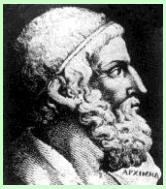
7 Integrais Duplas e Triplas

7.1 Introdução

Alguns personagens importantes que contribuíram para o cálculo diferencial e integral:

 Arquimedes de Siracusa (287 - 212 a.C.)	Johann Kepler (1571 - 1630)	Bonaventura Francesco Cavalieri (1598 - 1647)	SEM FOTO Pierre de Fermat (1601-1665)	Isaac Barrow (1630 - 1677)	Isaac Newton, Sir (1642-1727)
Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)	Jacques Bernoulli (1654 - 1705)	Johann Bernoulli (1667 - 1748)	Carl Fridrich Gauss (1777 - 1855)	Augustin Louis Cauchy (1789-1857)	Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866)

O Cálculo pode ser dividido em duas partes: uma relacionada às derivadas ou **Cálculo Diferencial** e outra parte relacionada às integrais, ou **Cálculo Integral**.

Os primeiros problemas que apareceram na História relacionados com as integrais são os problemas de **quadratura**. Um dos problemas mais antigos enfrentados pelos gregos foi o da medição de superfícies a fim de encontrar suas áreas. Quando os antigos geômetras começaram a estudar as áreas de figuras planas, eles as relacionavam com a área do quadrado, por ser essa a figura plana mais simples. Assim, buscavam encontrar um quadrado que tivesse área igual à da figura em questão.

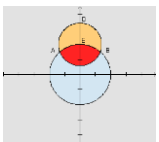
A palavra **quadratura** é um termo antigo que se tornou sinônimo do processo de determinar áreas.

Quadraturas que fascinavam os geômetras eram as de figuras curvilíneas, como o círculo, ou figuras limitadas por arcos de outras curvas. As **lúnulas**[1], regiões que se assemelham com a lua no seu quarto-crescente, foram estudadas por **Hipócrates de Chios**, 440 a.C., que realizou as primeiras quadraturas da História. **Antifon**, por volta de 430 a.C., procurou encontrar a quadratura do círculo através de uma sequência infinita de polígonos regulares inscritos: primeiro um quadrado, depois um octógono, em seguida um hexadecágono, e assim por diante. Havia, entretanto, um problema: essa sequência nunca poderia ser concluída. Apesar disso, essa foi uma ideia genial que deu origem ao método da exaustão.

Nesse contexto, uma das questões mais importantes, e que se constituiu numa das maiores contribuições gregas para o Cálculo, surgiu por volta do ano 225 a.C. Trata-se de um teorema de Arquimedes para a quadratura da parábola.

Arquimedes descobriu que a área da região limitada por uma parábola cortada por uma corda qualquer, é igual a 4/3 da área do triângulo que tem a mesma altura e que tem a corda como base. Esse cálculo pode ser encontrado no livro do Simmons, volume 2.

---

[1] Quando duas circunferências se interceptam como na figura  a região em forma de lua crescente limitada pelos arcos ADB e AEB, é denominada lúnula.

Arquimedes gerou também uma soma com infinitos termos, mas ele conseguiu provar rigorosamente o seu resultado, evitando, com o método da exaustão, a dificuldade com a quantidade infinita de parcelas. Este é o primeiro exemplo conhecido de soma infinita que foi resolvido.

Outra contribuição de Arquimedes foi a utilização do método da exaustão para encontrar a área do círculo, obtendo uma das primeiras aproximações para o número π.

Outras "integrações" foram realizadas por Arquimedes a fim de encontrar o volume e a área da superfície esférica, o volume e a área da superfície do cone, a área da região limitada por uma elipse, o volume de qualquer secção de um paraboloide de revolução e o volume de um hiperboloide de revolução. Em seus cálculos, Arquimedes encontrava somas com um número infinito de parcelas. O argumento utilizado era a dupla "*reductio ad absurdum*" para "escapar" da situação incômoda. Basicamente, se não podia ser nem maior, nem menor, tinha que ser igual.

A contribuição seguinte para o Cálculo Integral apareceu somente ao final do século XVI quando a Mecânica levou vários matemáticos a examinar problemas relacionados com o centro de gravidade. Em 1606, em Roma, Luca Valerio publicou "*De quadratura parabolae*" onde utilizou o mesmo método grego para resolver problemas de cálculo de áreas desse tipo.

Kepler, em seu trabalho sobre o movimento dos planetas, teve que encontrar as áreas de vários setores de uma região elíptica. O método de Kepler consistia em pensar na superfície como a soma de linhas - método este que, na prática, apresentava muita imprecisão. Analogamente, para calcular volumes de sólidos, pensava na soma de fatias planas. Desse modo, calculou os volumes de muitos sólidos tridimensionais formados pela revolução de uma região bidimensional ao redor de um eixo. Para o cálculo de cada um desses volumes, Kepler subdividia o sólido em várias fatias, chamadas infinitésimos, e a soma desses infinitésimos se aproximava do volume desejado.

Os próximos matemáticos que tiveram grande contribuição para o nascimento do Cálculo Integral foram Fermat e Cavalieri. Em sua obra mais conhecida, "*Geometria indivisibilibus continuorum nova*", Cavalieri desenvolveu a idéia de Kepler sobre quantidades infinitamente pequenas. Aparentemente, Cavalieri pensou na área como uma soma infinita de componentes ou segmentos "indivisíveis". Ele mostrou, usando os seus métodos, o que hoje em dia escrevemos: $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$.

Todo o processo geométrico desenvolvido por Cavalieri foi então aritmetizado por Wallis. Em 1655, em seu trabalho "*Arithmetica infinitorum*", Wallis desenvolveu princípios de indução e interpolação que o levaram a encontrar diversos resultados importantes, entre eles, a antecipação de parte do trabalho de Euler dobre a função gama.

Fermat desenvolveu uma técnica para achar a área sob cada uma das, então chamadas, "parábolas maiores": curvas do tipo $y=kx^n$, onde $k > 0$ é constante e $n = 2, 3, 4$, etc. Empregou então uma serie geométrica para fazer o mesmo para cada uma das curvas do tipo $y=kx^n$, onde $k > 0$ e $n = -2, -3, -4$, etc. Por volta de 1640, a fórmula geral da integral das parábolas maiores era conhecida por Fermat, Blaise Pascal, Descartes, Torricelli e outros.

O problema do movimento estava sendo estudado desde a época de Galileo. Tanto Torricelli como Barrow consideraram o problema do movimento com velocidades variadas. A derivada da distância era a velocidade e a operação inversa, partindo da velocidade, levava à distância. A partir desse problema envolvendo movimento, a ideia de operação inversa da derivada desenvolveu-se naturalmente e a idéia de que a integral e a derivada eram processos inversos era familiar a Barrow. Embora Barrow nunca tenha anunciado formalmente o Teorema Fundamental do Cálculo, estava trabalhando em direção ao seu resultado; foi Newton, entretanto, quem, continuando na mesma direção, formulou o teorema.

Newton continuou os trabalhos de Barrow e Galileo sobre o estudo do movimento dos corpos e desenvolveu o Cálculo aproximadamente dez anos antes de Leibniz. Ele desenvolveu os métodos das *fluxions* (derivação) e *fluents* (integração) e utilizou-os na construção da

mecânica clássica. Para Newton, a integração consistia em achar *fluents* para um dado *fluxion* considerando, desta maneira, a integração como inversa da derivação. Com efeito, Newton sabia que a derivada da velocidade, por exemplo, era a aceleração e a integral da aceleração era a velocidade.

Newton representava as integrais por um acento grave acima da letra em questão, por exemplo, a integral de *y* era representada por $\grave{y}$.

