crítico é um ponto de máximo. Como

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -1000, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2000,$$

e

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1000, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = 1000,$$

temos que

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1000 & 1000 \\ 1000 & -2000 \end{vmatrix} = 10^6 > 0 \quad \text{e} \quad \Theta = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -1000 < 0.$$

Portanto, o ponto $P(65, 75)$ é, de fato, um ponto de máximo. Logo, o item padrão será vendido por R\$ 65,00 e o de luxo por R\$ 75,00.

EXEMPLO 2.11.8 Encontre as coordenadas do ponto que pertence ao plano $3x + 2y - z + 10 = 0$ e cujo quadrado da distância ao ponto $P(1, 2, 3)$ seja mínimo.

Solução: Seja $Q(x, y, z)$ as coordenadas do ponto desejado. Queremos encontrar o ponto mínimo da função dada por

$$d(Q, P)^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2,$$

com a condição $z = 3x + 2y + 10$. Substituindo esta expressão na função acima, obtemos a função

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (3x + 2y + 7)^2.$$

Para encontrar os pontos críticos de f , tomamos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - 1) + 6(3x + 2y + 7) = 20x + 12y + 40$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y - 2) + 4(3x + 2y + 7) = 12x + 10y + 24.$$

Como estas derivadas parciais estão sempre bem definidas, o ponto crítico de f é dado pela solução do sistema

$$\begin{cases} 20x + 12y + 40 = 0 \\ 12x + 10y + 24 = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $x = -2$ e $y = 0$. Para classificar este ponto crítico, tomamos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 20 & 12 \\ 12 & 10 \end{vmatrix} = 56 > 0 \quad \text{e} \quad \theta = 20 > 0.$$

Portanto vemos que o ponto crítico é ponto de mínimo. Portanto, as coordenadas do ponto do plano $z = 3x + 2y + 10$ desejado são dadas por

$$x = -2 \quad y = 0 \quad z = 4.$$

2.12 Exercícios Gerais

1. Represente geometricamente as superfícies de equações:

$$(a) x^2 + y^2 + z^2 = 25; \quad (b) x^2 + y^2 - z^2 = 25;$$

$$(c) 9x + 4y + 12z = 36; \quad (d) z^2 - x^2 - y^2 = 0.$$

2. Dada a função $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$, determine as curvas de nível $z = \frac{1}{4}$, $z = 4$ e $z = 9$. A seguir, faça um esboço do gráfico desta função.

3. Descreva e represente geometricamente as superfícies de nível de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

4. Usando a definição mostre que:

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} (3x + 2y) = 8 \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} (2x - 4y) = -10.$$

5. Em cada exercício abaixo verifique se $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ existe

$$(a) f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \quad (b) f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \quad (c) f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

$$(d) f(x, y) = \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2} \quad (e) f(x, y) = \frac{x^2 + y^3}{x^2 + y^2} \quad (f) f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$$

6. Calcule, se possível, o valor de

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{2x(y-2)}{3x^2 + y^2 - 4y + 4} \quad (b) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (2,1,0)} \frac{(x+y+z-3)^5}{(x-2)(y-1)z^3}$$

7. Calcule, se possível, o valor dos limites abaixo. Justifique a sua resposta.

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (3,0)} \frac{(x-3)^5 y^2 + (x-3)^4 y^4}{(x^2 - 6x + 9 + y^6)^3}$$

$$(c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,5)} \frac{x^3(y-5)^2}{2x^7 + 3(y-5)^4} \quad (d) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 y^2 z^2}{x^6 + y^6 + z^6}$$

8. Em cada função verifique se f é contínua:

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x+y} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (d) f(x, y) = \begin{cases} \frac{5xy^2 - 3x^2y}{2x^2 + y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

9. Verifique se as funções dadas abaixo são contínuas ou não:

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (d) f(x, y) = \begin{cases} \frac{3xy^2 - 6y}{x^2 - 4x + 4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (2, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (2, 0) \end{cases}$$

$$(e) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (f) f(x, y) = \begin{cases} \frac{3y^4(x+1)^4}{(y^4 + x^2 + 2x + 1)^3} & \text{se } (x, y) \neq (-1, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (-1, 0) \end{cases}$$

