

Capítulo 8

Integrais Múltiplas

8.1 Integrais Iteradas

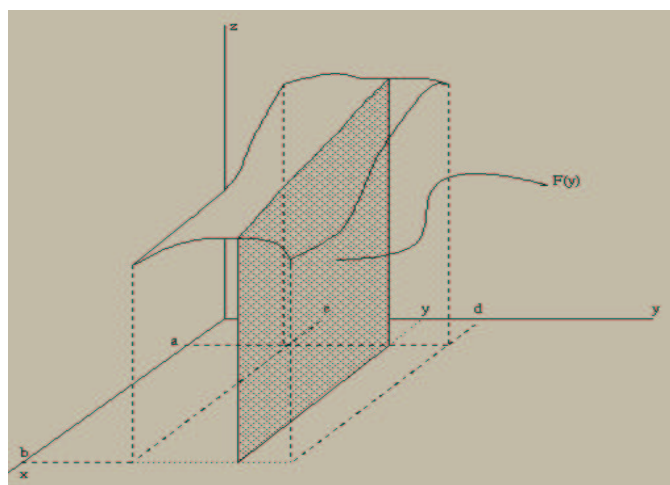
Suponha que $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínua, onde $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Conforme já vimos

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

é contínua em $[c, d]$. Logo

$$\int_c^d F(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

faz sentido.

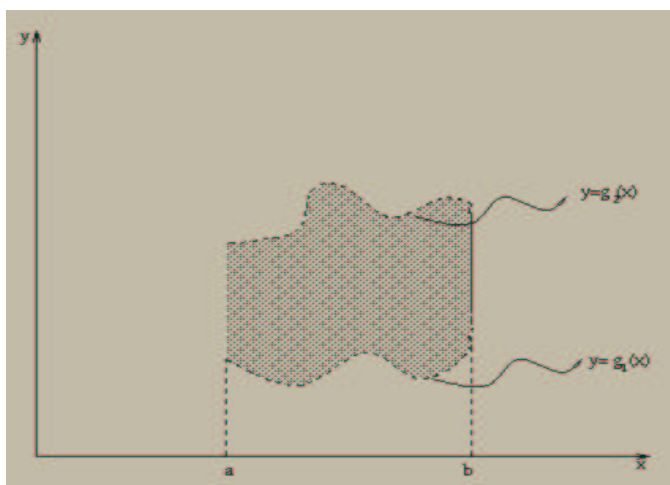


Uma integral deste tipo é chamada integral iterada e representa (se $f \geq 0$) o volume sob o gráfico da f .

A região de integração das integrais não precisa ser um retângulo.

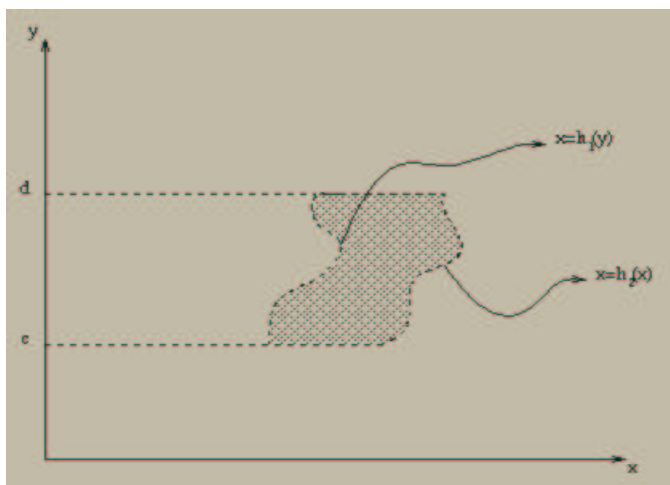
Exemplo 8.1.1 Considere a região $R_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$. Então podemos formar a seguinte integral iterada

$$\int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$



Exemplo 8.1.2 Considere a região $R_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$. Então podemos formar a seguinte integral iterada

$$\int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$



Exemplo 8.1.3 Desenhe as regiões de integração e calcule as integrais

1. $\int_0^1 \left(\int_0^2 (x^2 + y^2) dy \right) dx = 10/3$

2. $\int_0^2 \left(\int_0^u 5u^2 v dv \right) du$

$$3. \quad \int_1^3 \left(\int_{\pi/6}^{y^2} 2y \cos(x) dx \right) dy = \cos(1) - \cos(9) - 4$$

Outra notação para integrais iteradas

$$\int_a^b dy \int_{h(y)}^{g(y)} f(x, y) dx \quad \text{ou} \quad \int_c^d dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$$

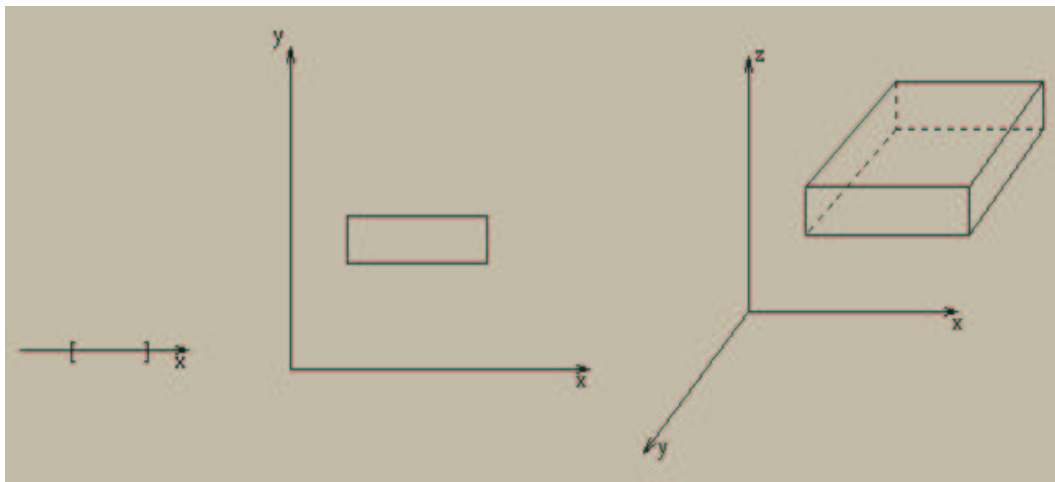
8.2 Integrais Múltiplas

Consideremos agora $F : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Problema: Definir de modo análogo ao do Cálculo I a integral de f sobre B .

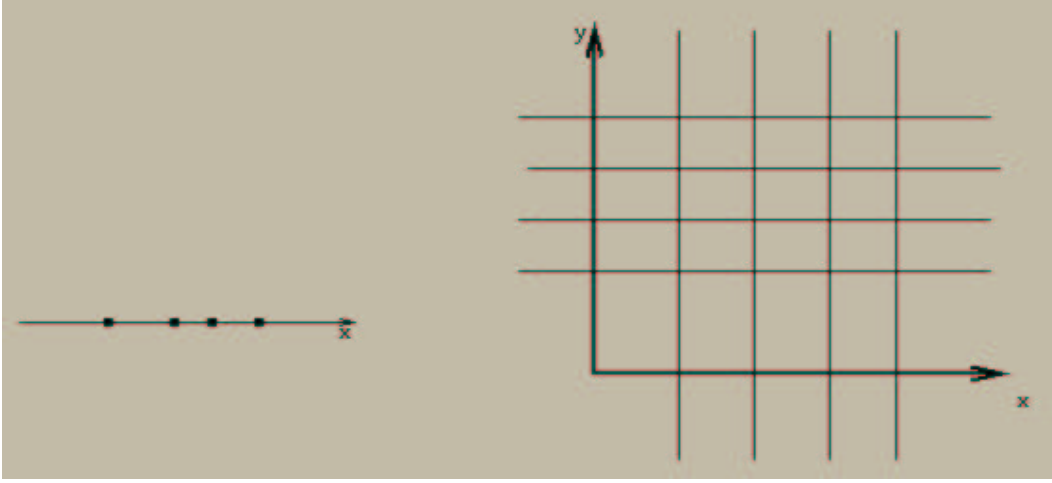
Um *retângulo fechado* R no $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ constituído de todos os pontos $x = (x_1, \dots, x_n)$ que satisfazem as desigualdades

$$a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, \dots, n.$$



O volume de R , denotado por $V(R)$, é definido como $V(R) = (b_1 - a_1) \times \dots \times (b_n - a_n)$. Se para algum $1 \leq i \leq n$, $a_i = b_i$, $V(R) = 0$.

Um número finito de planos $n - 1$ dimensionais no $\mathbb{R}^n$ paralelos aos planos coordenados é chamado uma rede.

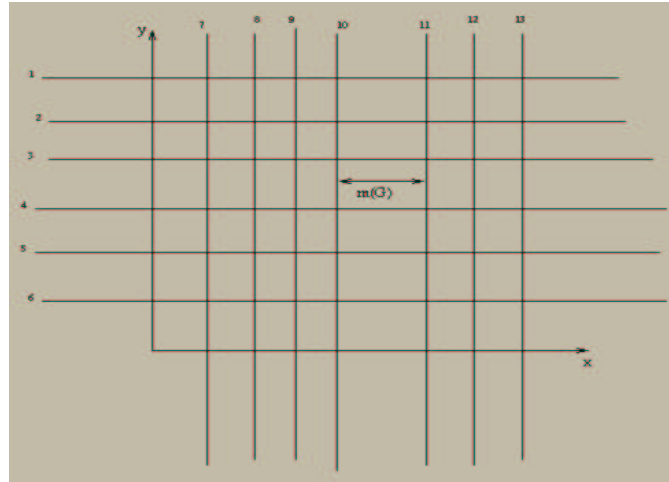


Uma rede divide o $\mathbb{R}^n$ em um número finito de conjuntos limitados (retângulos) e um número finito de conjuntos não limitados.

Dizemos que uma rede *cobre um conjunto* $B \subset \mathbb{R}^n$, se este estiver contido em uma reunião de retângulos fechados e limitados $R_1, \dots, R_n$ por ela determinados.

Claramente um conjunto pode ser coberto por uma rede se e somente se ele é limitado.

A *Malha da Rede* será o maior comprimento dos lados dos retângulos limitados por ela determinados.



Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}^n$, tais que:

- a) B é limitado;
- b) f é limitada sobre B .

Seja

$$f_B(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in B \\ 0 & \text{se } x \notin B. \end{cases}$$

Seja G uma rede que cobre B e que tenha malha $m(G)$. Em cada dos retângulos R_i determinados por G , $i = 1, 2, \dots, r$, escolhemos um ponto arbitrário P_i .

A soma

$$\sum_{i=1}^n f_B(P_i)V(R_i)$$

é chamada soma de Riemann de f sobre B , relativa à rede G . Se variando as redes G , com $m(G)$ tendendo a zero o

$$\lim_{m(G)} \sum_{i=1}^r f_B(P_i)V(R_i)$$

existe ele é chamado integral de F sobre B , sendo denotada por

$$\int_B f dv.$$

Se a integral existe, f é dita *integrável sobre B* .

O limite

$$\int_B f dv = \lim_{m(G)} \sum_{i=1}^r f_B(P_i)V(R_i)$$

significa que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se G é qualquer rede que cobre B e tem malha menor que δ uma soma de Riemann S de f sobre B relativa a rede G é tal que

$$|S - \int_B f dv| < \epsilon$$

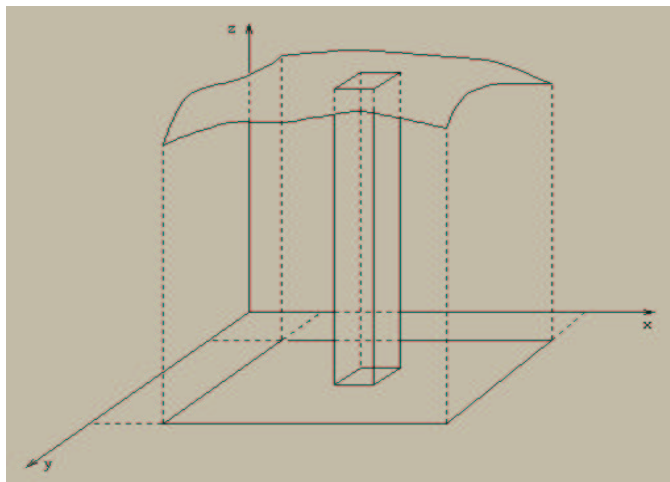
Notações:

$$\int_B f dv \quad \text{ou} \quad \int_B f(x, y) dx dy, \quad n = 2,$$

$$\int_B f(x, y, z) dx dy dz \quad \text{ou} \quad \int_B f dv, \quad n = 3.$$

Vamos interpretar geometricamente a integral dupla $\int_B f(x, y) dx dy$. Suponha que f seja contínua e positiva sobre B . Uma soma de Riemann aproxima o volume sob o gráfico de f , desta forma se S é o sólido sob o gráfico de f temos que

$$V(S) = \int_B f(x, y) dx dy$$



Propriedades da Integral: Se $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ são funções integráveis e $c \in \mathbb{R}$ então,

i) $f + g$ é integrável e

$$\int_D (f + g)(x, y) \, dx \, dy = \int_D f(x, y) \, dx \, dy + \int_D g(x, y) \, dx \, dy$$

ii) cf é integrável e

$$\int_D cf(x, y) \, dx \, dy = c \int_D f(x, y) \, dx \, dy$$

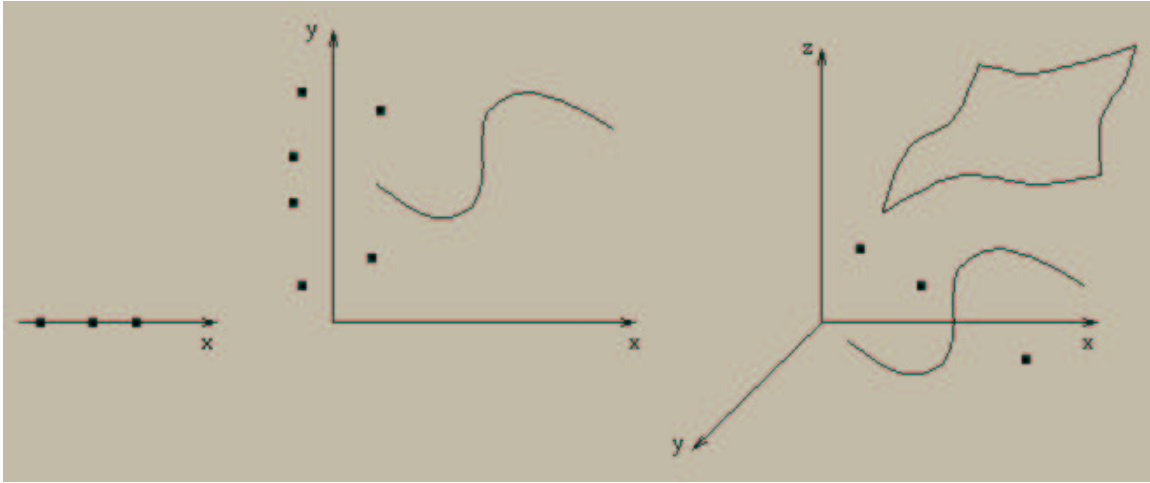
iii) Se $f \leq g$ então

$$\int_D f(x, y) \, dx \, dy \leq \int_D g(x, y) \, dx \, dy$$

Pergunta: O que dizer das integrais iteradas relativamente à integral quando ambas estão definidas.