Leibniz, diferentemente de Newton, usava a integração como uma soma, de uma maneira bastante parecida à de Cavalieri. Daí vem o símbolo $\int$ (um 's' longo) para representar *soma*.

Ambos desenvolveram o Cálculo Integral separadamente, entretanto Newton via o Cálculo como geométrico, enquanto Leibniz o via mais como analítico.

Principalmente como consequência do Teorema Fundamental do Cálculo de Newton, as integrais foram simplesmente vistas como derivadas "reversas". Na mesma época da publicação das tabelas de integrais de Newton, Johann Bernoulli descobriu processos sistemáticos para integrar todas as funções racionais, que é chamado método das frações parciais. Essas ideias foram resumidas por Leonard Euler, na sua obra sobre integrais.

Após o estabelecimento do Cálculo, Euler daria continuidade ao estudo de funções - ainda prematuro na época - juntamente com Cauchy, Gauss e Riemann. Foi Euler, entretanto, quem reuniu todo o conhecimento até então desenvolvido e criou os fundamentos da Análise.

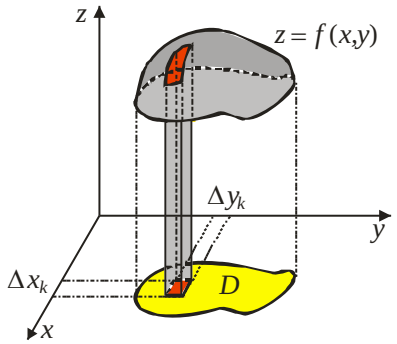
Hoje em dia o Cálculo Integral é largamente utilizado em várias áreas do conhecimento humano e aplicado para a solução de problemas não só de Matemática, mas de Física, Astronomia, Economia, Engenharia, Medicina, Química, por exemplo.

7.2 Integrais Duplas

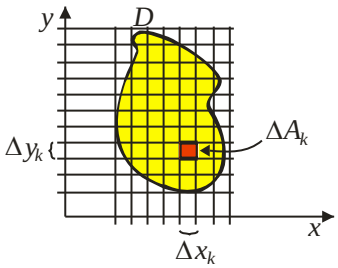
Integral dupla é uma extensão natural do conceito de integral definida para as funções de duas variáveis. Serão utilizadas para analisar diversas situações envolvendo cálculo de áreas e volumes, determinação de grandezas físicas e outros.

Definição

Considere uma função $z = f(x, y)$ contínua e definida numa região fechada e limitada *D* do plano *xy*.



Traçando retas paralelas aos eixos *x* e *y*, recobrimos a região *D* por pequenos retângulos.



Considere somente os retângulos R_k que estão totalmente contidos em D, numerando-os de 1 a n.

Em cada retângulo R_k, tome o ponto $P_k = (x_k , y_k)$ e forme a soma

SOMA DE RIEMANN: $$\sum_{k=1}^{n} f(x_k , y_k)\Delta A_k,$$

onde $\Delta A_k = \Delta x_k \cdot \Delta y_k$ é a área do retângulo R_k.

Traçando-se mais retas paralelas aos eixos x e y, os retângulos ficam cada vez menores.

Toma-se mais retas tal que a diagonal máxima dos retângulos R_k tende a zero quando n tende ao infinito.

Então, se

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k , y_k)\Delta A_k$$

existe, ele é chamado INTEGRAL DUPLA DE $f(x_k , y_k)\Delta A_k$ sobre a região D.

Denota-se por:

$$\iint_D f(x, y)dA \text{ ou } \iint_D f(x, y)dxdy.$$

7.2.1 Interpretação Geométrica

Se $f(x, y) \geq 0$, $f(x_k , y_k)\Delta A_k$ representa o volume de um prisma reto, cuja base é o retângulo R_k e cuja altura é $f(x_k , y_k)$. A soma de Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(x_k , y_k)\Delta A_k$ é a aproximação do volume limitado abaixo da região z e acima de D.

Assim, se $z = f(x, y) \geq 0$,

$$\iint_D f(x, y)dxdy$$

é o VOLUME DO SÓLIDO delimitado superiormente pelo gráfico de $z = f(x, y)$, inferiormente pela região D.

7.2.2 Área da Região D

Se $f(x, y) = 1 \ \forall P(x, y) \in D$, então, $V = 1 \cdot \text{área} D$.

Logo:

$$\iint_D 1\,dA = \text{Área da Região } D.$$

7.2.3 Propriedades das Integrais Duplas

- 1. Múltiplo constante

$$\iint_D k f(x, y)dA = k \iint_D f(x, y)dA \qquad \text{(para todo número } k\text{)}$$

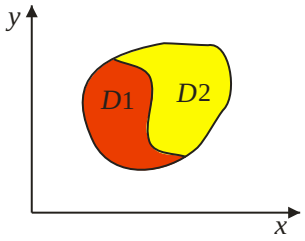
- 2. Soma e Diferença

$$\iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)]dA = \iint_D f(x, y)dA \pm \iint_D g(x, y)dA$$

- 3. Dominação
- (a) $\iint_D f(x,y)dA \geq 0$ se $f(x,y) \geq 0$ em D
- (b) $\iint_D f(x,y)dA \geq \iint_D g(x,y)dA$ se $f(x,y) \geq g(x,y)$ em D
- 4. Aditividade

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_{D1} f(x,y)dA + \iint_{D2} f(x,y)dA$$

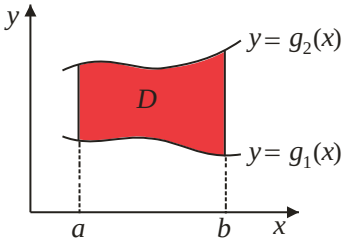
se D for a união de duas sub-regiões não sobrepostas $D1$ e $D2$.



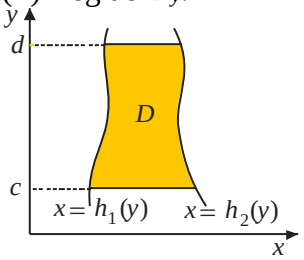
7.3 Cálculo de Integrais Duplas

7.3.1 Teorema para o Cálculo de Integrais Duplas

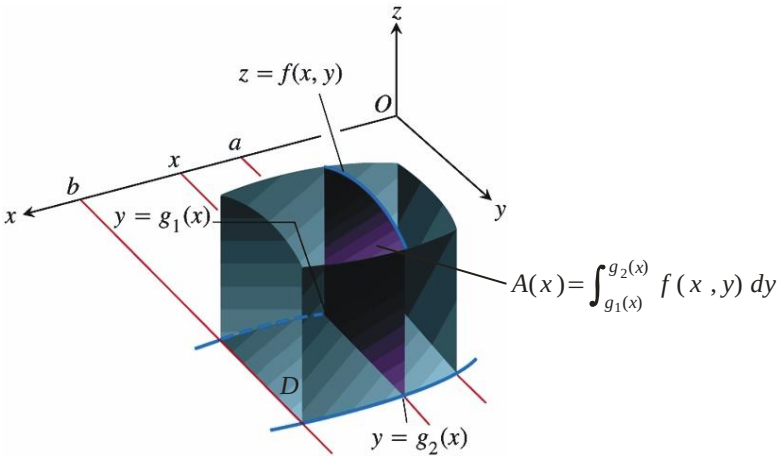
(i) Região D_x:



(ii) Região D_y:

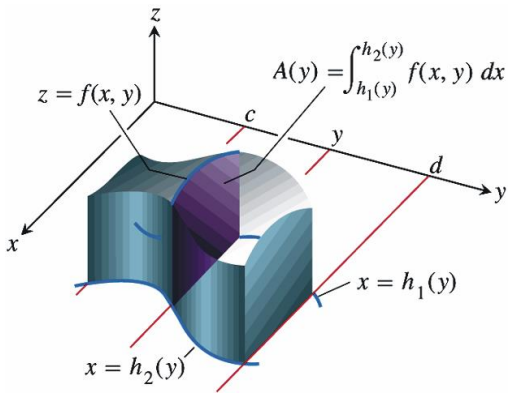


- (i) Seja D a região D_x da figura anterior. Se f é contínua em D, então:



$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx \qquad \textbf{(Teorema 1)}$$

- (ii) Seja D a região D_y da figura anterior. Se f é contínua em D, então:



$$\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy \qquad \textbf{(Teorema 2)}$$

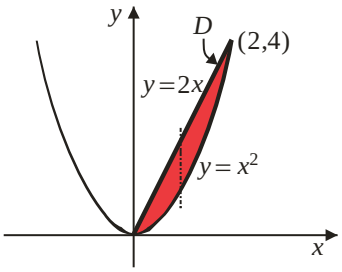
7.3.2 Definição: Integrais Iteradas

- (i) $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$
- (ii) $\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\right]dy$

Exercícios

164. Seja D a região do plano xy delimitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = 2x$.
Calcule $\iint_D (x^3 + 4y)dA$ aplicando: (a) Teorema 1; (b) Teorema 2.

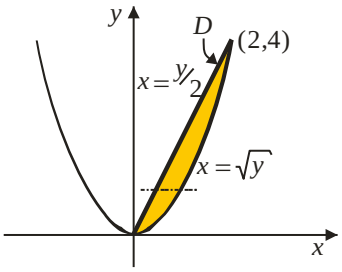
- (a) Teorema 1



Resolução:

Resposta: $\frac{32}{3}$

- (b) Teorema 2

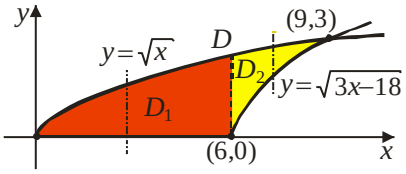


Resolução:

Resposta: $\frac{32}{3}$

165. Seja D a região delimitada pelos gráficos das equações $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{3x-18}$ e $y = 0$. Se f é uma função contínua arbitrária em D, expresse a integral dupla $\iint_D f(x, y)dA$ em termos de integrais iteradas utilizando apenas: (a) Teorema 1; (b) Teorema 2.

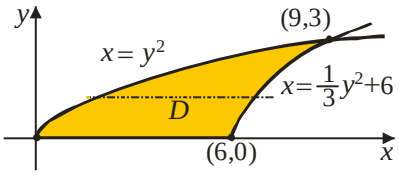
- (a) Teorema 1



Resolução:

Resposta:

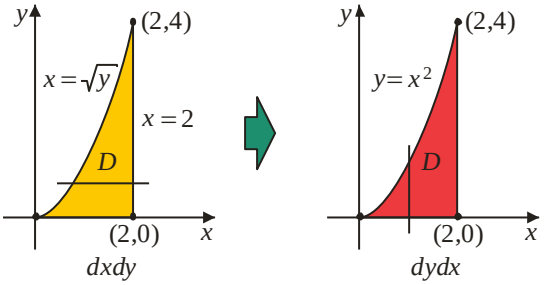
- (b) Teorema 2



Resolução:

Resposta:

166. Dada $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y \cos x^5 \, dxdy$, inverta a ordem de integração e calcule a integral resultante.

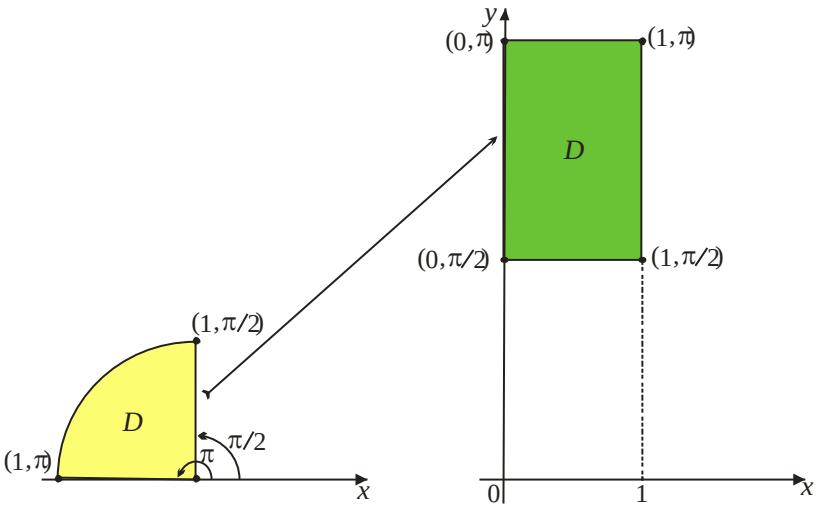


Resolução:

Resposta: 0,055

167. Calcular $I = \iint_D y \sin xy \, dxdy$,

onde D é o retângulo de vértices $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, $(1, \pi)$ e $(0, \pi)$.



Resolução:

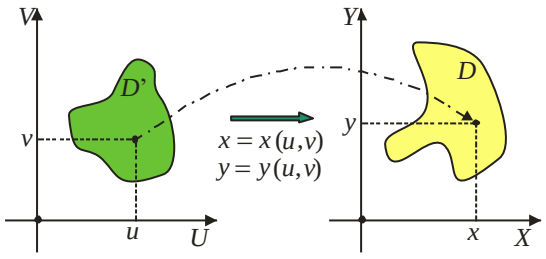
Resposta: $1+\frac{\pi}{2}$

7.4 Mudança de Variáveis em Integrais Duplas

Através de uma mudança de variáveis

$$x = x(u, v) \text{ e } y = y(u, v) \qquad (1)$$

uma integral dupla sobre uma região D do plano xy pode ser transformada numa integral dupla sobre uma região D' do plano uv.



A correspondência entre as regiões D' e D é BIJETORA, e podemos retornar de D para D' através da transformação inversa

$$u = u(x, y) \text{ e } v = v(x, y). \qquad (2)$$

Considerando que as funções em (1) e (2) são contínuas, com derivadas parciais contínuas em D' e D, respectivamente, temos

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv \qquad (3)$$

onde $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ é o determinante jacobiano de x e y em relação a u e v, dado por

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

A fórmula (3) é válida se:

- (i) f é contínua;
- (ii) as regiões D e D' são formadas por um número finito de sub-regiões do tipo D_x ou D_y;
- (iii) o jacobiano $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ em D' ou se anula num número finito de pontos de D'.

7.5 Coordenadas Polares

A transformação que leva pontos (r, θ) do plano $r\theta$ a pontos (x, y) do plano xy é dada por

$$x = x(r, \theta) = r\cos\theta \text{ e } y = y(r, \theta) = r\sin\theta \qquad (4)$$

e seu jacobiano é dado por

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Portanto, a fórmula (3) pode ser expressa por:

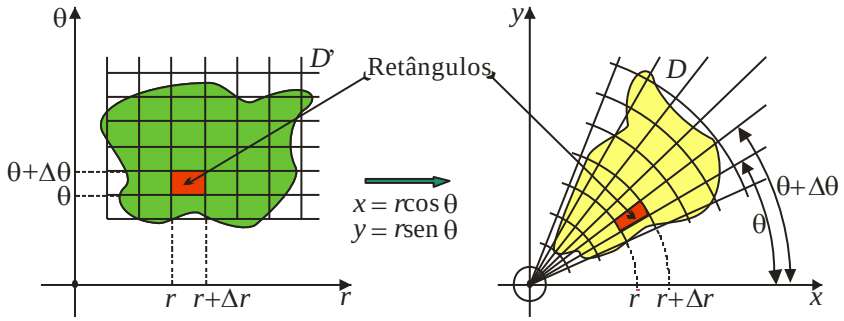
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta. \qquad (5)$$

7.5.1 Obtenção da fórmula

Para que (4) seja bijetora, considera-se $r\theta$ para os quais r e θ satisfazem:

$$r \geq 0 \text{ e } 0 \leq \theta < 2\pi \text{ ou } r \geq 0 \text{ e } -\pi < \theta \leq \pi.$$

Para os cálculos, pode-se considerar $\leq$ como sendo $<$.