10. Determine se a função $f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^3 + 5y^3 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ b, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ é contínua na origem para algum valor de $b \in \mathbb{R}$. Justifique sua resposta com argumentos consistentes, explicitando o valor de b e uma relação entre ε e δ , se for o caso.
11. Determine se a função $f(x, y) = \begin{cases} \frac{5x^2(y-2)}{x^2 + y^2 - 4y + 4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 2) \\ b, & \text{se } (x, y) = (0, 2) \end{cases}$ é contínua em $(0, 2)$ para algum valor de $b \in \mathbb{R}$. Justifique sua resposta com argumentos consistentes, explicitando o valor de b e uma relação entre ε e δ , se for o caso.
12. Determine se a função $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x^2y + y^2}{2x^2 + 2y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ b, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ é contínua na origem para algum valor de $b \in \mathbb{R}$. Justifique sua resposta com argumentos consistentes, explicitando o valor de b e uma relação entre ε e δ , se for o caso.
13. Determine se a função $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{(x-3)(y+2)(z-1)^2}{(2x+y-3z-1)^4}, & \text{se } (x, y, z) \neq (3, -2, 1) \\ b, & \text{se } (x, y, z) = (3, -2, 1) \end{cases}$ é contínua em $(3, -2, 1)$ para algum valor de b . Justifique sua resposta com argumentos consistentes.
14. Utilize argumentos consistentes para calcular, se existir, o valor de $f(0, 0)$, onde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua dada por
- $$f(x, y) = 1 + xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{se } (x, y) \neq (0, 0).$$
15. Escreva as funções abaixo na forma de funções composta e encontre as derivadas parciais em relação a x e y .
- (a) $z = \ln \sqrt{x^2 e^{2y} + x^2 e^{-2y}}$ (b) $z = \ln \left((e^{x+y^2})^2 + x^2 + y \right)$
- (c) $z = x^2 \cos^2 y + 2x^2 \sin y \cos y + x^2 \sin^2 y$ (d) $z = \sqrt{x + y^2 + (x^2 e^{-2y})^3}$
16. Usando a regra da cadeia, encontre as derivadas parciais de
- (a) $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2 + y^2 + 1}$ (b) $f(x, y) = \ln \sqrt[3]{(x^2 + y^2) + (2x + y^2 x^2)}$
17. Mostre que $z = \sin\left(\frac{x}{y}\right) + \ln\left(\frac{y}{x}\right)$ é solução da equação diferencial $y \frac{\partial z}{\partial y} + x \frac{\partial z}{\partial x} = 0$.
18. Verifique se a função $f(x, y, z) = x^2 \sin\left(\frac{y}{z}\right) + y^2 \ln\left(\frac{z}{x}\right) + z^2 e^{x/y}$ é uma solução da equação diferencial parcial $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = 2f$.
19. Se $z = \ln(x^2 + y^2)$ mostre que $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.
20. Verifique se a função $f(x, y) = e^{xy} + \ln\left(\frac{2y^2}{x^2}\right)$ é uma solução da equação diferencial parcial $\frac{x}{y} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{y}{x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2xye^{xy}$.