Definição 8.2.1 *Um conjunto suave em $\mathbb{R}^n$ é a imagem de um conjunto compacto sob uma função $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n > m$ e ϕ de classe C^1 .*

Idéia Geométrica: (Conjunto de Volume Nulo)



Teorema 8.2.1 *Seja $B \subset \mathbb{R}^n$, limitado, tal que a fronteira de B esteja contida em um número finito de conjuntos suaves e f uma função definida e limitada em B .*

Se f é contínua em B , exceto possivelmente em uma reunião finita de conjuntos suaves, então f é integrável sobre B . O valor

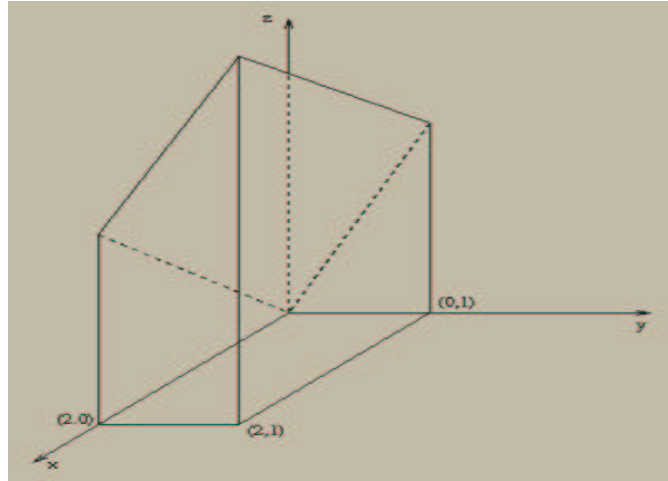
$$\int_B f \, dv$$

não se altera por troca dos valores de f sobre qualquer conjunto suave.

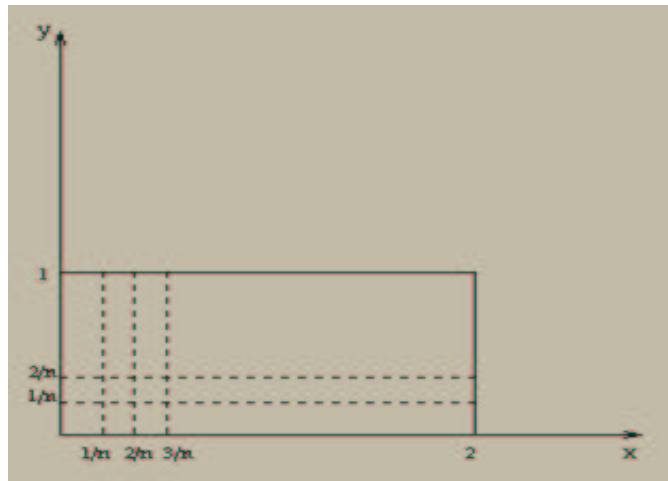
Exemplo 8.2.1

$$\int_B (2y + x) dx dy$$

onde $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$.



O teorema anterior assegura a existência da integral. Assim qualquer sequência de somas de Riemann associadas as redes que tem malha tendendo a zero pode ser usada para avaliar a integral.



Considere G_n a rede constituída pelas retas $x_i = \frac{i}{n}$, $0 \leq i \leq 2n$ e $y_j = \frac{j}{n}$, $0 \leq j \leq n$. Seus retângulos são $R_{ij} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$, $1 \leq i \leq 2n$ e $1 \leq j \leq n$. Cada dos retângulos R_{ij} tem malha $m(G_n) = \frac{1}{n}$. Em cada dos retângulos R_{ij} escolhemos o ponto $(x_i, y_j) = (\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$, $1 \leq i \leq 2n$ e $1 \leq j \leq n$. Então

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^n n \left(\frac{i}{n} + \frac{2j}{n} \right) \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^n n(i + 2j) \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{2n} (ni + 2n \frac{n+1}{2}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{2n} (i + (n+1)) = \frac{1}{n^2} (2n \frac{1+2n}{2} + 2n(n+1)) \rightarrow 4 \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$

Uma avaliação deste tipo é bastante trabalhosa, mesmo em casos em que a função e o conjunto envolvidos no cálculo da integral sejam bastante simples. Para sanar estas dificuldades temos o seguinte resultado

Teorema 8.2.2 (Fubini) *Seja $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ e $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável sobre R . Então, para qualquer permutação $p : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ as integrais iteradas*

$$\int_{a_{p(1)}}^{b_{p(1)}} dx_{p(1)} \int_{a_{p(2)}}^{b_{p(2)}} dx_{p(2)} \cdots \int_{a_{p(n)}}^{b_{p(n)}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{p(n)}$$

existem e

$$\int_R f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{a_{p(1)}}^{a_{p(1)}} dx_{p(1)} \int_{a_{p(2)}}^{a_{p(2)}} dx_{p(2)} \cdots \int_{a_{p(n)}}^{a_{p(n)}} f dx_{p(n)}$$

Observação 8.2.1 *Se f é integrável em R , as integrais iteradas em ordens distintas existem e todas elas coincidem com a integral múltipla da f em R .*

Exemplo 8.2.2 1) *Se $R = [a, b] \times [c, d]$ e $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ é $f \equiv 1$ então*

$$\int_R 1 dx dy = (b - a)(d - c)$$

2) *Se $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ e $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ é $f \equiv 1$ então*

$$\int_R 1 dx dy = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3).$$

Exemplo 8.2.3 *Calcular a integral*

$$\int_B (2y + x) dx dy, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Solução: Note que, pelo teorema acima

$$\int_B (2y + x) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^1 (2y + x) dy = \int_0^2 (1 + x) dx = \left(x + \frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^2 = 2 + 2 = 4.$$

Exemplo 8.2.4 *Calcular a integral*

$$\int_R xyz dx dy dz, \quad R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 2\}.$$

Solução: Note que, pelo teorema acima

$$\int_R xyz dx dy dz = \int_{-1}^2 dx \int_0^1 dy \int_1^2 xyz dz = \frac{9}{8}.$$

Observação 8.2.2 *Pode acontecer que as integrais iteradas existam sem que exista a integral múltipla.*

Contra Exemplo: Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \text{ é racional} \\ 2y, & x \text{ é irracional} \end{cases}$$

definida em $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Então

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 1 dx = 1$$

mas a integral $\int_R f dx dy$ não existe.

Exercício 8.2.1 *Mostre que $\int_R f(x, y) dx dy$ não existe.*

Sugestão: Escolha os pontos (x_i, y_j) racionais então $S_1 = 1$. Em seguida escolha até $y = \frac{1}{2}$, (x_i, y_j) de tal forma que x_i é irracional e para $y > \frac{1}{2}$ escolhamos (x_i, y_j) racionais.

O teorema a seguir é bastante útil quando queremos determinar a integral de uma função em regiões complicadas (como veremos adiante).

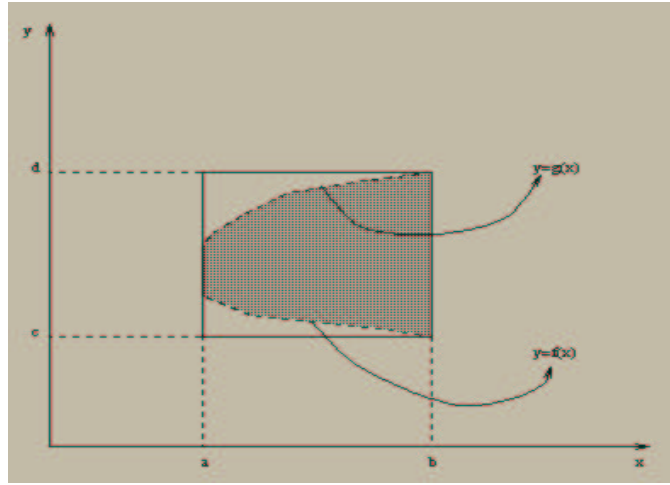
Teorema 8.2.3 *Seja D como no teorema anterior e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ integrável. Se $D = D_1 \cup D_2$ onde D_1 e D_2 são como acima e $\text{Int}D_1 \cap \text{Int}D_2 = \emptyset$, então*

$$\int_D f dv = \int_{D_1} f dv + \int_{D_2} f dv.$$

Como observamos anteriormente, o cálculo da integral múltipla de uma função de várias variáveis reais a valores reais é (mesmo nos casos mais simples) uma tarefa difícil. O Teorema de Fubini parece ser a ferramenta que tornará menos árdua a tarefa de calcular tais integrais, no entanto, a sua utilização está restrita ao cálculo de integrais em retângulos. Vamos agora observar que o Teorema de Fubini (na forma apresentada) pode de fato ser utilizado para um número bastante grande de regiões. Faremos isto através de exemplos em $\mathbb{R}^2$ que facilmente se estende a dimensões mais altas.

Exemplo 8.2.5 *Seja $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções reais limitadas com $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ e $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$. Então,*

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} f(x, y) dy$$

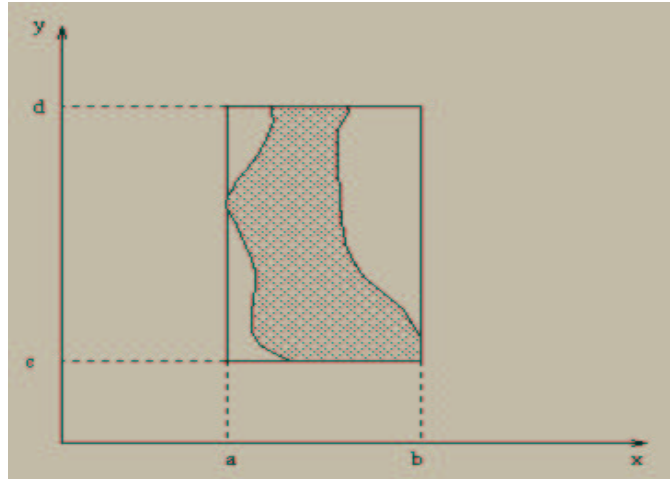


Para verificar que este é o caso basta considerar as constantes $d = \sup_{x \in [a, b]} g(x)$ e $c = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ e definir $\tilde{f}$ da seguinte forma $\tilde{f}(x, y) = f(x, y)$ se $(x, y) \in D$ e $\tilde{f}(x, y) = 0$ se $(x, y) \in R \setminus D$ onde $R = [a, b] \times [c, d]$. Segue daí que $\tilde{f}$ é integrável em $R = D \cup R \setminus D$ e

$$\int_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} f(x, y) dx dy.$$

Exemplo 8.2.6 Seja $h_1, h_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções reais limitadas com $h_1(y) \leq h_2(y)$ para todo $y \in [c, d]$ e $D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$. Então,

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx$$



A verificação deste fato é similar a verificação do exemplo anterior.

Exemplo 8.2.7 Seja a função $f \equiv 1$ integrável sobre um conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$. Então definimos o volume de B como sendo:

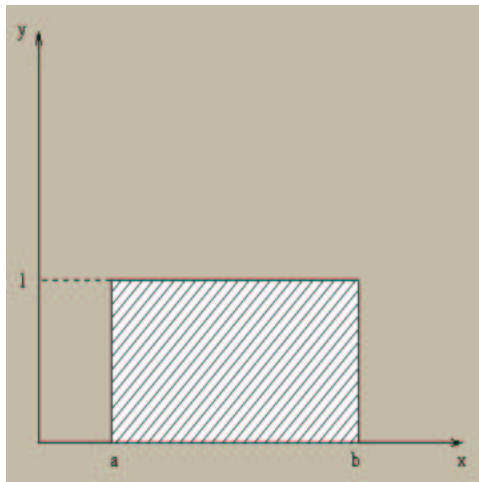
$$V(B) = \int_B 1 dv = \int_B dv.$$

No caso $n = 2$ o volume acima referido é a área. Então escrevemos $A(B)$.