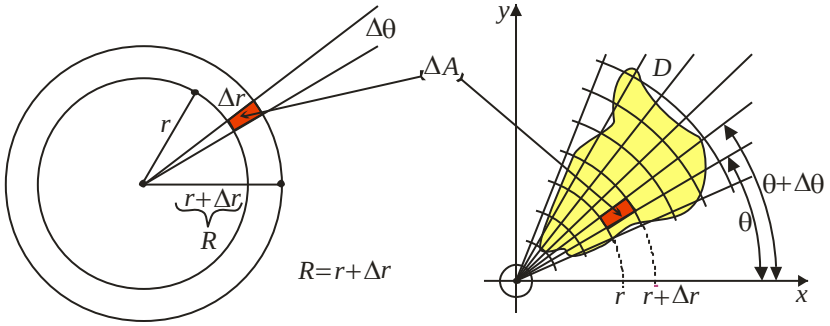


Existe uma correspondência entre ΔA' e ΔA, que veremos a seguir:

7.5.2 Área ΔA' do retângulo em D'

$$\Delta A' = \Delta r \cdot \Delta\theta$$

7.5.3 Área ΔA do retângulo polar em D



Área de um setor circular: $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$

ΔA é a diferença entre dois setores circulares de mesmo ângulo $\Delta\theta$ e raios R e r.

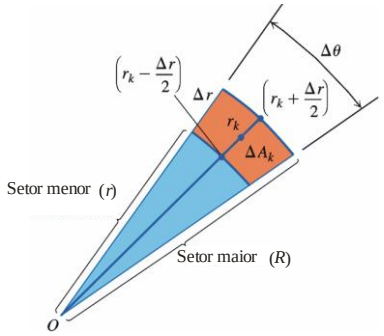
$$\Delta A = \frac{1}{2} R^2 \cdot \Delta\theta \; - \; \frac{1}{2} r^2 \cdot \Delta\theta$$

$$\Delta A = \frac{1}{2}\left(R^2 - r^2\right) \cdot \Delta\theta \qquad \Rightarrow R = r + \Delta r$$

$$\Delta A = \frac{1}{2}\left((r+\Delta r)^2 - r^2\right) \cdot \Delta\theta = \frac{1}{2}\left(r^2 + 2r\Delta r + \Delta r^2 - r^2\right) \cdot \Delta\theta = \frac{1}{2}\left(2r\Delta r + \Delta r^2\right) \cdot \Delta\theta$$

$$\Delta A = \frac{1}{2}\left(2r + \Delta r\right) \cdot \Delta r \Delta\theta = \frac{r + \left(r + \Delta r\right)}{2} \cdot \Delta r \Delta\theta = \frac{r + R}{2} \cdot \Delta r \Delta\theta \qquad \Rightarrow r_k = \frac{r + R}{2}$$

$$\Delta A = r_k \cdot \Delta r \Delta\theta = r_k \cdot \Delta A'$$



$$\Delta A = r_k \Delta A'$$

7.5.4 Integral dupla em D'

Assim, obtemos o jacobiano r_k da fórmula (5).

Enumerando os retângulos polares e 1 a n, tome um ponto arbitrário

$$(x_k \, , \, y_k)$$

no k-ésimo retângulo. Este ponto pode ser representado por

$$(r_k \cos\theta_k \, , \, r_k \sin\theta_k)$$

que tem representação $(r_k \, , \, \theta_k)$ referente à região correspondente em D'. Assim, a soma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f\,(x_k \, , \, y_k)\Delta A_k$$

é equivalente a

$$\sum_{k=1}^{n} f\,(r_k \cos\theta_k \, , \, r_k \sin\theta_k) r_k \Delta A'_k$$

onde $\Delta A'_k = \Delta r_k \cdot \Delta\theta_k$ é a área do k-ésimo retângulo em D'.

Assim, se tomarmos limite com $n \to \infty$ com o máximo das diagonais dos n retângulos tendendo a zero, temos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\,(r_k \cos\theta_k\,,\, r_k \sin\theta_k) r_k \Delta A'_k$$

que equivale a integral

$$\iint_{D'} f\,(r\cos\theta,\, r\sin\theta) r dr d\theta$$

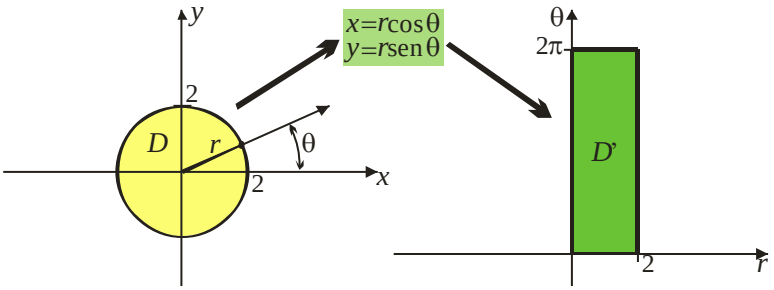
dada pela fórmula (5).

Exercícios

168. Calcular $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$, sendo D o círculo de centro na origem e raio 2.

Identificar D' em $r\theta$, com correspondência ao D em xy.
Contorno da região D: $x^2 + y^2 = 4$.

D': $\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2 \end{cases}$

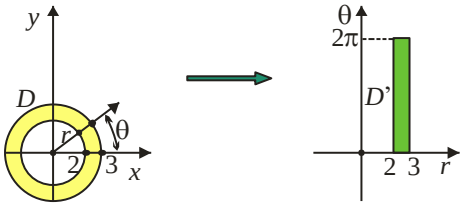


Resolução:

Resposta: $\frac{16\pi}{3}$

169. Calcular $I = \iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy$, onde D é a região do plano xy delimitada entre $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$.

Região D: $x^2 + y^2 \geq 4 \cap x^2 + y^2 \leq 9$ Região D': $\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 2 \leq r \leq 3 \end{cases}$



Resolução:

Resposta: $\left(e^9 - e^4\right)\pi$

7.6 Cálculo de Volumes (Aplicações)

Para $f(x, y) \geq 0$, a integral

$$V = \iint_D f(x, y)dA \qquad (6)$$

nos dá o volume do sólido delimitado superiormente pelo gráfico de $z = f(x, y)$, inferiormente pela região D e lateralmente pelo cilindro vertical cuja base é o contorno de D.

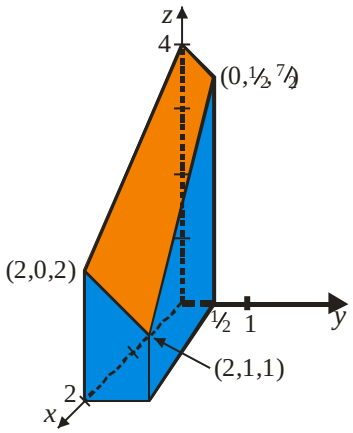
Exercícios

170. Calcular o volume do sólido acima do plano xy delimitado por $z = 4 - 2x^2 - 2y^2$.

Resolução:

Resposta: 4π u.v.

171. Calcular o volume do sólido delimitado superiormente pelo gráfico de $z = 4 - x - y$, lateralmente pela região D delimitada por $x = 2$, $x = 0$, $y = 0$ e $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ e inferiormente $z=0$.