21. Se $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ mostre que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.
22. Sejam $f(x, y, z) = x^3 y^4 z^5 + x \sin yz$ e $g(x, y) = e^x \ln y$. Encontre todas as derivadas parciais de f e g até a terceira ordem.
23. Use a lei do gás comprimido $PV = kT$, com $k = 10$, para encontrar a taxa de variação instantânea da temperatura no instante em que o volume do gás é 120 cm^3 e está sob uma pressão de 8 din/cm^2 , a taxa de crescimento é $2 \text{ cm}^3/\text{s}$, a pressão decresce a taxa de $0,1 \text{ din/cm}^2 \cdot \text{s}$. Sugestão: escreva P , V e T em função do tempo.
24. A energia consumida num resistor elétrico, em função da voltagem V e da resistência R é dada por $P = \frac{V^2}{R}$. Deseja-se que um determinado resistor tenha uma voltagem de 200 volts e uma resistência de 20 ohms .
- (a) Qual deverá ser a variação na resistência para que a energia consumida nesse resistor fique praticamente inalterada quando a voltagem sofrer um decréscimo de $0,2 \text{ volts}$?
- (b) Se esse resistor consumir 3% a mais que a energia desejada quando sua resistência for 1% menor que a desejada, qual será a variação percentual da sua voltagem?
25. Determine uma equação para o plano que é tangente à superfície $-2x^2 + y^2 = \frac{-z}{2}$, no ponto $P(-1, 1, 2)$.
26. Encontre a equação do plano tangente à superfície $-12x^2 + 3y^2 - z = 0$, no ponto $P(1, 4, 36)$.
27. Encontre um ponto da superfície $z = 3x^2 - y^2$ onde seu plano tangente é paralelo ao plano $6x + 4y - z = 5$.
28. Determine a equação do plano que é tangente a superfície definida implicitamente por $z^3 - (x^2 + y^2)z + 2 = 0$ no ponto $P(1, 2, 2)$.
29. Sabe-se que a equação $x^2 + z^3 - z - xy \sin z = 1$ define implicitamente uma função $z = f(x, y)$ cujo gráfico passa pelo ponto $P(1, 1, 0)$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto P .
30. Sabendo que o plano $2x + y + 3z - 6 = 0$ é paralelo ao plano tangente ao gráfico de $z = f(x, y)$, no ponto $P(1, 1, 1)$, calcule os valores de $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$.
31. Mostre que o vetor normal do plano tangente ao gráfico de $z = f(x, y)$, no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, é dado por $\vec{n} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1 \right)$. A seguir, mostre que todos os planos tangentes ao gráfico de $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ passam pela origem.
32. Seja $z = f(u)$, com $u = x + ay^2$. Prove que $\frac{\partial z}{\partial y} - 2ay \frac{\partial z}{\partial x} = 0$.
33. Seja $f(x - y, y - z, z - x)$ uma função diferenciável. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$.

34. Dada uma função $f\left(\frac{y-x}{xy}, \frac{z-y}{yz}\right)$, calcule $x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + y^2 \frac{\partial f}{\partial y} + z^2 \frac{\partial f}{\partial z}$.
35. Seja $w = xf\left(\frac{y}{x}\right) - g\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$, onde f e g são funções diferenciáveis. Mostre que
- $$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{y}{x} \frac{\partial w}{\partial y} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$
36. Seja f uma função diferenciável qualquer e considere $w = x^3 f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{z}, \frac{z}{x}\right)$. Mostre que w satisfaz a equação diferencial parcial $x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z} = 3w$.
37. Seja $w = f(x^2 - at) + g(x + at^2)$, onde f e g são funções diferenciáveis e $a \in \mathbb{R}$. Calcule $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ e $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.
38. Seja $w = f(u) + g(v)$ uma função diferenciável, onde $u(x, t) = x^2 + t^2$ e $v(x, t) = x^2 - t^2$. Mostre que
- $$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 4 \frac{df}{du} + 4(x^2 + t^2) \left(\frac{d^2 f}{du^2} + \frac{d^2 g}{dv^2} \right).$$
39. Seja $w = f(x, y)$ uma função diferenciável, onde $x(r, \theta) = r \cos \theta$ e $y(r, \theta) = r \sin \theta$. Mostre que
- $$\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2.$$
40. Seja $y = y(x)$ uma função definida implicitamente por $x = F(u, v)$, onde F é diferenciável, $u = x^2 + y$ e $v = y^2$. Determine $\frac{dy}{dx}$ em função de x , y e das derivadas de F .
41. Seja $z = z(x, y)$ uma função definida implicitamente por $F(xy, z) = 0$, onde F é uma função diferenciável. Mostre que $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
42. Um pintor cobra R\$12,00 por m^2 para pintar as 4 paredes e o teto de uma sala. Se as medidas do teto são $12m$ e $15m$ e altura $3m$, com um erro de até $0,05m$ em todas as dimensões. Aproxime o erro, usando a diferencial, na estimativa do custo do trabalho, a partir dessas medidas.
43. A energia consumida num resistor elétrico é dada por $P = \frac{V^2}{R}$ watts. Se $V = 120$ volts e $R = 12$ ohms, calcular através da diferencial um valor aproximado para a variação de energia quando V decresce de $0,001V$ e R aumenta de $0,02$ ohms.
44. Um material está sendo escoado de um recipiente, formando uma pilha cônica. Num dado instante, o raio da base é de 12 cm e a altura é 8 cm. Obtenha uma aproximação da variação do volume, se o raio varia para $12,5$ cm e a altura para $7,8$ cm. Compare o resultado com a variação obtido com a variação exata do volume.
45. A areia é derramada num monte cônico na velocidade de $4 m^3$ por minuto. Num dado instante, o monte tem $6 m$ de diâmetro e $5 m$ de altura. Qual a taxa de aumento da altura nesse instante, se o diâmetro aumenta na velocidade de 2 centímetros por minuto?