Motivação geométrica:

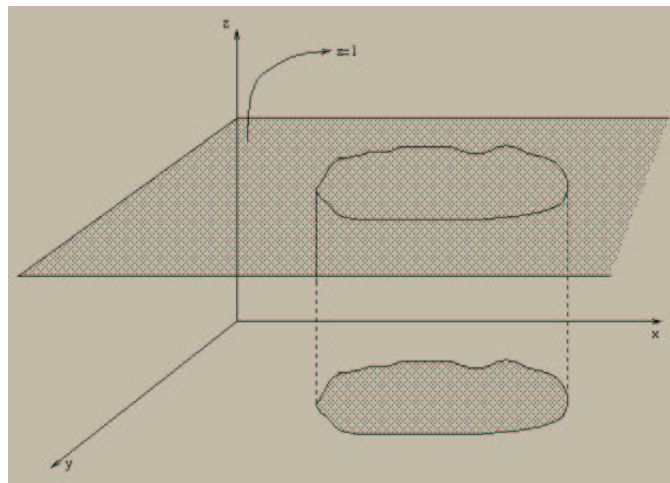
Caso $n = 1$:

$$\int_a^b 1 \, dx \, dy = b - a = \text{área de um retângulo de altura 1 tendo como base o intervalo } [a, b]$$



Caso $n = 2$:

$$\int_B 1 \, dx \, dy = A(B).1 = \text{volume sob o gráfico da função } f \equiv 1 \text{ definida em } B \subset \mathbb{R}^2$$



Observação 8.2.3 Suponha que S é um subconjunto suave do $\mathbb{R}^n$ então

$$V(S) = \int_S 1 \, dv = \int_S 0 \, dv = 0$$

onde a penúltima igualdade é obtida trocando-se os valores da função $f \equiv 1$ sobre o conjunto S , fazendo-os iguais a zero.

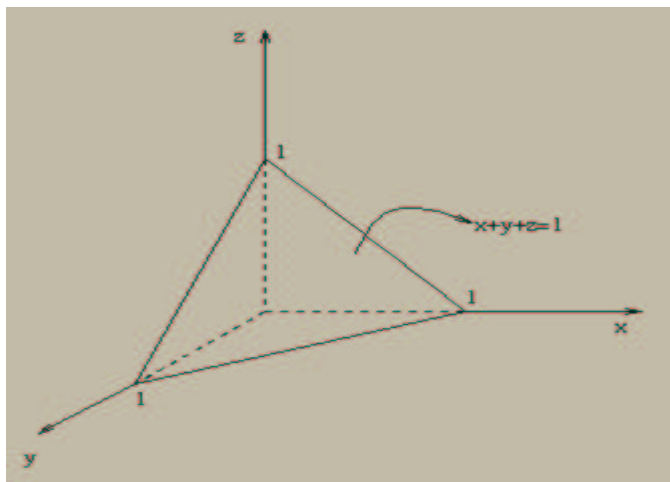
Para alguns tipos de conjuntos a integral $\int_B 1 \, dv$ não existe, neste caso o volume de B não está definido.

Exemplo 8.2.8 $B = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ não tem seu volume definido.

Exemplo 8.2.9 Se R é um retângulo então

$$V(R) = \Pi(\text{lad os}) = \int_R 1 \, dv.$$

Exemplo 8.2.10 Ache o volume da região $B \subset \mathbb{R}^3$ limitada pelos planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e pelo plano $x + y + z = 1$.



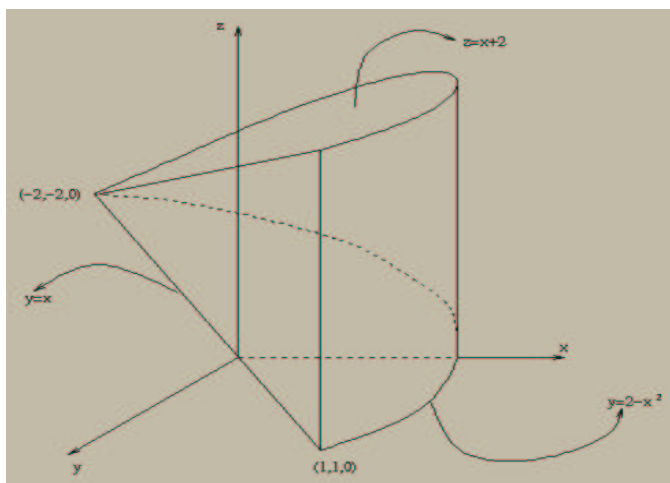
Solução:

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = 1/6.$$

De outro modo, poderíamos fazer o cálculo do volume do sólido sob o gráfico da função $f(x, y) = 1 - x - y$

$$V(B) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy = 1/6.$$

Exemplo 8.2.11 Determine o volume do sólido cuja base é a região do plano xy delimitada pela parábola $y = 2 - x^2$ e pela reta $y = x$ e cuja parte superior está contida no plano $z = x + 2$.

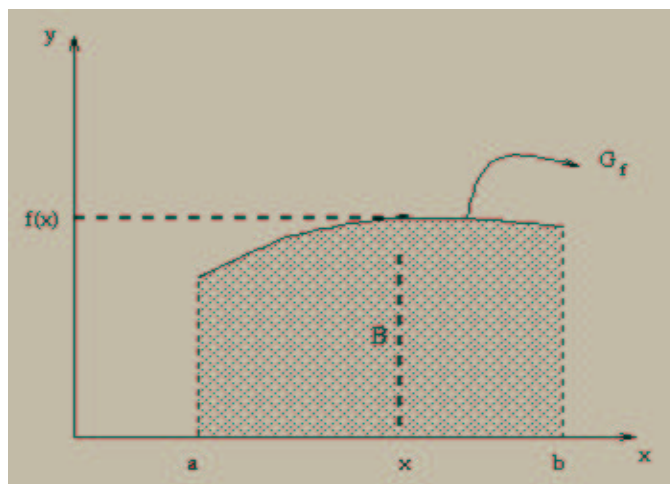


$$V = \int_{-2}^1 dx \int_x^{2-x^2} dy \int_0^{x+2} dz = 27/4$$

ou

$$V = \int_{-2}^1 dx \int_x^{2-x^2} x + 2 dy = 27/4.$$

Exemplo 8.2.12 *Seja B a região do plano representada abaixo. Calcule a área de B .*



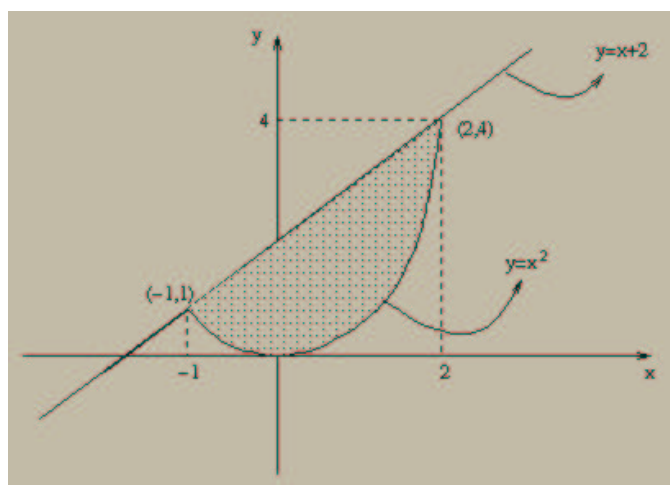
Solução:

$$A(B) = \int_B dx dy = \int_a^b \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b f(x) dx.$$

Exemplo 8.2.13 *Em $\mathbb{R}^2$, calcular a área entre a parábola $y = x^2$ e a reta $y = x + 2$.*

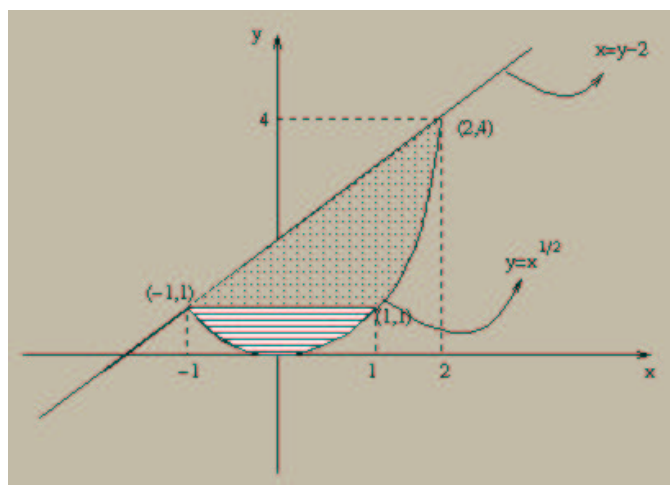
Solução:

$$A = \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} dy$$



ou

$$A = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx + \int_1^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx$$

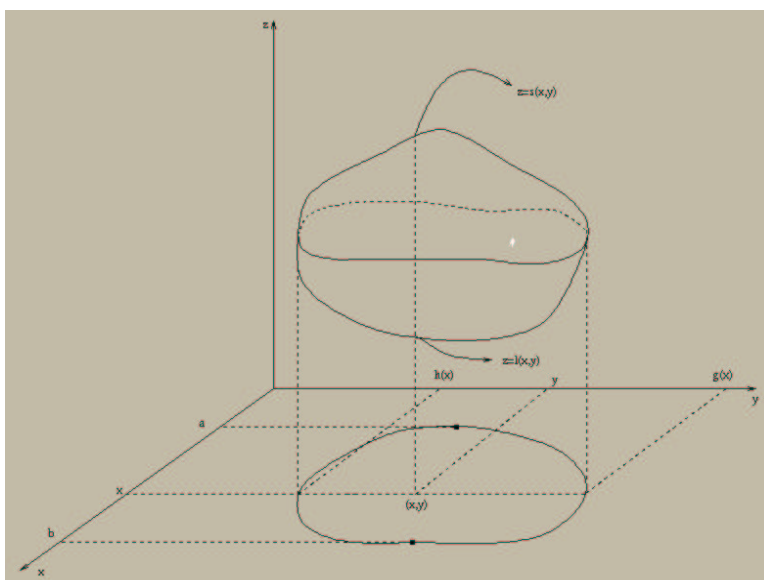


Observação 8.2.4 *Este último exemplo, dá uma idéia de como é importante escolher adequadamente a ordem de integração.*

8.2.1 Regras para estabelecer limites de integração para integrais iteradas

Primeira Etapa: Achar os valores extremos da variável externa. Por exemplo

$$\int_a^b dx \int dy \int f(x, y, z) dz.$$



Segunda Etapa: Fixe a variável externa em um valor genérico (ex. x), determinando um corte na região sólida. Determine os valores extremos da variável intermediária neste corte. Por exemplo

$$\int_a^b dx \int_{h(x)}^{g(x)} dy \int f(x, y, z) dz.$$

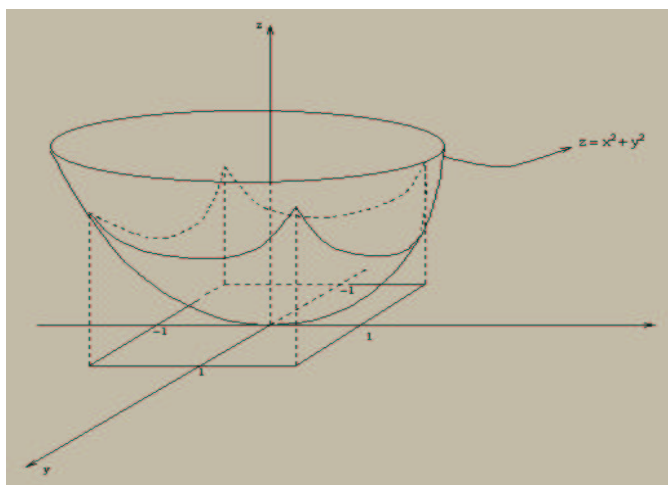
Terceira Etapa: Fixe agora neste corte a variável intermediária. Determine os valores extremos da variável interna. Por exemplo

$$\int_a^b dx \int_{h(x)}^{g(x)} dy \int_{l(x,y)}^{s(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

Exemplo 8.2.14

$$\int_{-2}^1 dx \int_x^{2-x^2} dy \int_0^{x+2} dz$$

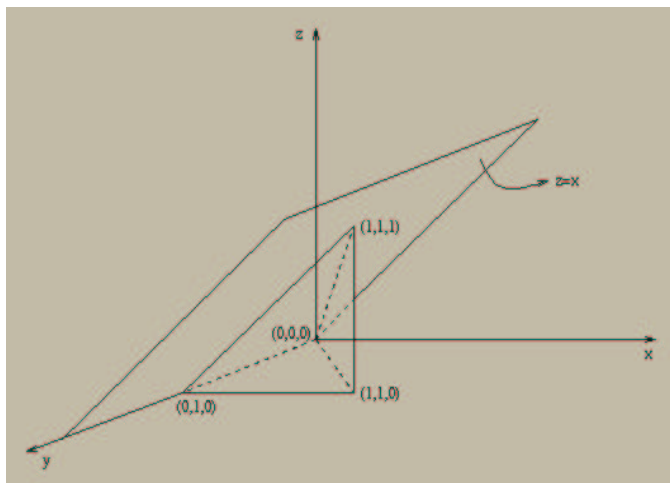
Exemplo 8.2.15 Encontre o volume sob o gráfico do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e acima da região $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$ do plano xy .