Resolução:

Resposta: $V = \frac{15}{4}$ unidades de volume.

7.7 Cálculo de Áreas de Regiões Planas

Fazendo $f(x, y) = 1$, a área da região de integração D é dada por:

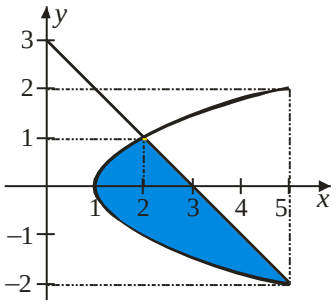
$$A = \iint_D dA \qquad (7)$$

Exercício

172. Calcular a área da região D delimitada por $x = y^2 + 1$ e $x + y = 3$. Calcular pelas duas formas:

a) D_x (Teorema 1)
b) D_y (Teorema 2)

Por (7), $A = \iint_D dA$



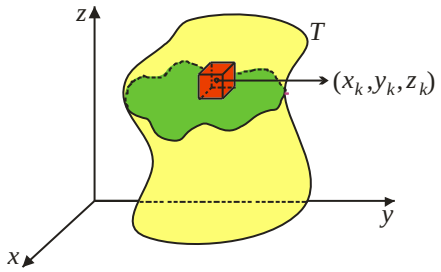
Resolução:

Resposta: $\frac{9}{2}$ u.a. (unidades de área)

7.8 Integrais Triplas

Definição

Seja $w = f(x, y, z)$ uma função definida e contínua numa região fechada e limitada T do espaço. Subdividimos T em pequenas sub-regiões traçando planos paralelos aos planos coordenados.



Numeramos os paralelepípedos no interior de T de 1 até n. Em cada um dos pequenos paralelepípedos T_k, escolhemos um ponto arbitrário (x_k, y_k, z_k).

Formamos a soma $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$, onde ΔV_k é o volume do paralelepípedo T_k.

Faz-se isso de maneira arbitraria, mas de tal forma que a maior aresta dos paralelepípedos T_k tende a zero quando $n \to \infty$.

Se existir $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$, ele é chamado:

INTEGRAL TRIPLA da função $f(x, y, z)$ sobre a região T e representamos por

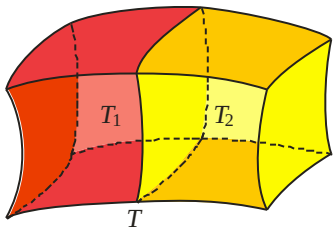
$$\iiint_T f(x, y, z)dV \text{ ou } \iiint_T f(x, y, z)dxdydz$$

Propriedades

De forma análoga a integrais duplas, temos:

- 1. $\iiint_T kf\,dV = k\iiint_T f\,dV$;

- 2. $\iiint_T (f_1 \pm f_2)dV = \iiint_T f_1\,dV \pm \iiint_T f_2\,dV$;
- 3. $\iiint_T f\,dV = \iiint_{T_1} f\,dV + \iiint_{T_2} f\,dV$, onde $T = T_1 \cup T_2$, como mostra a figura a seguir.

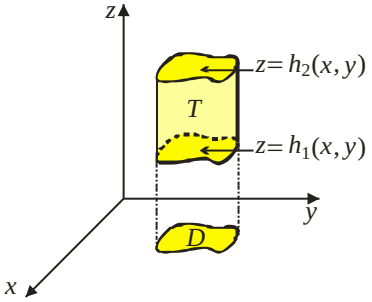


7.9 Cálculo de Integrais Triplas

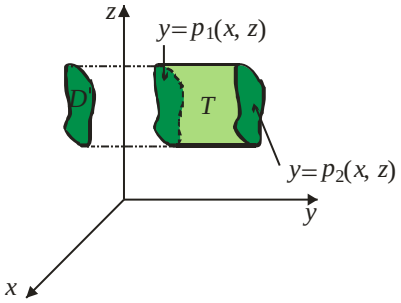
Através das três situações seguintes, o cálculo da integral tripla será reduzido, inicialmente, a resolução de uma integral dupla.

Serão apresentados três casos: (i), (ii) e (iii).

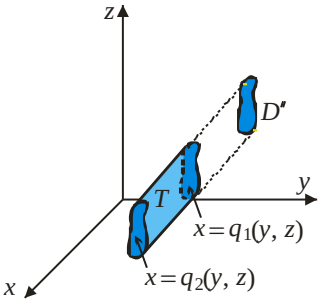
- (i) Domínio *D*:



- (ii) Domínio *D*':



- (iii)Domínio *D*":



- (i) A região *T* é delimitada inferiormente pelo gráfico $z = h_1(x, y)$ e superiormente pelo gráfico $z = h_2(x, y)$, onde h_1 e h_2 são funções contínuas sobre a região *D* do plano *xy*.

$$\iiint_T f(x, y, z)dV = \iint_D \left[\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z)dz\right]dxdy \qquad (8)$$

Logo, se, por exemplo, a região D for do tipo D_x:

$$D: \begin{cases} g_1(x) \le y \le g_2(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$$

a integral tripla será dada pela seguinte integral iterada tripla:

$$\iiint_T f(x, y, z)dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z)dzdydx.$$

- (ii) A região T é delimitada à esquerda por $y = p_1(x, z)$ e a direita por $y = p_2(x, z)$, onde p_1 e p_2 são funções contínuas sobre a região D' do plano xz.

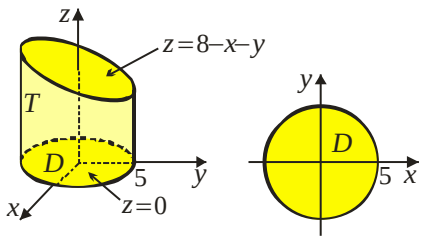
$$\iiint_T f(x, y, z)dV = \iint_{D'} \left[\int_{p_1(x,z)}^{p_2(x,z)} f(x, y, z)dy \right] dxdz \qquad (9)$$

- (ii) A região T é delimitada na parte de traz por $x = q_1(y, z)$ e na frente por $x = q_2(y, z)$, onde q_1 e q_2 são funções contínuas sobre a região D" do plano yz.

$$\iiint_T f(x, y, z)dV = \iint_{D''} \left[\int_{q_1(y,z)}^{q_2(y,z)} f(x, y, z)dx \right] dydz \qquad (10)$$

Exercícios

173. Calcular $I = \iiint_T x\,dV$, onde T é o sólido delimitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 25$, pelo $x + y + z = 8$ e pelo plano xy.

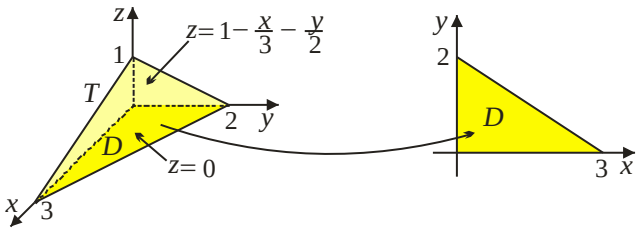


Resolução:

Resposta: $I = -\dfrac{625}{4}\pi$

174. Calcular $I = \iiint_T y\,dV$, onde T é a região delimitada pelos planos coordenados e pelo plano $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} + z = 1$.

T é o tetraedro representado a seguir:



Neste caso, T se enquadra em qualquer um dos casos: (i), (ii) ou (iii). No desenho, é sugerida a utilização de (i).