46. A capacidade vital V dos pulmões é o maior volume de ar que pode ser exalado após uma inalação de ar. Para um indivíduo do sexo masculino com x anos de idade e y cm de altura, V pode ser aproximada pela fórmula $V = 27,63y - 0.112xy$. Calcule e interprete (a) $\frac{\partial V}{\partial x}$; (b) $\frac{\partial V}{\partial y}$.
47. A resistência R , em ohms, de um circuito é dada por $R = \frac{E}{I}$, onde I é a corrente em amperes e E é a força eletromotriz em volts. Num instante, quando $E = 120V$ e $I = 15A$, E aumenta numa velocidade de $0,1V/s$ e I diminui à velocidade de $0,05A/s$. Encontre a taxa de variação instantânea de R .
48. Num determinado circuito elétrico, a corrente I é dada, em função da voltagem V , da resistência R e da indutância L por $I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + 10L^2}}$. No instante em que V é 210 volts, R é igual a 3 ohms e está decaindo a uma taxa de 0,1 ohms por segundo, enquanto que L é igual a 2 henrys e está crescendo a uma razão de 0,05 henrys por segundo. Qual deve ser a variação de V , neste instante, para que a corrente permaneça constante?
49. Um funil cônico de dimensões $h = 4\text{ m}$ e $r = 3\text{ m}$ será construído para auxiliar o armazenamento de grãos. Sabendo que o material utilizado na construção desse funil custa R\$ 150,00 por m^2 . Usando diferencial, responda qual será o acréscimo de custo na construção desse funil se aumentarmos seu raio em 5% e sua altura 3%.
50. Uma caixa em forma de paralelepípedo tem dimensões internas iguais a 7cm, 8cm e 13cm. Sendo a espessura das paredes 0,2cm, do fundo 0,3cm e da tampa 0,1cm, fazer uma estimativa aproximada em cm^3 da quantidade de material necessário a ser usado na confecção da caixa.
51. A altura e o diâmetro de um cilindro circular reto são 10 e 6 centímetros, respectivamente. Se um pequeno acréscimo no diâmetro produzir um cilindro quatro por cento mais largo, qual será, aproximadamente, a porcentagem permitida na variação da altura para que não ocorra uma variação no cálculo do volume deste cilindro? Justifique sua resposta.
52. Uma empresa de cosméticos necessita de latas cilíndricas fechadas com raio de 4 cm e altura de 20 cm para embalar seus produtos. Porém, devido a variações na fabricação, estas embalagens apresentam pequenas oscilações em suas medidas. Diante disso:
- (a) Se um engenheiro de controle de qualidade precisa assegurar que essas embalagens tenham o volume correto, ele deverá se preocupar mais com variações no raio ou na altura? Justifique sua resposta com argumentos diferenciais.
- (b) Se o custo de fabricação destas embalagens for de 20 centavos por cm^2 , obtenha uma estimativa para o acréscimo (ou decréscimo) no custo ao fabricar-se embalagens com altura 2% maior e raio 3% menor em relação à original.
53. Sabe-se que a resistência R produzida por dois resistores de R_1 e R_2 ohms em paralelo é dada por $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Um estudante de engenharia projetou um circuito com dois resistores em paralelo com resistências de $R_1 = 100$ ohms e $R_2 = 400$ ohms. Porém, como existe uma variação na fabricação, os resistores adquiridos pelo estudante provavelmente não terão os valores exatos. Diante do exposto:

- (a) Determine se o valor de R será mais sensível a variações em R_1 ou em R_2 . Justifique sua resposta, utilizando argumentos diferenciais.
- (b) Obtenha uma estimativa para a variação de R , se o estudante utilizar resistências de 100,2 ohms e 399,7 ohms respectivamente.
54. Determine os pontos críticos da função $f(x, y) = 2 \ln(x^2 y) + \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 - y + 5$ e classifique-os, se possível, como pontos de máximo, mínimo ou de sela.
55. Precisa-se construir um tanque com a forma de um paralelepípedo para estocar 270 m^3 de combustível, gastando a menor quantidade de material em sua construção. Supondo que todas as paredes serão feitas com o mesmo material e terão a mesma espessura, determinar as dimensões do tanque.
56. Uma caixa retangular tem volume 20 m^3 . O material usado nas laterais custa R\$ 1,00 por metro quadrado, o material usado o fundo custa R\$ 2,00 por metro quadrado e o material usado na tampa custa R\$ 3,00 por metro quadrado. Quais as dimensões da caixa para que o custo de confecção seja mínimo?
57. Sejam $A(0, 0)$, $B(4, 0)$ e $C(3, 3)$ os vértices de um triângulo. Encontre o ponto $P(x, y)$ tal que a soma dos quadrados das distâncias do ponto P aos vértices seja a menor possível.
58. Determine as dimensões relativas de uma caixa retangular sem tampa que possua uma área total de 300 cm^2 e que comporte o máximo possível de volume.
59. Uma empresa de embalagem necessita fabricar caixas retangulares de 128 cm^3 de volume. Se o material da parte lateral custa a metade do material a ser usado para a tampa e para o fundo da caixa, determinar as dimensões da caixa que minimizam o seu custo de produção.
60. Uma caixa retangular é colocada no primeiro octante, com um dos seus vértices na origem e três de suas faces coincidindo com os três planos coordenados. O vértice oposto à origem está situado no plano de equação $3x + 2y + z = 6$. Qual é o volume máximo possível de tal caixa? Quais serão as suas dimensões?
61. Um pequeno fabricante produz dois tipos de lâmpadas: fluorescentes e incandescentes. O fabricante sabe que, se produzir x lâmpadas fluorescentes e y lâmpadas incandescentes, terá um custo total de $12x + 11y + 4xy$ e poderá vender cada fluorescente por $100 - 2x$ reais e cada incandescente por $125 - 3y$ reais. Quantas lâmpadas devem ser produzidas para que o fabricante tenha lucro máximo? Qual é o lucro máximo?
62. Uma certa indústria produz dois tipos de ligas metálicas. O custo total da produção dessas ligas é expresso pela função $C(x, y) = x^2 + 100x + y^2 - xy$ e a receita total obtida com a vendas dessas ligas é dada pela função $R(x, y) = 100x - x^2 + 2000y + xy$, onde x e y representam a quantidade de toneladas de cada uma das ligas. Determine o nível de produção que maximiza o lucro dessa indústria.
63. Determinada empresa produz 2 produtos cujas quantidades são indicadas por x e y . Tais produtos são oferecidos ao mercado consumidor a preços unitários p_1 e p_2 , respectivamente, que dependem de x e y conforme equações $p_1 = 120 - 2x$ e $p_2 = 200 - y$. O custo total da empresa para produzir e vender quantidades x e y dos produtos

é dado por $C = x^2 + 2y^2 + 2xy$. Admitindo que toda a produção seja absorvida pelo mercado, determine a produção que maximiza o lucro.