Solução:

$$V = \int_R (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{3} + 2y^2 \right) dy = 8/3.$$

Exemplo 8.2.16 Calcular $\int_D x dx dy$ onde D é um triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$.



Solução:

$$\int_D x \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_x^1 x \, dy = \int_0^1 x(1-x) \, dx = 1/6$$

ou

$$\int_D x \, dx \, dy = \int_0^1 dy \int_0^y x \, dx = \int_0^1 \frac{y^2}{2} \, dy = 1/6.$$

Exemplo 8.2.17 Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x} \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$. Calcule a integral

$$\int_D e^{\frac{x}{y}} \, dx \, dy$$

Solução:

$$\begin{aligned} \int_D e^{\frac{x}{y}} \, dx \, dy &= \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 e^{\frac{x}{y}} \, dy \\ &= \int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} \, dx = \int_0^1 y e^{\frac{x}{y}} \Big|_{x=0}^{x=y^2} \, dy = \int_0^1 (y e^y - y) \, dy = -\frac{1}{2} + (y-1)e^y \Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

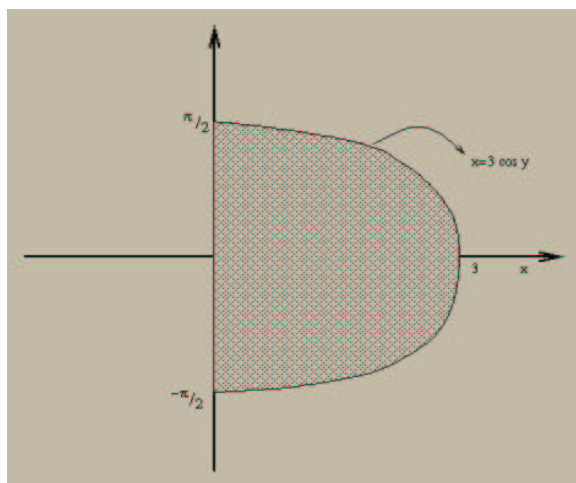
Exemplo 8.2.18 Calcule a integral

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{3 \cos y} x^2 \sin^2 y \, dx$$

e desenhe o domínio de integração.

Solução: A região é dada por

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x \leq 3 \cos y\}$$



Vamos agora calcular a integral.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy \int_0^{3 \cos y} x^2 \sin^2 y dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 9(\cos y)^3 (\sin y)^2 dy \\ &= 18 \int_0^{\pi/2} \cos y [1 - (\sin y)^2] (\sin y)^2 dy = 18 \int_0^1 (1 - u^2) u^2 du = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

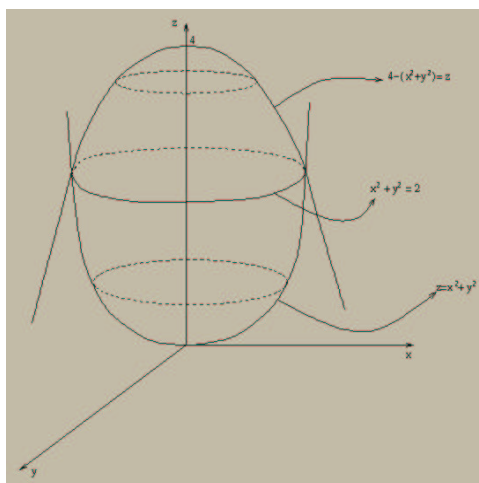
Definição 8.2.2 Se $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ são funções integráveis e $f(x, y) \leq g(x, y)$, $\forall (x, y) \in D$, então o volume de

$$B = \{(x, y, z) : (x, y) \in D \text{ e } f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$$

é

$$\int_D [g(x, y) - f(x, y)] dx dy.$$

Exemplo 8.2.19 Calcule o volume do sólido compreendido entre os parabolóides $z = x^2 + y^2$ e $z = 4 - x^2 - y^2$



Solução: Note que os dois parabolóides se interceptam para pontos da circunferência $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 2\}$. O volume do sólido é dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_D [4 - x^2 - y^2 - x^2 - y^2] dx dy = 2 \int_D [2 - x^2 - y^2] dx dy \\ &= 2 \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (2 - x^2 - y^2) dy = 8 \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} (2 - x^2 - y^2) dy \\ &= 8 \int_0^2 \left[2y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right] \Big|_0^{\sqrt{2-x^2}} dx = 8 \int_0^2 \left[2\sqrt{2-x^2} - x^2 \sqrt{2-x^2} - \frac{(2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right] dx \end{aligned}$$

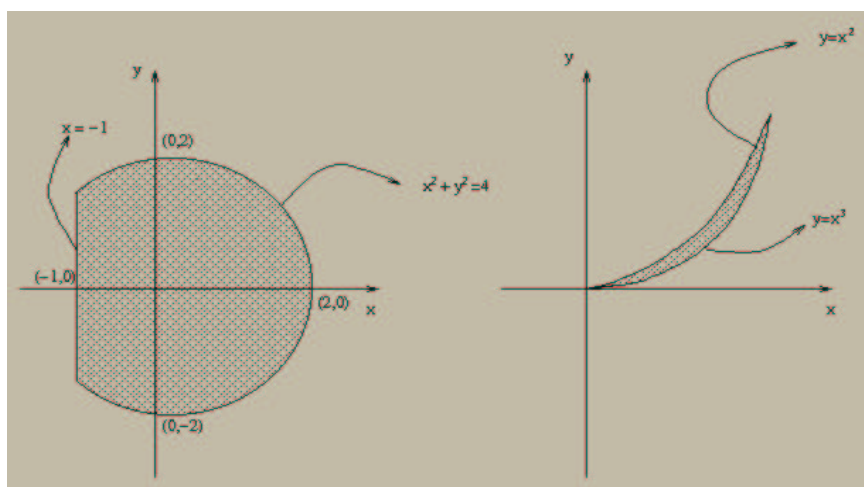
Fazendo a mudança de variável $x = \sqrt{2} \operatorname{senu}$ temos que

$$\begin{aligned} V &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[4 \cos u - 4(\operatorname{senu})^2 \cos u - \frac{4}{3}(\cos u)^3 \right] \cos u du \\ &= 32 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(\cos u)^2 - (\operatorname{senu})^2 (\cos u)^2 - \frac{1}{3}(\cos u)^4 \right] du = 4\pi \end{aligned}$$

onde para resolver a última integral acima utilizamos as fórmulas trigonométricas de arco duplo.

Exemplo 8.2.20 *Desenhe as regiões de integração para as integrais iteradas:*

$$a) \int_{-1}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \quad b) \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx$$



Exercício 8.2.2 *Calcule $\int_R f dv$ para as seguintes escolhas de f e R .*

a) $f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z}$, $R = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

b) $f(x, y, z) = x^2 y z$, R é o tetraedro de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

8.3 Mudança de Variáveis

Para integrais de funções de uma variável temos o seguinte resultado de mudança de variáveis

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\phi(u)) \phi'(u) du, \quad (x = \phi(u))$$

sempre que $\phi'(u) \neq 0$ para $u \in [a, b]$ (de fato a condição $\phi'(0) \neq 0$ não é necessária, veja 9.1.3). Como vimos anteriormente podemos transformar regiões relativamente complicadas em regiões simples usando transformações e como a complexidade da região é uma das dificuldades no cálculo de integrais múltiplas um resultado análogo ao resultado acima para funções de várias variáveis pode ser extremamente útil (este é de fato o caso como veremos a seguir).

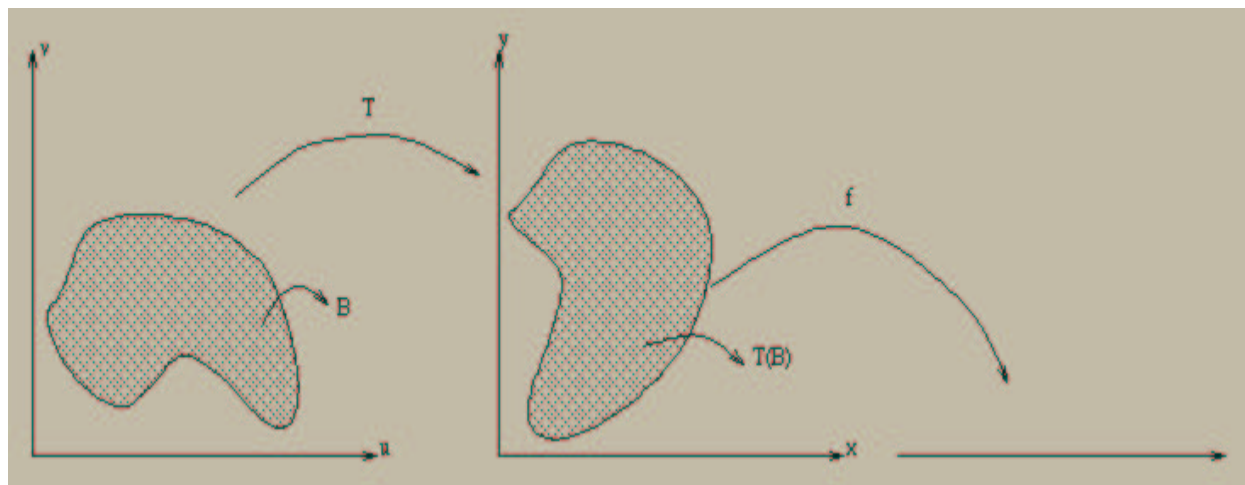
No $\mathbb{R}^n$ uma troca de variáveis corresponde a uma transformação do $\mathbb{R}^n$ no $\mathbb{R}^n$ que vimos anteriormente; isto é, $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Temos então o seguinte resultado

Teorema 8.3.1 (Mudança de Variáveis) *Seja $T : D(T) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação de classe C^1 . Seja $B \subset D(T)$ um conjunto limitado com fronteira contida em um número finito de conjuntos suaves. Suponhamos que B e sua fronteira estão contidos no interior de $D(T)$ e que:*

- i) T é injetora em B ,
- ii) $\det J(T) \neq 0$ em todo ponto de B .

Então, se a função f é limitada e contínua sobre $T(B)$, temos:

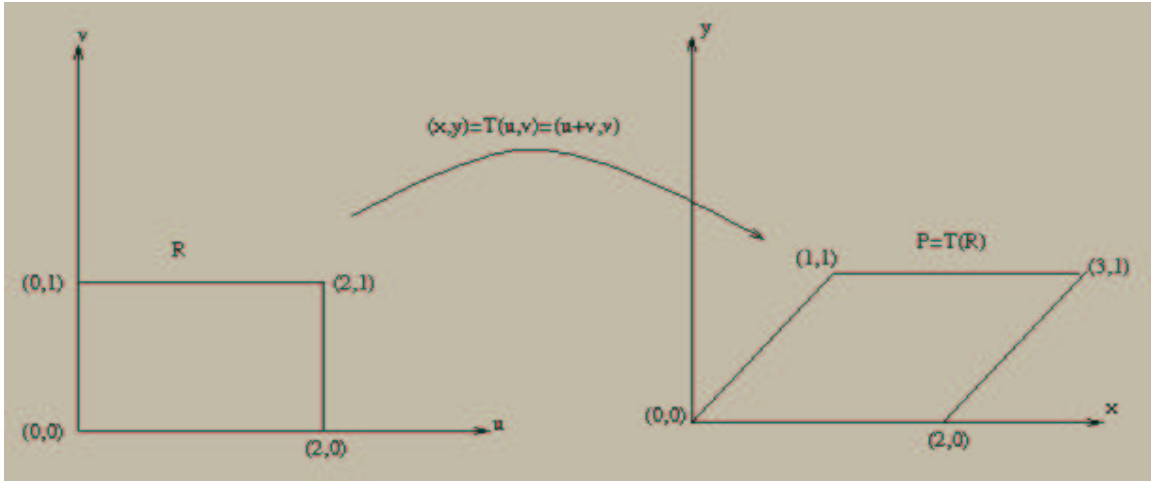
$$\int_{T(B)} f dv = \int_B (f \circ T) |\det J(T)| dv$$



Observação 8.3.1 *O teorema ainda é verdadeiro se i) e ii) deixam de ser verdadeiros em conjuntos suaves.*