Resolução:

Resposta: $I = \dfrac{1}{2}$

7.10 Mudança de Variáveis em Integrais Triplas

Seja I dada por (10):

$$I = \iiint_T f\,(x, y, z)dxdydz \qquad (10)$$

Induzindo novas variáveis de integração u, v, w com $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ e $z = z(u, v, w)$, a integral (10) fica:

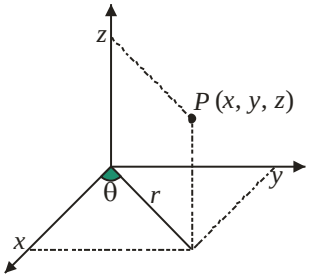
$$I = \iiint_{T'} f\,(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| dudvdw \qquad (11)$$

onde T' é a correspondente região no espaço u, v, w e $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ é o determinante jacobiano de x, y e z em relação a u, v e w.

7.11 Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas

A relação entre as coordenadas cilíndricas e cartesianas é dada pelas equações:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z$$



O jacobiano de x, y, z em relação às novas variáveis r, θ e z é:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

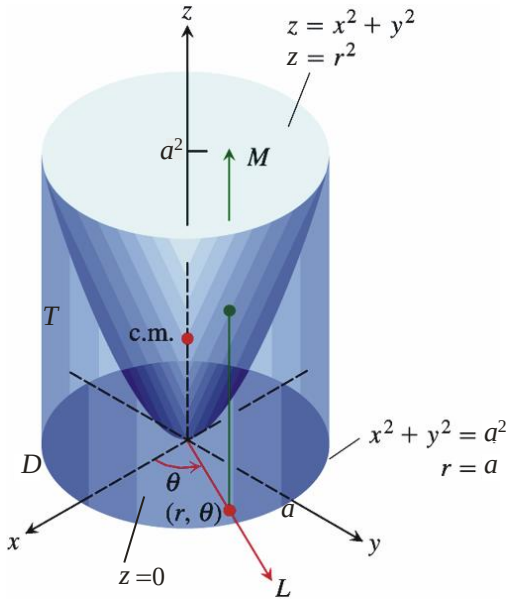
Assim, usando (11), vem:

$$\iiint_T f\,(x,y,z)dV = \iiint_{T'} f\,(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdrd\theta dz \qquad (12)$$

onde T' é a região T descrita em coordenadas cilíndricas.

Exercício

175. Calcular $I = \iiint_T (x^2 + y^2)dV$, onde T é a região delimitada pelo plano xy, pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$ e pelo cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.



A região T é limitada inferiormente por $z = 0$ e superiormente por $z = x^2 + y^2$ que, em coordenadas cilíndricas, tem equação $z = r^2$.

Observação: Levando-se em conta que a região T se enquadra no caso (i), pode-se escrever a equação (12) representada pela (13).

$$\iint_{D'} \left[\int_{h_1(r,\theta)}^{h_2(r,\theta)} f\,(r\cos\theta, r\sin\theta, z)dz \right] rdrd\theta \qquad (13)$$

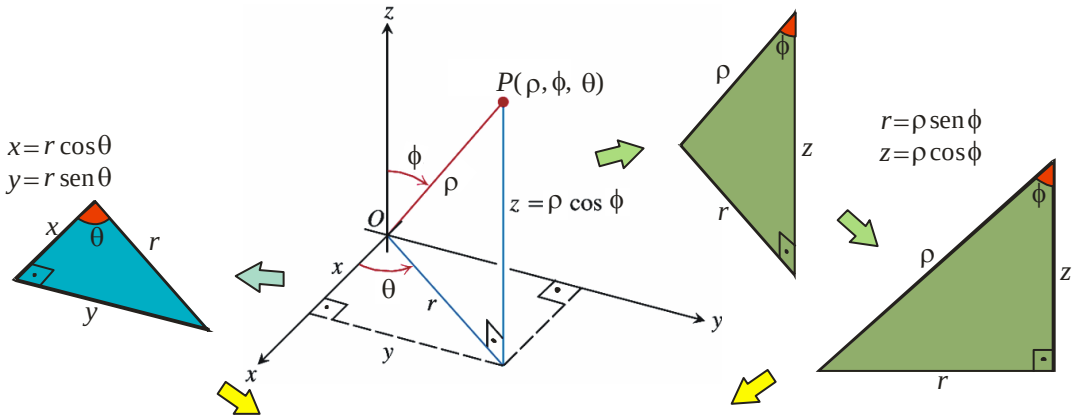
- Onde h_1 e h_2 delimitam T inferior e superiormente.
- D' é a projeção de T sobre o plano xy descrita em coordenadas polares.

Resolução:

Resposta: $I = \dfrac{a^6\pi}{3}$

7.12 Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas

A relação entre as coordenadas esféricas e cartesianas é desenvolvida da seguinte forma, conforme figura a seguir:



$$x = \rho\text{sen}\phi\cos\theta$$
$$y = \rho\text{sen}\phi\text{sen}\theta$$
$$z = \rho\cos\phi$$

O jacobiano de x, y, z em relação às novas variáveis r, θ e ϕ é:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{vmatrix} = \rho^2\sin\phi$$

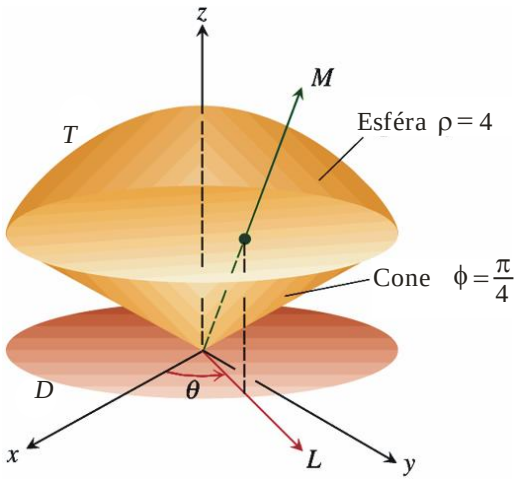
Assim, usando (11), vem:

$$\iiint_T f\,(x,y,z)dV = \iiint_{T'} f\,(\rho\text{sen}\phi\cos\theta, \rho\text{sen}\phi\text{sen}\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi d\rho d\theta d\phi$$

onde T' é a região de integração T descrita em coordenadas esféricas.

Exercício

176. Calcular $I = \iiint_T z dV$, onde T é a região limitada superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e inferiormente pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Resolução:

Resposta: $I = 32\pi$

7.13 Aplicações Físicas da Integral Dupla

Usando as integrais duplas, podemos encontrar a massa, o centro de massa e o momento de inércia de uma lâmina plana não homogênea, com a forma de uma região R e com densidade de área em um ponto (x, y) de R dada pela função contínua $\rho = \rho(x, y)$.

A massa total da lâmina é definida por:

$$M = \iint_R \rho(x, y)dA$$

Além disso, o momento de massa em relação ao eixo x é dado por:

$$M_x = \iint_R y\rho(x, y)dA$$

Analogamente, o momento de massa em relação ao eixo y é dado por:

$$M_y = \iint_R x\rho(x, y)dA$$

O centro de massa, denotado por $(\bar{x}, \bar{y})$ é definido por:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \text{ e } \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

O momento de inércia em relação ao eixo x é:

$$I_x = \iint_R y^2\rho(x, y)dA$$

O momento de inércia em relação ao eixo y é:

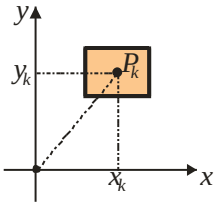
$$I_y = \iint_R x^2\rho(x, y)dA$$

O momento de inércia polar é:

$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2)\rho(x, y)dA$$

Observação

Os valores y^2, x^2 e $(x^2 + y^2)$ que aparecem nestas expressões são as "distâncias ao quadrado", como mostra a figura a seguir:



No retângulo genérico R_k, temos o ponto $(x_k, y_k) \in R_k$, e:

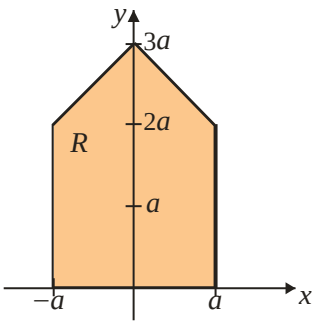
x_k^2 é o quadrado da distância de P_k ao eixo y.

y_k^2 é o quadrado da distância de P_k ao eixo x.