64. Uma loja vende dois tipos de casacos A e B . O casaco A custa \$ 40,00 e o casaco B custa \$ 50,00. Seja x o preço de venda do casaco A e y o preço de venda do casaco B . O total de vendas feito pela loja foi de $(3200 - 50x + 25y)$ unidades do casaco A e $(25x - 25y)$ unidades do casaco B . Encontre os valores de x e y para que o lucro obtido pela loja seja o maior possível.
65. Uma loja vende dois tipos de produtos A e B . O produto tipo A custa \$ 50,00 e o produto tipo B custa \$ 60,00. Seja sendo x o preço de venda do produto tipo A e y o preço de venda do produto tipo B . O total de vendas feito pela loja foi $(-250x + 250y)$ para o produto tipo A e $32000 + 250(x - 2y)$ para o produto B . Encontre os valores de x e y para que o lucro seja máximo.
66. Encontre as coordenadas do ponto que pertence ao plano $x + y - z + 5 = 0$ e cujo quadrado da distância ao ponto $P(3, -2, 1)$ seja mínimo.
67. Necessita-se construir uma caixa retangular fechada de tal forma que a soma dos perímetros de todas as suas faces seja igual a 80cm . Qual é o volume máximo possível de tal caixa? Quais serão as suas dimensões?
68. Alguns correios exigem que o perímetro da face superior de um pacote mais o comprimento da altura não exceda 84 cm , para que possa ser enviado. Determinar as dimensões do pacote retangular de maior volume que pode ser enviado.
69. Suponha que a temperatura em um ponto qualquer da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ seja dada, em graus, por $T(x, y, z) = xyz^2$. Em quais pontos desta esfera a temperatura é máxima? Em quais pontos da esfera a temperatura é mínima?

2.13 Respostas

1. (a) *esfera de raio 5* (b) *hiperbolóide de uma folha*
(c) *plano* (d) *cone circular*
2. As curvas de nível são circunferências de raio 2, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$, respectivamente.
3. As superfícies de nível são ou cones, ou hiperbolóides de uma folha ou hiperbolóides de duas folhas, dependendo se o nível for $k = 0$, $k > 0$ ou $k < 0$, respectivamente.
4. (a) $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ (b) $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$
5. (a) *não existe* (b) $L = 0$, com $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ (c) $L = 0$, com $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$
(d) *não existe* (e) *não existe* (f) *não existe*
6. (a) *não existe* (b) *não existe*
7. Todos os limites dados não existem.
(a) *contínua*, com $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ (b) *não é contínua*
8. (c) *não é contínua* (d) *não é contínua*
9. (a) *contínua*, com $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ (b) *contínua*, com $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ (c) *contínua*, com $\delta = \sqrt{\varepsilon}$
(d) *descontínua* (e) *descontínua* (f) *descontínua*
10. f é contínua para $b = 1$ e, neste caso, $\delta = \frac{\varepsilon}{9}$.
11. f é contínua para $b = 0$ e, neste caso, $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$.
12. f é contínua para $b = \frac{1}{2}$ e, neste caso, $\delta = \frac{2\varepsilon}{3}$
13. f é sempre descontínua, independente do valor de b .
14. $f(0, 0) = 1$. Justifica-se pela definição, com $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.
15. .
(a) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{e^{2y} + e^{-2y}}$
(b) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2(e^{2(x+y^2)} + x)}{e^{2(x+y^2)} + x^2 + y}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4ye^{2(x+y^2)} + 1}{e^{2(x+y^2)} + x^2 + y}$
(c) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x(1 + \sin(2y))$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 \cos(2y)$
(d) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 + 6x^5 e^{-6y}}{2\sqrt{x + y^2 + (x^2 e^{-2y})^3}}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y - 6x^6 e^{-6y}}{2\sqrt{x + y^2 + (x^2 e^{-2y})^3}}$