Exemplo 8.3.1 Seja $P \subset \mathbb{R}^2$ o paralelogramo determinado pelos pontos $(0,0)$, $(1,1)$, $(3,1)$ e $(2,0)$. Calcular a integral

$$\int_P (x+y) dx dy.$$



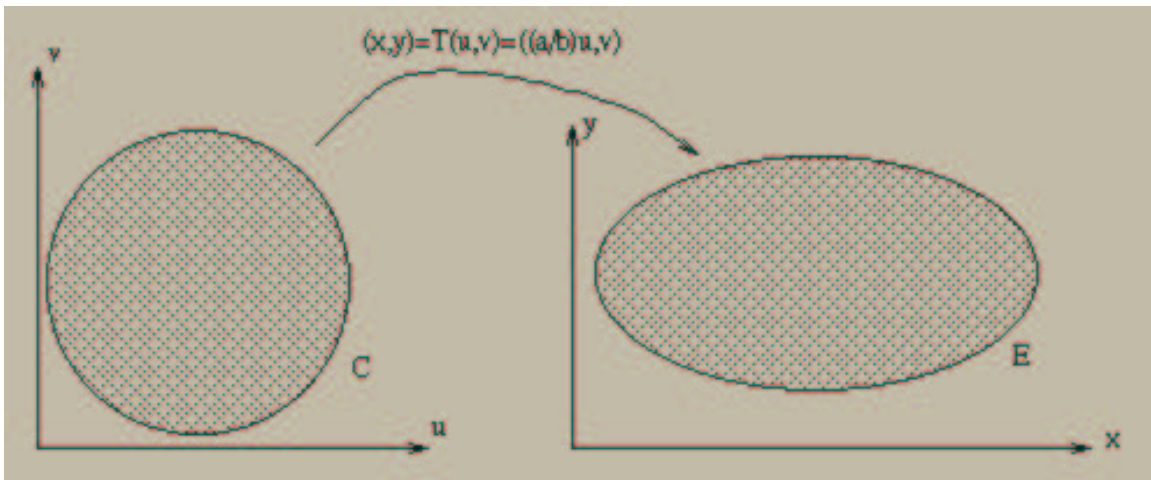
Solução: Note que a transformação $T(u,v) = (u+v, u)$ transforma o retângulo $R = [0,2] \times [0,1]$ e que

$$J(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então $\det J(T) = 1 \neq 0$, T é C^1 e T é injetora com $T(R) = P$. Segue do teorema que

$$\int_{P=T(R)} (x+y) dx dy = \int_R (u+2v) \cdot 1 \cdot du dv = \int_0^2 du \int_0^1 (u+2v) dv = 4.$$

Exemplo 8.3.2 Calcule a área da região E limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, conhecida a área do círculo $C = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq b^2\}$



Solução: Considere a transformação

$$(x, y) = T(u, v) = \left(\frac{a}{b}u, v\right).$$

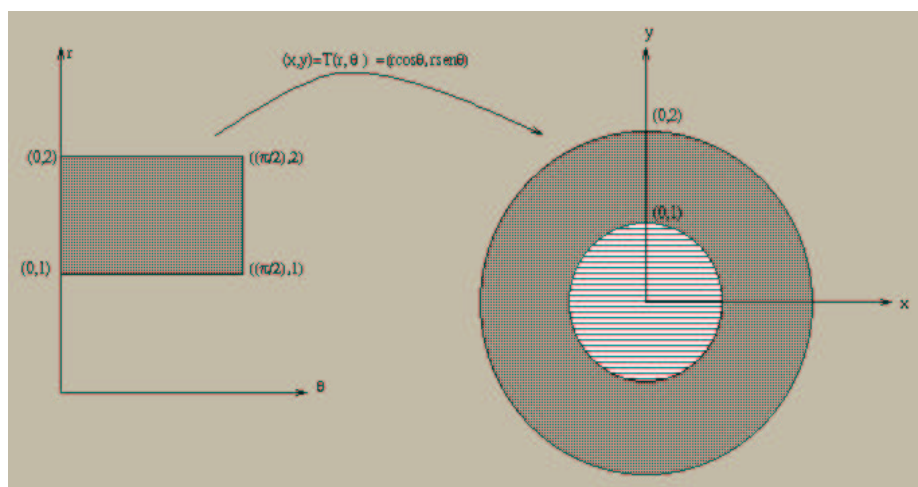
Té injetora, de classe C^1 e $T(C) = E$

$$\det J(T) = \begin{vmatrix} \frac{a}{b} & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{a}{b} > 0.$$

Pelo teorema anterior

$$\int_{T(C)=E} dA = \int_C \frac{a}{b} dA = \frac{a}{b} \int_C dA = \frac{a}{b} \pi b^2 = \pi ab.$$

Exemplo 8.3.3 Calcular a área da região plana P no primeiro quadrante compreendida entre as circunferências de raios 1 e 2.



Solução: Considere a transformação

$$(x, y) = T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

T é injetora, de classe C^1 e $T(C) = E$

$$\det J(T) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r > 0.$$

Então, se $R = [1, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, temos que $T(R) = P$ e pelo teorema anterior

$$\int_{T(R)=P} dA = \int_C r dA = \int_C r dr d\theta = \frac{\pi}{2} \frac{r^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{3}{4}\pi.$$

8.3.1 Coordenadas Polares

Um ponto $P = (x, y)$ do plano fica completamente determinado se sabemos a distância r de P a origem $O = (0, 0)$ e o ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$, medido no sentido anti-horário e a partir do semi-eixo positivo das abscissas, entre este semi-eixo e a reta determinada por P e por $(0, 0)$. Definimos a seguinte transformação de coordenadas

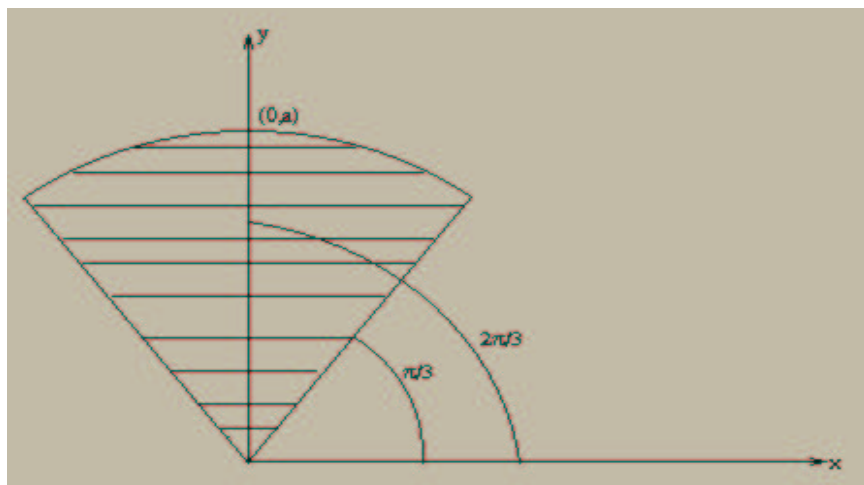
$$(x, y) = T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta), \quad r > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Esta transformação é conhecida como Transformação de Coordenadas “Polar” e é injetora, de classe C^1 com $\det J(T) = r$.

Assim,

$$\int_{T(B)} f(x, y) dx dy = \int_B (f \circ T) |\det J(T)| dr d\theta = \int_B f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

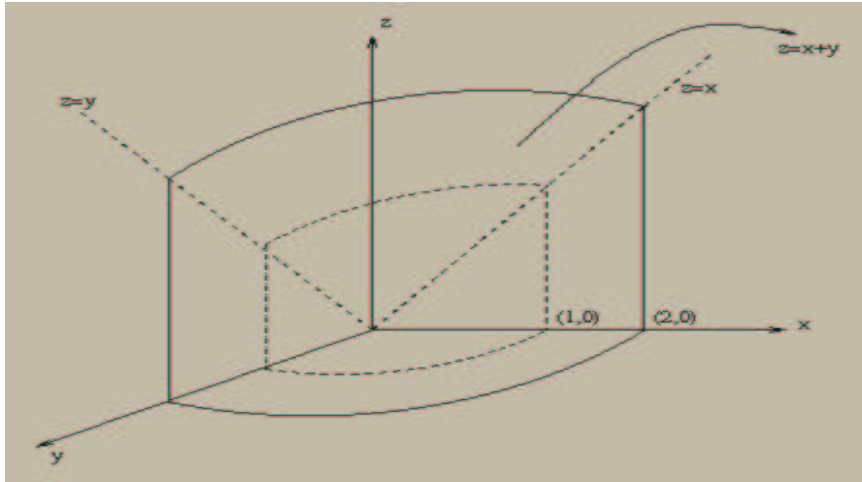
Exemplo 8.3.4 Determinar $\int_D y dx dy$ onde D é o setor $\{(r, \theta) : 0 \leq r \leq a, \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq 2\pi/3\}$



Solução: Seja $R = [\frac{\pi}{3}, 2\pi/3] \times [0, a]$ e note que a transformação $T : R \rightarrow D$ dada por $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ (Transformação de Coordenadas “Polar”) é bijetora e $\det J(T) = r$. Então

$$\int_D y dx dy = \int_R r r \sin \theta dr d\theta = \int_R r^2 \sin \theta dr d\theta = \int_0^a r^2 dr \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin \theta d\theta = \int_0^a r^2 dr = \frac{a^3}{3}.$$

Exemplo 8.3.5 Calcule o volume do sólido D cuja base B está no primeiro quadrante do plano xy ($x \geq 0, y \geq 0$), sendo delimitada pelas curvas $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$ e cuja parte superior está no plano $z = x + y$, tendo faces laterais ortogonais ao plano xy .



Solução: Note que, usando o Teorema de Fubini, temos

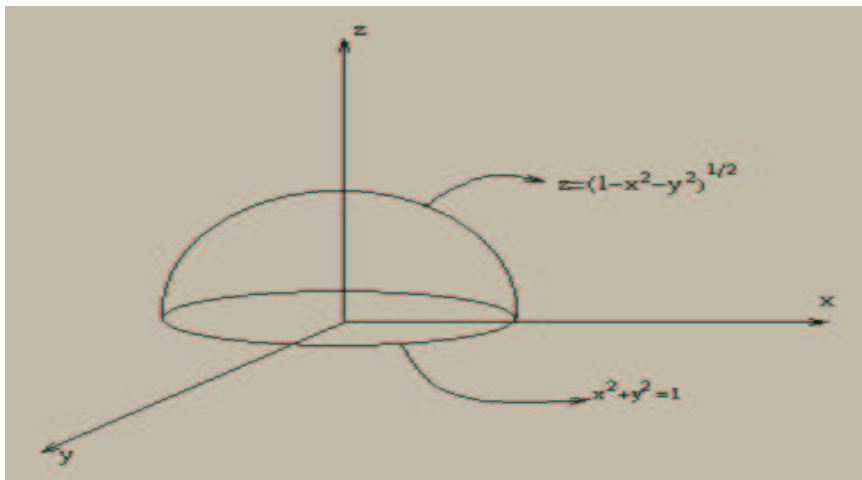
$$\begin{aligned} V = \int_D (x+y) dx dy &= \int_B dx dy \int_0^{x+y} dz = \int_B (x+y) dx dy \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^2 (r \cos \theta + r \sin \theta) r dr = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

Exemplo 8.3.6 Calcular $\int_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, onde D é a região do plano compreendida entre as curvas $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$.

Solução: Utilizando coordenadas polares, temos que se $R = [2, 3] \times [0, 2\pi]$, então:

$$\int_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_R r r dr d\theta = \int_2^3 r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \frac{r^3}{3} \Big|_2^3 = \frac{38}{3}\pi$$

Exemplo 8.3.7 Determinar os extremos de integração para as integrais iteradas associadas a $\int_R f(x, y, z) dx dy dz$, onde R é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 0$



Solução:

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz$$

Exemplo 8.3.8 Determine o volume do sólido compreendido entre as superfícies $z = 8 - x^2 - y^2$ e $z = x^2 + 3y^2$.

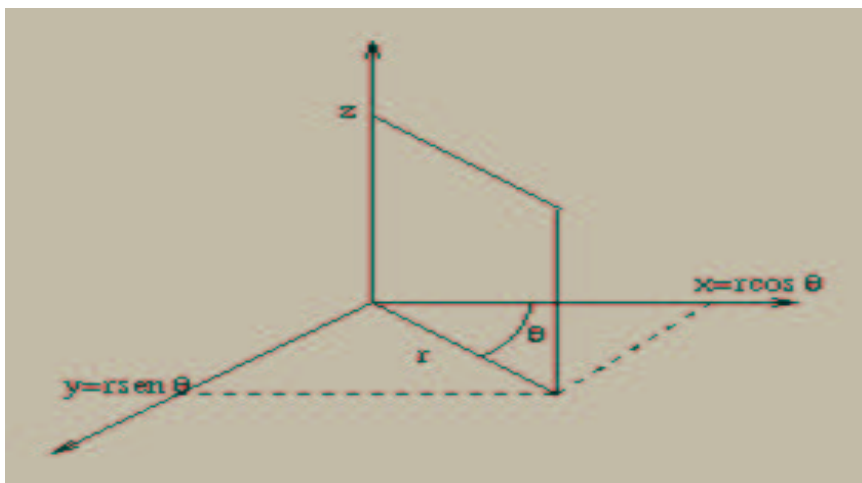
Solução: Se um ponto (x, y, z) está na intersecção das superfícies então $z = 8 - x^2 - y^2 = x^2 + 3y^2$ e portanto $x^2 + 2y^2 = 4$

$$V = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz = 8\pi\sqrt{2}.$$

8.3.2 Coordenadas Cilíndricas

Um ponto $P = (x, y, z)$ do espaço fica completamente determinado se sabemos a distância r de $P_1 = (x, y, 0)$ a origem $O = (0, 0, 0)$ o ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$, medido no sentido anti-horário e a partir do semi-eixo positivo das abscissas, entre este semi-eixo e a reta determinada por P e por $(0, 0, 0)$ e a cota z . Definimos a seguinte transformação de coordenadas

$$(x, y, z) = T(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z), \quad r > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad z \in \mathbb{R}.$$

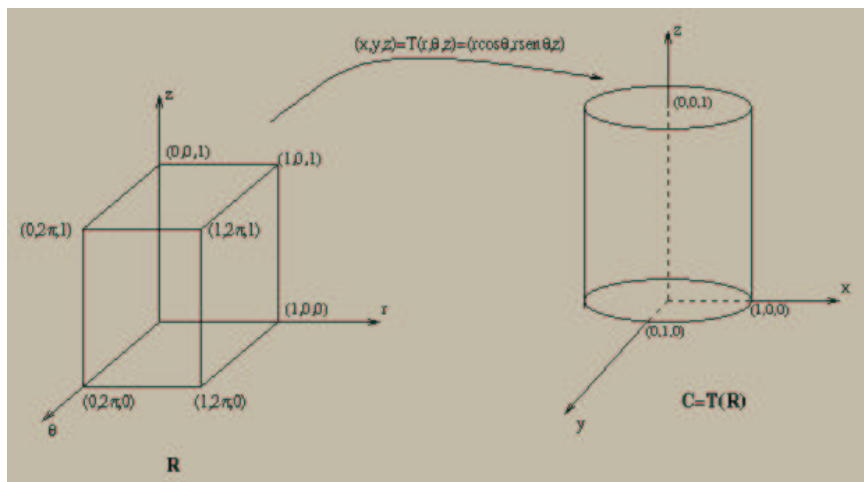


Esta transformação é conhecida como Transformação de Coordenadas “Cilíndricas” e é injetora, de classe C^1 com $\det J(T) = r$. De fato:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

$$\det J(T) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Exemplo 8.3.9 Calcular $\int_C f(x, y, z) dx dy dz$ onde $f(x, y, z) = 4xy$ e C é a região cilíndrica $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.