$x_k^2 + y_k^2$ é o quadrado da distância de P_k a origem.

Exercícios

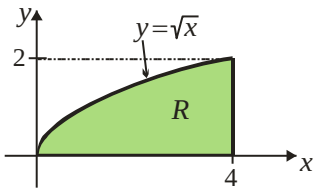
177. Determinar o centro de massa da chapa homogênea da figura abaixo.



Resolução:

Resposta: $(\bar{x},\bar{y})=\left(0,\frac{19a}{15}\right)$

178. Calcular o momento de inércia em relação ao eixo dos *y* da chapa da figura a seguir, sabendo que a densidade de massa é igual a $xy\ Kg/m^2$.



Resolução:

Resposta: $102{,}4\ Kg/m^2$

7.14 Aplicações Físicas da Integral Tripla

De maneira análoga ao que foi feito com as integrais duplas, vamos analisar o uso das integrais triplas para calcular a massa de um corpo, as coordenadas do seu centro de massa e o momento de inércia em relação a um eixo *L*.

Seja *T* um corpo ou sólido delimitado por uma região fechada e limitada do espaço.

Suponhamos que a densidade de massa por unidade de volume, em relação a um ponto (x, y, z), é dado pela função $\delta = \delta(x, y, z)$, contínua em *T*.

A massa total do corpo é dada por:

$$M = \iiint_T \delta(x,y,z)dV$$

O momento de massa em relação ao plano *xy* do sólido *T* é dado por:

$$M_{xy} = \iiint_T z\delta(x,y,z)dV$$

Analogamente, o momento de massa em relação aos planos *xz* e *yz* são dados por:

$$M_{xz} = \iiint_T y\delta(x,y,z)dV \text{ e } M_{yz} = \iiint_T x\delta(x,y,z)dV$$

Obtemos assim o centro de massa do sólido *T*, denotado por $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ definido por:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M},\ \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} \text{ e } \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

Outro conceito importante é o de momento de inércia em relação a um eixo L. No caso de sólidos, temos que a distância de uma partícula, com massa concentrada em (x_k, y_k, z_k), até os eixos coordenados é dada por:

- Eixo z: $d_{xy} = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$;
- Eixo y: $d_{xz} = \sqrt{x_k^2 + z_k^2}$;
- Eixo x: $d_{yz} = \sqrt{y_k^2 + z_k^2}$.

O momento de inércia em relação ao eixo z é:

$$I_z = \iiint_T (x^2 + y^2)\delta(x, y, z)dV$$

O momento de inércia em relação ao eixo x é:

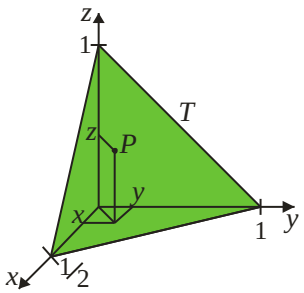
$$I_x = \iiint_T (y^2 + z^2)\delta(x, y, z)dV$$

O momento de inércia em relação ao eixo x é:

$$I_y = \iiint_T (x^2 + z^2)\delta(x, y, z)dV$$

Exercícios

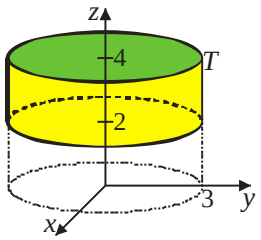
179. Calcular a massa e o centro de massa do sólido T, delimitado por $2x + y + z = 1$ e os planos coordenados, sabendo que a densidade de massa em $P(x, y, z)$ é proporcional a distância até o plano xy.



Resolução:

Resposta: $M = \dfrac{k}{48}$ unidades de massa. Centro de massa: $\left(\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{6}{15}\right)$

180. Encontrar o momento de inércia em relação ao eixo z do sólido delimitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e pelos planos $z = 2$ e $z = 4$, sabendo que a densidade de massa é igual a $(x^2 + y^2)\ kg/m^3$.



Resolução:

Resposta: $486\pi\ kg{\cdot}m^2$

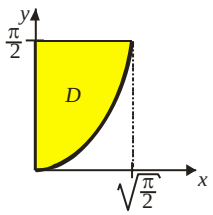
7.15 Exercícios

181. Calcular a integral $I = \int_0^1 \int_{4x}^{4} e^{-y^2}\, dydx$.

Resolução:

Resposta: $I = \frac{1}{8}\left(1 - e^{-16}\right)$

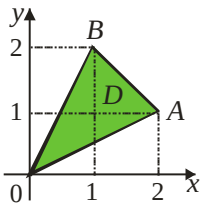
182. Calcular $I = \iint_D \sqrt{y}\sin\left(x\sqrt{y}\right) dA$ onde D é a região delimitada por $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$ e $x = \sqrt{y}$.



Resolução:

Resposta: $I = \dfrac{\pi - 2}{2}$

183. Calcular $I = \iint\limits_D xy\, dA$ onde D é o triângulo OAB da figura a seguir.



Resolução:

Resposta: $I = \frac{13}{8}$

184. Usando coordenadas polares, escrever na forma de uma integral iterada,
a integral $I = \iint_D f(x, y)\, dxdy$ onde D é a região delimitada por $x^2 + y^2 - ay = 0$, $a > 0$.

Resolução:

Resposta: $I = \int_0^{\pi} \int_0^{a \sin \theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, drd\theta$

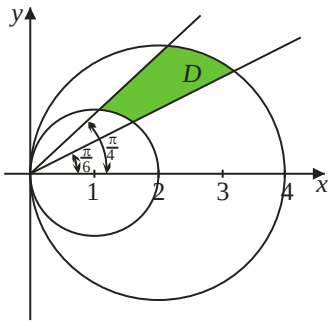
185. Calcular $I = \iint_D y\, dxdy$, sendo D a região delimitada por $x^2 + y^2 - ax = 0$, $a > 0$.

Resolução:

Resposta: $I = 0$

186. Calcular $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$, sendo D a região limitada pelas curvas:

$x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$ e $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

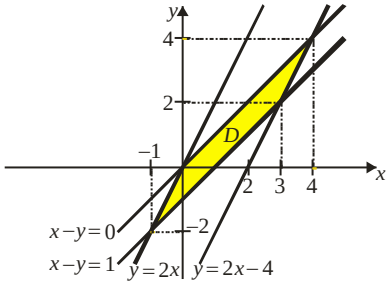


Resolução:

Resposta: $I = \frac{7}{9}\left(10\sqrt{2} - 11\right)$

187. Calcular $I = \iint_D (x - y)\, dxdy$, sendo D o paralelogramo limitado pelas retas:

$x - y = 0$, $x - y = 1$, $y = 2x$ e $y = 2x - 4$.



Resolução:

Resposta: $I = 2$

188. Calcular $I = \iint_D \left((x-2)^2 + (y-2)^2\right) dxdy$, onde D é a região delimitada pela circunferência $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$.

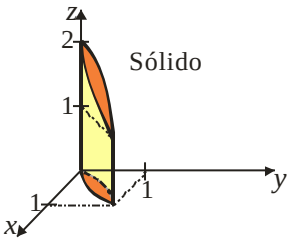
Obs.: Aconselha-se o uso de duas transformações:

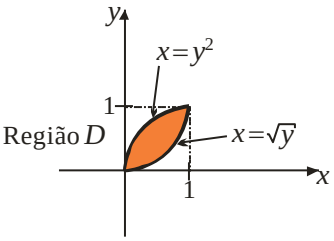
1ª: $u = x - 2$ e $v = y - 2$; 2ª: coordenadas polares.