16. .
- (a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2 - 2xy + 1}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2 - 2xy + 1}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$
- (b) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x + 2 + 2xy^2}{3(x^2 + y^2 + 2x + x^2y^2)} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y + 2x^2y}{3(x^2 + y^2 + 2x + x^2y^2)}$
17. Basta derivar e substituir na equação diferencial dada.
18. Sim, f é solução da equação diferencial dada.
19. Basta tomar as derivadas parciais de segunda ordem de z e substituir na equação dada.
20. Sim, f é solução da equação diferencial dada.
21. Basta tomar as segundas derivadas parciais de u e substituir na equação dada.
22. .
- $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 6y^4z^5 \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 24x^2yz^5 - xz^3 \cos yz \quad \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = 60x^3y^4z^2 - xy^3 \cos yz$
- $\frac{\partial^3 g}{\partial x^3} = e^x \ln y \quad \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} = \frac{2e^x}{y^3}$
23. 0, 4
24. (a) $dR = -0,04$ (b) 1 %
25. $8x + 4y + z + 2 = 0$.
26. $-24x + 24y - z = 36$
27. $P(1, -2, -1)$
28. $-4x - 8y + 7z + 6 = 0$
29. $z = x - 1$
30. $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \frac{-2}{3}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = \frac{-1}{3}$
31. Para a segunda parte, basta obter a equação do plano tangente num ponto $P(a, b, f(a, b))$ qualquer e mostrar que a origem satisfaz sua equação.
32. Utilize a regra da cadeia.
33. Chame $u = x - y$, $v = y - z$ e $w = z - x$, utilize a regra da cadeia e mostre que a soma desejada é zero.
34. Chame $u = \frac{y-x}{xy}$, $v = \frac{yz-y}{yz}$ e utilize a regra da cadeia para mostrar que a soma desejada é zero.
35. Basta utilizar a regra da cadeia e a regra do produto.
36. Utilize a regra do produto juntamente com a regra da cadeia, com $u = \frac{y}{x}$, $v = \frac{x}{z}$ e $w = \frac{z}{x}$.

37. Se $u = x^2 - at$ e $v = x + at^2$ obtém-se, pela regra da cadeia e do produto:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 4x^2 \frac{d^2 f}{du^2} + 2 \frac{df}{du} + \frac{d^2 g}{dv^2} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 4a^2 t^2 \frac{d^2 g}{dv^2} + 2a \frac{dg}{dv} + a^2 \frac{d^2 f}{du^2}.$$

38. Utilize regra da cadeia e regra do produto para obter as derivas segundas.

39. Basta utilizar a regra da cadeia.

$$40. \frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x \frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial u} + 2y \frac{\partial F}{\partial v}}$$

41. Utilize derivação implícita e regra da cadeia.

$$42. dC = 55,8$$

$$43. dP = -2,02$$

$$44. dV = 70,371 \text{ cm}^3 \qquad \Delta V = 69,9 \text{ cm}^3$$

$$45. \frac{dh}{dt} \simeq 0,39$$

$$46. \frac{\partial V}{\partial x} = -0,112y \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 27,63 - 0,112x.$$

$$47. \frac{dR}{dt} = \frac{1}{30}$$

$$48. \frac{dV}{dt} = 3 \text{ volts por segundo}$$

$$49. dC = 616,38$$

$$50. dV = 100,4 \text{ cm}^3$$

51. a altura deve decrescer em 8%, aproximadamente.

52. (a) O engenheiro deve dar maior atenção às variações no raio, pois o volume é 10 vezes mais sensível às variações no raio do que às variações na altura.

$$(b) dC = -221,16 \text{ centavos}$$

53. (a) R é dezesseis vezes mais sensível às variações em R_1 do que às variações em R_2 .

$$(b) dR = 0,116 \Omega$$

54. $P_1(-2, 2)$ e $P_2(2, 2)$ são pontos de sela e $P_3(-1, 2)$ e $P_4(1, 2)$ são pontos de máximo.

$$55. x = y = z = \sqrt[3]{270}$$

$$56. x = 2, y = 2, z = 5$$

$$57. x = \frac{7}{3} \text{ e } y = 1$$

$$58. x = y = 10, z = 5$$

59. $x = y = 4, z = 8$
60. $x = \frac{2}{3}, y = 1, z = 2, V = \frac{4}{3}$
61. $x = 9, y = 13$
62. $x = 1000, y = 2000$
63. $x = 10, y = 30$
64. $x = 84, y = 89$
65. $x = 89, y = 94$
66. $x = \frac{4}{3}, y = -\frac{11}{3}, z = \frac{22}{3}$
67. $x = y = z = \frac{10}{3}, V = \frac{1000}{27}$.
68. $x = y = 14, z = 28$
69. A temperatura é máxima em $(1, 1, \pm\sqrt{2})$ e $(-1, -1, \pm\sqrt{2})$. É mínima em $(-1, 1, \pm\sqrt{2})$ e $(1, -1, \pm\sqrt{2})$. Note, no entanto, que existem ainda outros 5 pontos de sela.