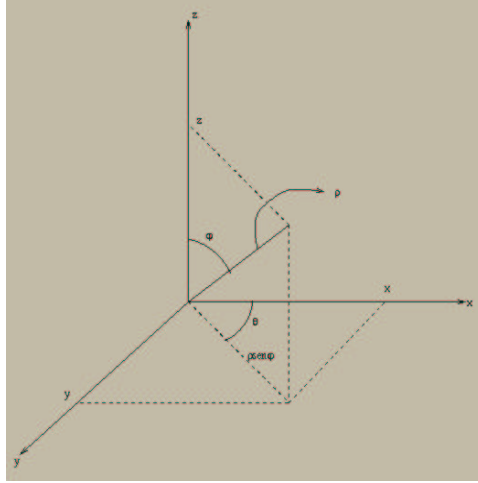
Solução: Note que a transformação de coordenadas cilíndricas leva o retângulo $R = \{(r, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ na região C . Logo, dos Teorema 8.3.1 e Teorema 8.2.2, temos

$$\begin{aligned} \int_{C=T(R)} 4xy dx dy dz &= \int_R 4r^3 \cos \theta \sin \theta dr d\theta dz = \int_0^1 4r^3 dr \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta \\ &= \int_0^1 4r^3 dr (-\cos 2\theta) \Big|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

8.3.3 Coordenadas Esféricas

Um ponto $P = (x, y, z)$ do espaço fica completamente determinado se sabemos a distância ρ de $P = (x, y, z)$ a origem $O = (0, 0, 0)$ o ângulo $\varphi \in [0, \pi]$ medido no sentido horário, entre o semi-eixo positivo das cotas e a reta determinada por P e $(0, 0, 0)$ e o ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$, medido no sentido anti-horário entre o semi-eixo positivo das abscissas, e a reta determinada por $P_1 = (x, y, 0)$ e por $(0, 0, 0)$. Definimos a seguinte transformação de coordenadas

$$(x, y, z) = T(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi), \quad \rho > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$



Esta transformação é conhecida como Transformação de Coordenadas “Esféricas” e é injetora, de classe C^1 com $\det J(T) = \rho^2 \sin \varphi$. De fato:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \quad x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \varphi$$

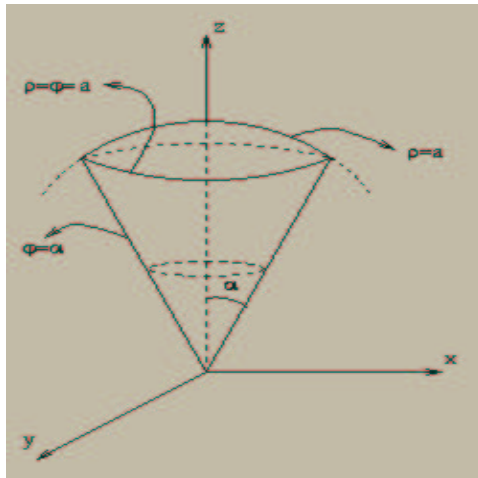
$$\det J(T) = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & -\rho \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \varphi.$$

Exemplo 8.3.10 Calcular $\int_B f(x, y, z) dx dy dz$, onde $f(x, y, z) = z^2$ e B é a seguinte região $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Solução: Note que T leva o retângulo $R = \{(\rho, \varphi, \theta) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ e B . Logo, dos Teorema 8.3.1 e Teorema 8.2.2, temos

$$\begin{aligned} \int_{B=T(R)} z^2 dx dy dz &= \int_R \rho^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 \rho^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi d\rho = \frac{4\pi}{15} \end{aligned}$$

Exemplo 8.3.11 Calcular o volume da região C comum à esfera $\rho \leq a$ e ao cone $\varphi \leq \alpha$.



Solução: Note que T leva o retângulo $R = \{(\rho, \varphi, \theta) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \alpha, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ e C . Logo, dos Teorema 8.3.1 e Teorema 8.2.2, temos

$$\begin{aligned} V(C) = \int_{C=T(R)} dx dy dz &= \int_R \rho \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\alpha d\varphi \int_0^1 \rho^2 \sin \varphi d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha d\varphi \int_0^1 \frac{\rho^3}{3} \sin \varphi d\theta = 2\pi \frac{\alpha^3}{3} (1 - \cos \alpha) \end{aligned}$$

8.3.4 Densidade e Centro de Massa

Considere a seguinte situação



m_1 e m_2 são as massas de partículas pontuais sobre x_1 e x_2 respectivamente. Então $m_1 x_1 = m_2 |x_2|$ ou seja $m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$.

Em geral se $m_1, \dots, m_n$ são as massas de partículas pontuais localizadas em ℓ sobre $x_1, \dots, x_n$, o sistema estará em equilíbrio se

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i = 0.$$

A soma $\sum_{i=1}^n m_i x_i$ é chamada *momento do sistema* em relação à origem. Seja $m = \sum_{i=1}^n m_i$, definimos

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m} \quad \text{ou} \quad m\bar{x} = \sum_{i=1}^n m_i x_i.$$

Fisicamente $\bar{x}$ é o ponto sobre o qual poderíamos concentrar toda a massa do sistema sem alterar o momento do sistema.

O ponto P com coordenada $\bar{x}$ é chamado *centro de massa* do sistema.

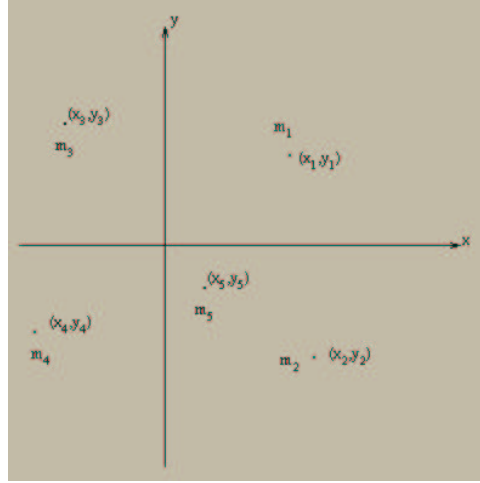
Consideremos agora uma situação um pouco mais geral, qual seja: $m_1, \dots, m_n$ são as massas de partículas pontuais localizadas em pontos $P_1 = (x_1, y_1), \dots, P_n = (x_n, y_n)$ sobre um plano coordenado. Os momentos M_x e M_y do sistema em relação aos eixos x e y , são definidos por

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i.$$

Se $m = \sum_{i=1}^n m_i$ então o centro de massa do sistema é o ponto $P = (\bar{x}, \bar{y})$, dado por:

$$m\bar{x} = M_y \quad \text{e} \quad m\bar{y} = M_x.$$

P é o ponto sobre o qual poderíamos concentrar toda a massa do sistema sem que os momentos do sistema se alterem.



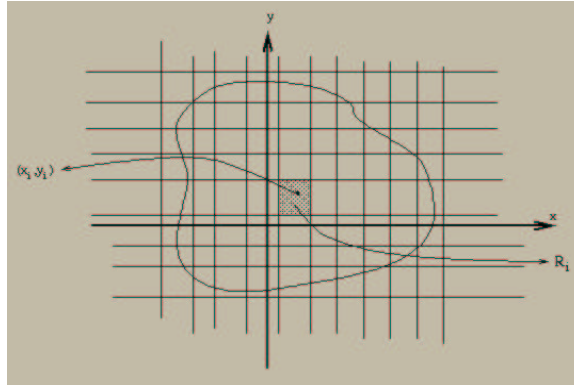
Suponha que a origem $P = O$ do sistema coincida com o centro de massa, então

$$m\bar{x} = m \cdot 0 = M_y = 0$$

$$m\bar{y} = m \cdot 0 = M_x = 0$$

e o sistema está em equilíbrio. Logo o centro de massa é o ponto pelo qual poderíamos pendurar o sistema de modo que ele fique em equilíbrio na horizontal.

Considere agora uma lâmina L com a forma da região D da figura abaixo



Suponha que para cada ponto (x, y) da superfície a densidade seja dada por $\rho(x, y)$, onde ρ é uma função contínua sobre D .

Considere uma rede G cobrindo D . Escolhamos (x_i, y_i) em cada retângulo R_i de G . Se $m(G)$ é pequena, do fato que ρ é contínua, podemos aproximar a massa da lâmina L_i correspondente à R_i por

$$m(L_i) = \rho(x_i, y_i)A(R_i).$$

Ainda

$$\sum_i \rho(x_i, y_i)A(R_i).$$

aproxima a massa da lâmina L . A massa M de L é definida como

$$M = \lim_{m(G) \rightarrow 0} \sum_i \rho(x_i, y_i)A(R_i) = \int_D \rho(x, y) dx dy$$

Em particular se $\rho(x, y) = c$, então

$$M = c \int_D dA = cA(D).$$

A densidade média da lâmina L é

$$\bar{\rho} = \frac{\text{massa}}{\text{área}} = \frac{\int_D \rho(x, y) dA}{\int_D dA}.$$

Se a massa de L_i é suposta concentrada em (x_i, y_i) então o momento de L_i em relação ao eixo x é $y_i \rho(x_i, y_i) A(R_i)$ e o momento de L_i em relação ao eixo y é $x_i \rho(x_i, y_i) A(R_i)$. Os momentos de L em relação ao eixo x , M_x e y e M_y são então definidos por

$$M_x = \lim_{m(G) \rightarrow 0} \sum_i y_i \rho(x_i, y_i) A(R_i) = \int_D y \rho(x, y) dA$$

e

$$M_y = \lim_{m(G) \rightarrow 0} \sum_i x_i \rho(x_i, y_i) A(R_i) = \int_D x \rho(x, y) dA.$$

Ainda, o centro de massa da lâmina L é o ponto $P = (\bar{x}, \bar{y})$ dado por

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

ou seja

$$\bar{x} = \frac{\int_D x \rho(x, y) dA}{\int_D \rho(x, y) dA}, \quad \bar{y} = \frac{\int_D y \rho(x, y) dA}{\int_D \rho(x, y) dA}.$$

No caso particular em que $\rho(x, y)$ é constante temos que

$$\bar{x} = \frac{\int_D x dA}{\int_D dA}, \quad \bar{y} = \frac{\int_D y dA}{\int_D dA}.$$

Neste caso o ponto P é chamado centróide e não depende da densidade, dependendo somente da forma da região D .

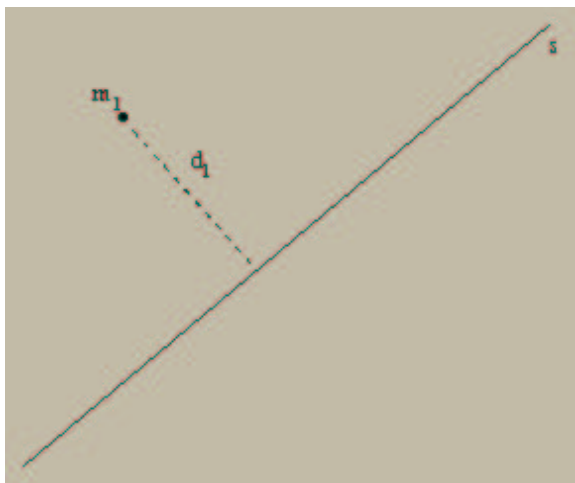
Exemplo 8.3.12 *Seja D a região do plano entre a parábola $y = 6 - x^2$ e $y + 2x - 3$. Calcule $A(D)$ e o centro de massa de uma lâmina com a forma de D e densidade constante.*

8.3.5 Momento de Inércia

O sistema formado por uma partícula de massa m_1 tem *momento de inércia relativo à reta* s dado por

$$I = m_1 d_1^2,$$

onde d_1 é a distância da partícula à reta s .