Resolução:

Resposta: $I = 8\pi$

189. Calcular o volume do sólido no primeiro octante delimitado por $y + z = 2$ e pelo cilindro que contorna a região delimitada por $y = x^2$ e $x = y^2$.

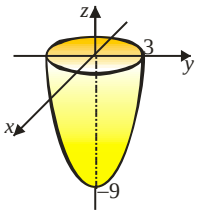




Resolução:

Resposta: $V = \dfrac{31}{60}$ unidades de volume

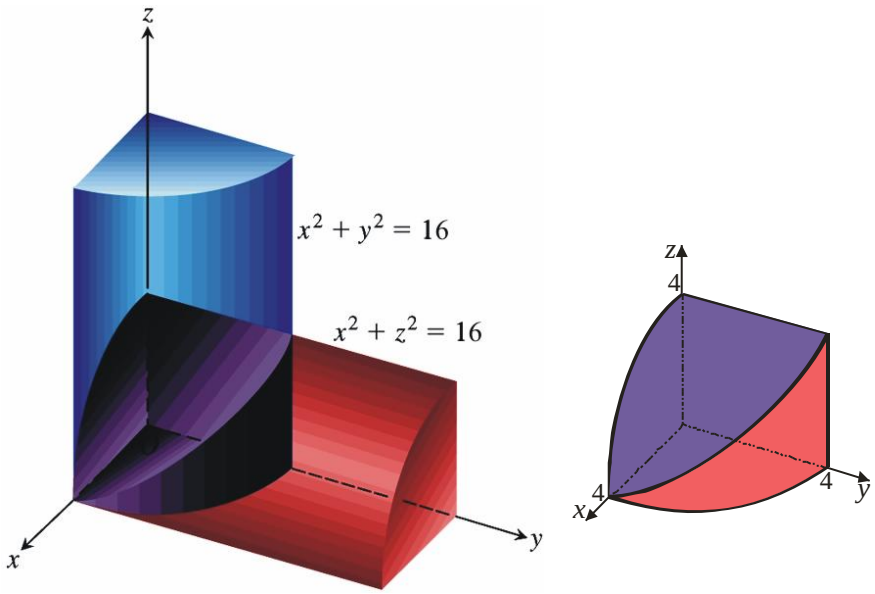
190. Calcular o volume do sólido abaixo do plano xy delimitado por $z = x^2 + y^2 - 9$.



Resolução:

Resposta: $V = \frac{81}{2}\pi$

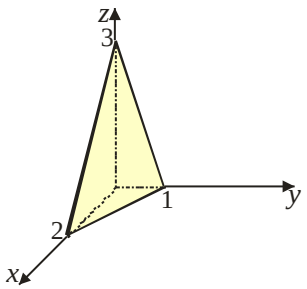
191. Calcular o volume do sólido no primeiro octante, delimitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = 16$ e $x^2 + z^2 = 16$.



Resolução:

Resposta: $V = \frac{128}{3}$ unidades de volume

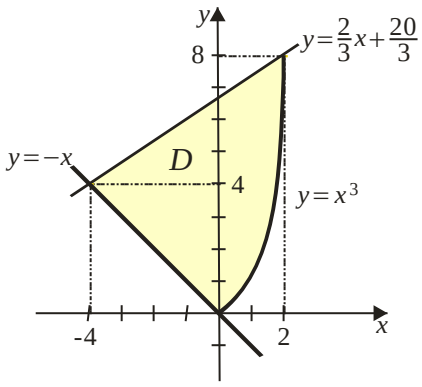
192. Calcular o volume do tetraedro dado na figura abaixo.



Resolução:

Resposta: $V = 1$ unidade de volume

193. Calcule a área da região delimitada por $y = x^3$, $y = -x$ e $y = \frac{2}{3}x + \frac{20}{3}$.



Resolução:

Resposta: $A = 24$ unidades de área

8 Formulário e Referências

8.1 Formulário de Derivadas e Integrais

DERIVADAS:
Tome u e v como funções em x.
Sejam $D_x u = u'$ e c uma constante.

1) $D_x c = 0$

2) $D_x (u + v) = u' + v'$

3) $D_x (uv) = u'v + uv'$

4) $D_x \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

5) $D_x [f(u)] = D_x f(u) \cdot u'$

6) $D_x u^n = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

7) $D_x e^u = e^u \cdot u'$

8) $D_x a^u = a^u \cdot \ln a \cdot u'$

9) $D_x \ln|u| = \frac{1}{u} \cdot u'$

10) $D_x \log_a|u| = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$

11) $D_x \operatorname{sen} u = \cos u \cdot u'$

12) $D_x \cos u = -\operatorname{sen} u \cdot u'$

13) $D_x \operatorname{tg} u = \sec^2 u \cdot u'$

14) $D_x \cot u = -\csc^2 u \cdot u'$

15) $D_x \sec u = \sec u \cdot \operatorname{tg} u \cdot u'$

16) $D_x \csc u = -\csc u \cdot \cot u \cdot u'$

17) $D_x \operatorname{arcsen} u = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

18) $D_x \arccos u = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

19) $D_x \operatorname{arctg} u = \frac{u'}{1+u^2}$

20) $D_x \operatorname{arcsec} u = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$

1) $\int u dv = uv - \int v du$

2) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$

3) $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c$

4) $\int e^u du = e^u + c$

5) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$

6) $\int \operatorname{sen} u du = -\cos u + c$

7) $\int \cos u du = \operatorname{sen} u + c$

8) $\int \sec^2 u du = \operatorname{tg} u + c$

9) $\int \csc^2 u du = -\cot u + c$

10) $\int (\sec u \cdot \operatorname{tg} u) du = \sec u + c$

11) $\int (\csc u \cdot \cot u) du = -\csc u + c$

12) $\int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + c$

13) $\int \cot u du = \ln|\operatorname{sen} u| + c$

14) $\int \sec u du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + c$

15) $\int \csc u du = \ln|\csc u - \cot u| + c$

16) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{u}{a} + c$

17) $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + c$

18) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{u}{a} + c$

19) $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + c$

20) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2-a^2}\right| + c$

INTEGRAIS:

8.2 Referências Bibliográficas

1. ANTON, H. **Cálculo – um novo horizonte**. Vol. 1 e 2. 6.ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.
2. FINNEY, R.L., et al. **Cálculo – George B. Thomas**. Vol. 1 e 2. 10.ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002.
3. GONÇALCES, M.B., et al. **Cálculo B**. São Paulo: MAKRON Books do Brasil Editora Ltda, 1999.
4. GUIDORIZZI, H.L. **Um Curso de Cálculo**. Vol.1 e 2. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.
5. LEITHOLD, L. O **Cálculo – com geometria analítica**. Vol. 1 e 2. 2.ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1981.
6. MUNEM, M. e FOULIS, D. **Cálculo**. Vol. 1 e 2. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1998.
7. MURRAY R. SPIEGEL. **Cálculo Avançado**. Coleção Schaum. Ed. McGraw-Hill do Brasil, Ltda. Rio de Janeiro – Brasil, 1971.
8. PISKOWNOV, N. **Cálculo Diferencial e Integral**. Vol.1 e 2. Porto: Lopes da Silva, 1992.
9. SHENK, A. **Cálculo e Geometria Analítica**. Vol.1 e 2. Rio de Janeiro: Campus, 1997.
10. SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: Editora Mc-Graw Hill do Brasil, 1983.
11. STEWART, J. **Cálculo**. Vol. I. 4.ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.