Se o sistema é constituído de n partículas de massas $m_1, \dots, m_n$ distando $d_1, \dots, d_n$ de uma reta s tem momento de inércia relativo a s dado por

$$I_s = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2.$$

Se as partículas estão localizadas nos pontos $P_1 = (x_1, y_1), \dots, P_n = (x_n, y_n)$ do plano xy então o momento de inércia dos sistema em relação ao eixo x e ao eixo y dados por

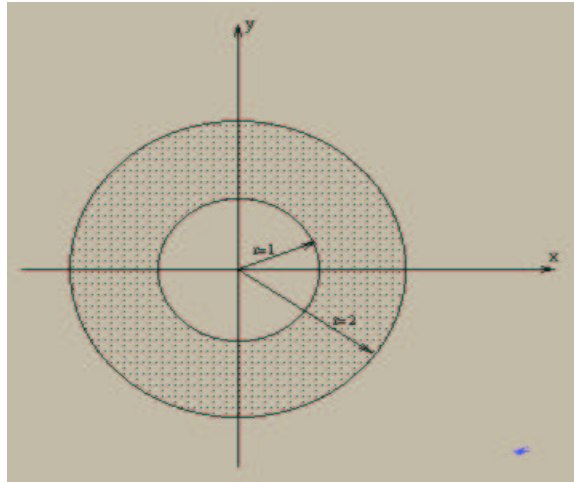
$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2 \quad \text{e} \quad I_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2.$$

Exatamente como no caso do momento, estendemos o conceito de momento de inércia em relação ao eixo x e ao eixo y por

$$I_x = \lim_{m(G) \rightarrow 0} \sum_i y_i^2 \rho(x_i, y_i) A(R_i) = \int_D y^2 \rho(x, y) dA$$

$$I_y = \lim_{m(G) \rightarrow 0} \sum_i x_i^2 \rho(x_i, y_i) A(R_i) = \int_D x^2 \rho(x, y) dA$$

Exemplo 8.3.13 *Seja L uma lâmina com densidade constante ρ com a forma da região anelar $A = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Calcular I_x e I_y .*



Solução: Note que a mudança de coordenadas polares T leva a região $R = \{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta < 2\pi\}$. Segue agora do Teorema 8.3.1 e do Teorema 8.2.2 que

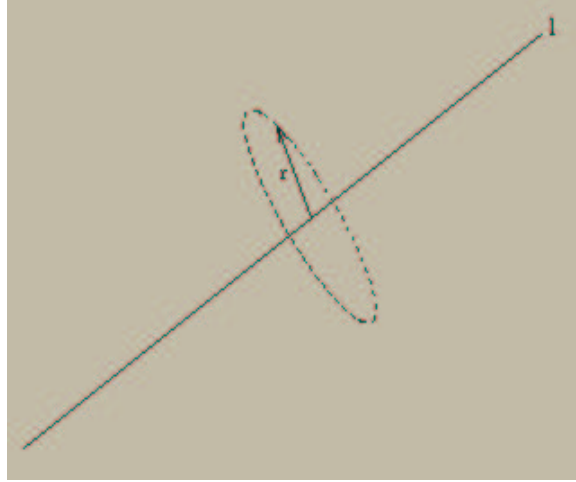
$$I_x = \int_{A=T(R)} \rho x^2 dx dy = \rho \int_R r^3 \sin^2 \theta dr d\theta = \rho \int_1^2 r^3 dr \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= \rho \int_1^2 r^3 \frac{2\theta - \sin 2\theta}{4} dr = \rho \pi \int_1^2 r^3 dr = \rho \pi \frac{r^4}{4} \Big|_1^2 = \frac{15\rho\pi}{4}$$

$$I_y = \int_A \rho y^2 dx dy = \frac{15\rho\pi}{4}.$$

8.3.6 Momento Angular

Suponha que uma partícula pontual de massa m gira ao redor de um eixo ℓ , num círculo de raio r , com velocidade angular ω .



A energia cinética desta partícula é

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2, \quad v = \omega r$$

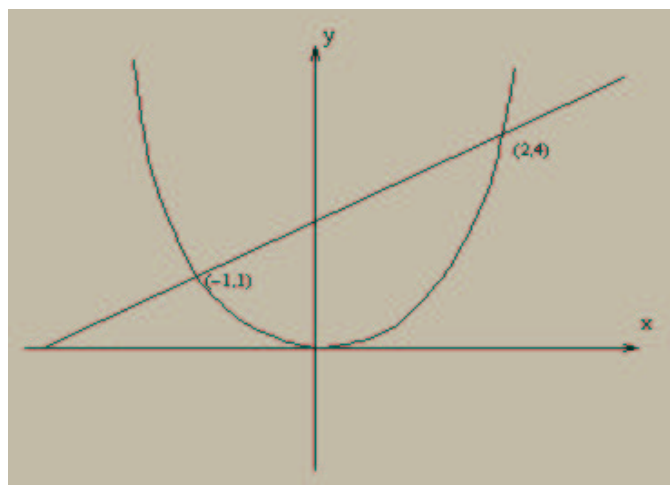
$$E_c = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Suponha agora um sistema de n partículas girando em torno de um eixo ℓ com velocidade angular ω . Se $r_1, \dots, r_n$ são as distâncias de $m_1, \dots, m_n$ a ℓ , então a energia cinética do sistema

$$\begin{aligned} E_c &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n r_i^2 m_i \\ &= \frac{1}{2} I \omega^2 \end{aligned}$$

8.3.7 Miscelânea de Exemplos

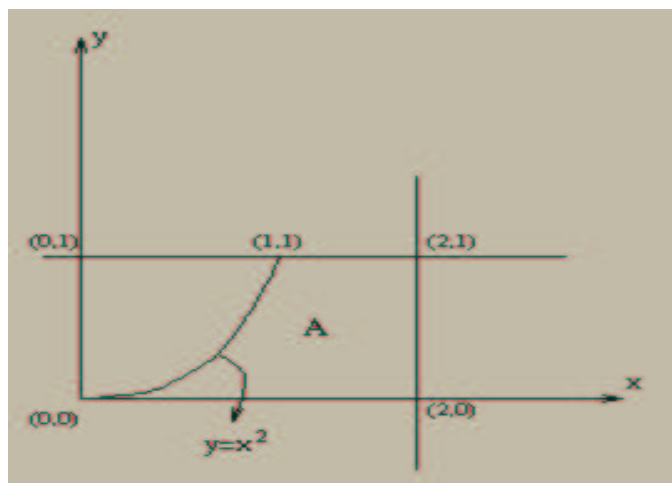
Exemplo 8.3.14 *Uma chapa de densidade δ tem a forma da região do plano xy que está entre a parábola $y = x^2$ e a reta $y = x + 2$. Calcular o momento de inércia da chapa em relação ao eixo y .*



Solução: Primeiramente devemos encontrar os pontos de intersecção da reta e da parábola. Note que nesses pontos devemos ter $y = x^2 = x + 2$ e portanto $(x, y) = (-1, 1)$ ou $(x, y) = (2, 4)$. Segue que

$$I_y = \delta \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} x^2 dy = \frac{63}{20} \delta$$

Exemplo 8.3.15 Determinar o centro de massa de uma placa delgada, de espessura e densidade uniformes, que está sobre a região A do plano xy entre as retas $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$ e a parábola $y = x^2$.



Solução: Cálculo da massa

$$M = \int_A \rho dA = \rho \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^2 dx = \rho \int_0^1 (2 - \sqrt{y}) dy = \frac{4}{3} \rho.$$

Cálculo do momento

$$M_y = \int_A x \rho dA = \rho \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^2 x dx = \rho \int_0^1 \frac{x^2}{2} \Big|_{\sqrt{y}}^2 dy = \rho \int_0^1 (2 - \frac{y}{2}) dy = \frac{7}{4} \rho.$$

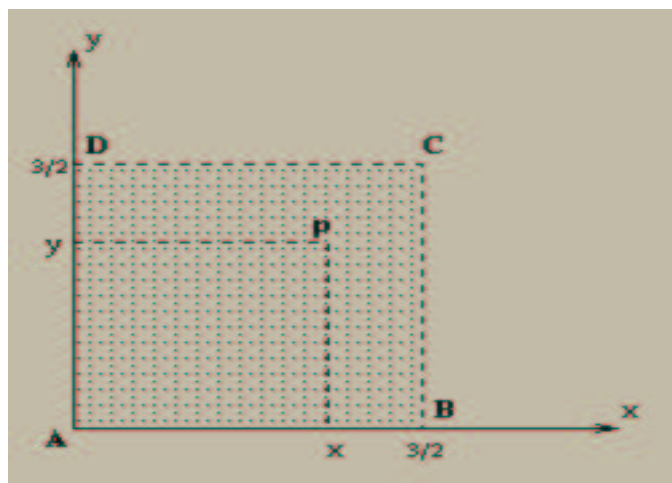
Com isto podemos calcular a coordenada $\bar{x}$ do centro de massa da seguinte forma

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{21}{16}.$$

De forma semelhante obtemos a coordenada $\bar{y}$ do centro de massa

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{9}{20}.$$

Exemplo 8.3.16 Ache o centro de massa de uma lâmina quadrada $ABCD$ de lado $3/2$ sabendo que a densidade de qualquer ponto P é o produto das distâncias de P a AB e a AD .



Solução: Vamos calcular a massa e os momentos relativos aos eixos x e y da lâmina. Note que $\rho(x, y) = xy$, então

$$M = \int_0^{3/2} dx \int_0^{3/2} xy dy = 81/64,$$

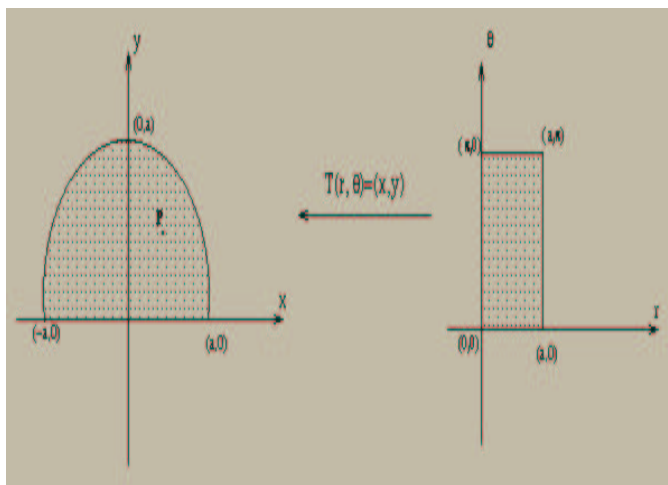
$$M_x = \int_0^{3/2} \int_0^{3/2} xy^2 dy = 81/64$$

e

$$M_y = \int_0^{3/2} \int_0^{3/2} x^2 y dy = 81/64.$$

Segue que as coordenadas do centro de massa da lâmina são $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$.

Exemplo 8.3.17 Ache o centro de massa de uma lâmina semicircular, sendo a densidade de qualquer ponto proporcional à distância de P ao centro do círculo.



Solução: A lâmina ocupa a região $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a, x \geq 0\}$ que em coordenadas polares é $R = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Note que $\rho(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$; ou seja, $\rho(r, \theta) = kr$. Com isto calculamos a massa e os momentos relativos aos eixos coordenados da lâmina,

$$M = \int_{C=T(R)} \rho(x, y) dx dy = \int_R kr^2 dr d\theta = \int_0^\pi d\theta \int_0^a kr^2 dr = \frac{\pi k a^3}{3}$$

$$M_x = \int_{C=T(R)} y \rho(x, y) dx dy = \int_R kr^3 \sin \theta dr d\theta = \int_0^\pi d\theta \int_0^a kr^3 \sin \theta dr = \frac{k a^4}{2}$$

e

$$M_y = \int_{C=T(R)} x \rho(x, y) dx dy = \int_R kr^3 \cos \theta dr d\theta = k \int_0^\pi r^3 \int_0^\pi \cos \theta d\theta = 0.$$

Segue que as coordenadas do centro de massa são $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, \frac{3a}{2\pi})$.

Exercício 8.3.1 Encontre o centro de massa da lâmina que tem a forma da região limitada pelas retas $x = 0$, $y = 0$ e $x + y = a$ e que tem densidade $\rho(x, y) = x^2 + y^2$.

Exercício 8.3.2 Calcular o momento relativo ao eixo x da lâmina que tem o formato da região limitada pelas parábolas $x = y^2$ e $x = 2y - y^2$, sendo a densidade $\rho(x, y) = y + 1$.

8.3.8 Aplicações no Espaço $\mathbb{R}^3$

As idéias vistas até agora nas aplicações podem ser generalizadas para três dimensões.

Massa e Momento Linear

Se um sólido tem o formato de uma região Q do $\mathbb{R}^3$ se a densidade no ponto (x, y, z) é $\rho(x, y, z)$, então de forma análoga ao visto anteriormente

$$M = \int_Q \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Se temos uma partícula pontual de massa m localizada no ponto (x, y, z) do espaço, então seus momentos relativos aos planos xy , xz e yz são definidos como mz , my e mx , respectivamente. Utilizando os mesmos argumentos já vistos definimos os momentos de um sólido em relação aos planos coordenados como sendo:

$$M_{xy} = \int_Q z \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

$$M_{xz} = \int_Q y \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

e

$$M_{yz} = \int_Q x \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

o centro de massa é o ponto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}.$$

Quando a densidade é constante; isto é, $\rho(x, y, z) = c$, então o centro de massa é dito *centróide*.

Momento de Inércia

Se uma partícula de massa m está no ponto (x, y, z) , então seu momento de inércia em relação ao eixo y é $m(x^2 + z^2)$.

Logo somos levados a definir

$$I_x = \int_Q (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

$$I_y = \int_Q (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

e

$$I_z = \int_Q (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Exemplo 8.3.18 Considere o sólido S limitado pelo cone $z^2 = x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 1$ cuja densidade é $\rho(x, y, z) = 1$. Ache o centro de massa e o momento de inércia em relação ao eixo z do sólido S .

Solução: Note que utilizando coordenadas cilíndricas temos:

$$M = \int_S dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_r^1 r \, dz = \frac{\pi}{3}$$

e

$$M_{xy} = \int_S z \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_r^1 z \, r \, dz = \frac{\pi}{4}.$$

Segue que $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{3}{4}$. Por simetria $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Finalmente

$$I_z = \int_S (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_r^1 r^3 \, dz = \frac{\pi}{10}.$$

Capítulo 9

Apêndice

9.1 Substituição e Integração por Partes (Cálculo I)

Dois dos teoremas mais importantes do cálculo diferencial são a regra da cadeia e a regra do produto, que passamos a enunciar:

Teorema 9.1.1 (Regra da Cadeia) *Se I, J são intervalos abertos e $f : J \rightarrow \mathbb{R}$, $g : I \rightarrow J$ funções de classe C^1 temos que*

$$\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = f'(g(x))g'(x), \quad \forall x \in I.$$

Teorema 9.1.2 (Regra do Produto) *Se $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^1 temos que*

$$\frac{d}{dx}(fg)(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

Estes teoremas, juntamente com o Teorema Fundamental do Cálculo, dão origem a dois teoremas fundamentais do cálculo integral. A integração por partes e o método da substituição, são sem dúvida, os resultados mais importantes no que se refere ao cálculo de integrais de funções de uma variável. No que se segue, vamos obter estes teoremas a partir da regra do produto e da regra da cadeia, respectivamente.

Teorema 9.1.3 (Método da Substituição) *Sejam $I = [a, b]$, J intervalos, $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $\phi : I \rightarrow J$ uma função continuamente diferenciável. Então,*

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(s))\phi'(s)ds.$$

Prova: Seja $c \in J$ e $V(x) = \int_c^x f(\theta)d\theta$. Então da regra da cadeia

$$\frac{d}{ds}(V \circ \phi)(s) = f(\phi(s))\phi'(s).$$

O resultado agora segue do Teorema Fundamental do Cálculo. ■

Observação: Note que não é necessário assumir que a função ϕ seja uma mudança de variáveis ($\phi'(s) \neq 0, \forall s \in [a, b]$).

Teorema 9.1.4 *Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções continuamente diferenciáveis. Então*

$$\int_a^b f(s)g'(s)ds = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(s)g(s)ds.$$

Prova: Da regra do produto temos que

$$\frac{d}{ds}(fg)(s) = f'(s)g(s) + f(s)g'(s).$$

Agora, do Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f'(s)g(s)ds + \int_a^b f(s)g'(s)ds$$

e o resultado segue. ■

Capítulo 10

Campos Vetoriais

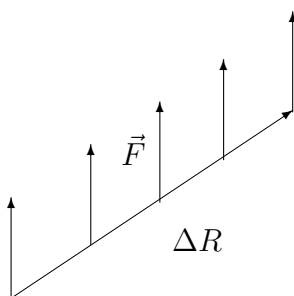
10.1 Introdução

Neste capítulo introduziremos um conceito que é de grande utilidade em vários problemas relacionados a Física e Engenharia.

Para motivarmos a introdução de tal objeto lembremos, da Física elementar, que se deslocarmos uma partícula ao longo de um caminho reto com uma força $\vec{F}$ (constante) o trabalho realizado por essa força é o produto da componente se F na direção e sentido do movimento, pela distância percorrida pela partícula, ou ainda,

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{R}$$

onde $\Delta \vec{R}$ é o vetor que vai da posição inicial da partícula a sua posição final.

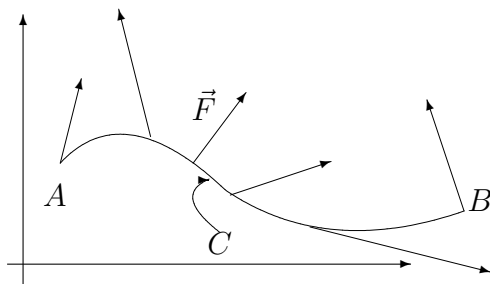


Agora suponha que a força não seja constante, isto é, seja uma função vetorial, que varia de ponto a ponto em uma região do plano, como por exemplo

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}.$$

Suponha que seta força desloque uma partícula ao longo de uma curva suave C do plano, onde C tem equações paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$



Pergunta-se: qual o trabalho realizado por essa força quando a partícula move-se ao longo da curva do ponto inicial $A = (x(t_1), y(t_1))$ até o ponto final $B = (x(t_2), y(t_2))$?

Antes de mais nada, observemos que a função F a valores vetoriais será denominada campo de forças ou campo vetorial. Em geral, um campo vetorial (ou campo de forças) no plano é uma função que associa a cada ponto (x, y) de uma região do plano um vetor. Uma função que cujos valores são números será dita campo escalar.

Todo campo escalar $f = f(x, y)$ determina um correspondente campo vetorial

$$\nabla f(x, y) = \nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$$

denominado campo gradiente. Observemos que alguns campos vetoriais são campos gradientes, mas em geral não são, isto é, existem campos vetoriais $F(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$ tais que não existe $f = f(x, y)$ tal que $\nabla f = F$ (tente encontrar uma tal campo).

Retornemos ao problema inicial de encontrar o trabalho realizado pela força $F(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$ ao longo da curva suave C . Se a curva for um segmento de reta horizontal, isto é, $C = \{(x_0, y_0) + t(x_1, y_0) : 0 \leq t \leq 1\}$ então, do Cálculo 1, sabemos que o trabalho será

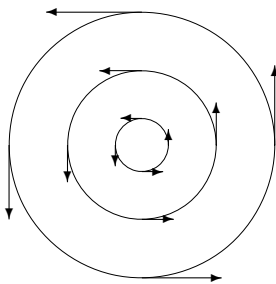
$$W = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_0) dx = \int_C F dR$$

onde dR é vetor elemento deslocamento (no caso acima um escalar, pois o deslocamento só ocorre na direção do eixo dos x 's). Logo somos levados, em geral, a trabalhar com integrais de funções de mais de uma variável ao longo de curvas. Isto na verdade é o objetivo desta seção.

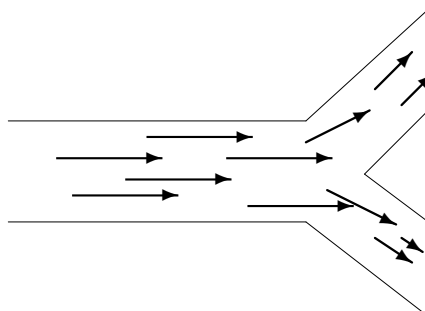
10.2 Exemplos

Começaremos com alguns exemplos de campos vetoriais:

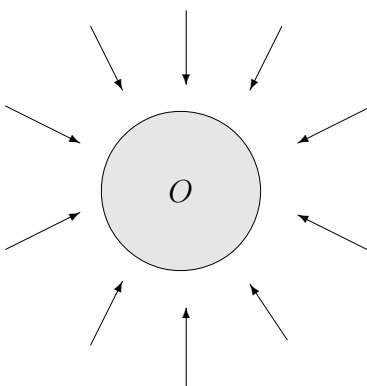
1 Campo de velocidades determinado pela rotação em torno de um ponto fixo.



2 Campo de velocidades determinado pelo movimento de um fluido.



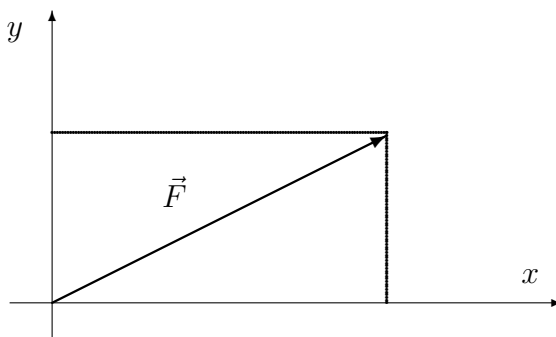
3 Campo gravitacional.



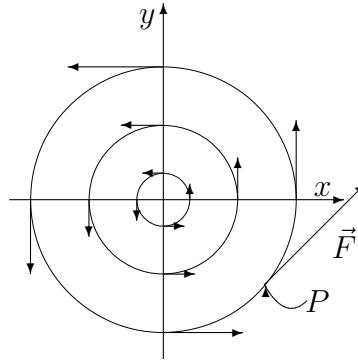
Quando um campo vetorial não depende do tempo diremos que ele é um campo estacionário.

Exemplos:

$$1. F(x, y) = 2x\vec{i} + y\vec{j} = (2x, y)$$



2. O campo vetorial $F(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j} = (-y, x)$ geometricamente é da seguinte forma:



De fato pois, $\langle F(P), \vec{OP} \rangle = \langle -y, x \rangle \cdot \langle x, y \rangle = 0$, logo $F(P) \perp \vec{OP}$.

3. Dado $c < 0$, o campo vetorial

$$T(x, y, z) = \frac{c}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z), \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

é um campo vetorial paralelo a (x, y, z) , com sentido contrário ao de (x, y, z) e

$$\|T(x, y, z)\| = \frac{|c|}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \frac{|c|}{x^2 + y^2 + z^2},$$

isto é, $\|T(x, y, z)\|$ é inversamente proporcional ao quadrado da distância de (x, y, z) a $(0, 0, 0)$.

Estes tipos de campos aparecem em muitas situações, como por exemplo:

Considere uma partícula de massa M na origem. A força de atração gravitacional que age sobre uma partícula de massa unitária colocada em $P = (x, y, z)$ é de módulo igual a

$$\frac{gM}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Logo

$$F(x, y, z) = \frac{gM}{x^2 + y^2 + z^2} \frac{-(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{-gM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z).$$

Um tipo importante de campo vetorial é o campo proveniente de uma função escalar, isto é, o campo gradiente. Se $f = f(x, y, z)$ então o campo gradiente de f é dado por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\vec{i} + f_y(x, y, z)\vec{j} + f_z(x, y, z)\vec{k}.$$

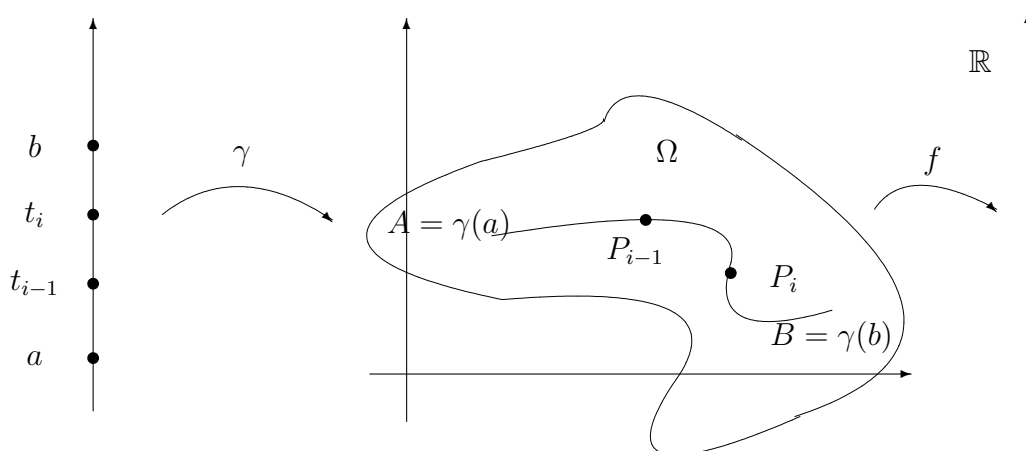
Capítulo 11

Integrais de Linha

11.1 Introdução

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^2$. Consideremos um caminho suave $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2$, isto é, $\gamma'(t)$ é contínuo e $\gamma'(t) \neq 0$, para todo $t \in [a, b]$.

Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ onde $\gamma \subset \Omega$, isto é, $\gamma(t) \in \Omega$, para todo $t \in [a, b]$; neste caso diremos que γ é um caminho suave em Ω .



Sejam $A = \gamma(a)$, $B = \gamma(b)$ e $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ uma partição de $[a, b]$.

Esta partição determina uma partição do arco $\widehat{AB}$ em arcos $\widehat{P_{i-1}P_i}$ onde $P_i = \gamma(t_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Defina $\Delta S_i =$ comprimento do arco $\widehat{P_{i-1}P_i}$ e $\|\Delta\| = \max_{i=1, \dots, n} \Delta S_i$.

Em cada arco $\widehat{P_{i-1}P_i}$ escolhamos um ponto (x_i^*, y_i^*) e consideremos a soma $\sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta S_i$.

Definição 11.1.1 A integral curvilínea de f sobre γ de A até B é definida (e denotada) por :

$$\int_{\gamma} f ds = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta S_i$$

desde que o limite exista independente da escolha do ponto $(x_i^*, y_i^*) \in \widehat{P_{i-1}P_i}$

Observação 11.1.1 A integral acima também é conhecida como integral de linha relativa ao comprimento de arco.

Uma condição suficiente para garantir a existência da integral curvilínea acima é dada no seguinte resultado.

Teorema 11.1.1 Se $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em Ω , então existe $\int_{\gamma} f(x, y) ds$ e

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\alpha(t), \beta(t)) \sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2} dt.$$

A demonstração desde resultado será omitida.

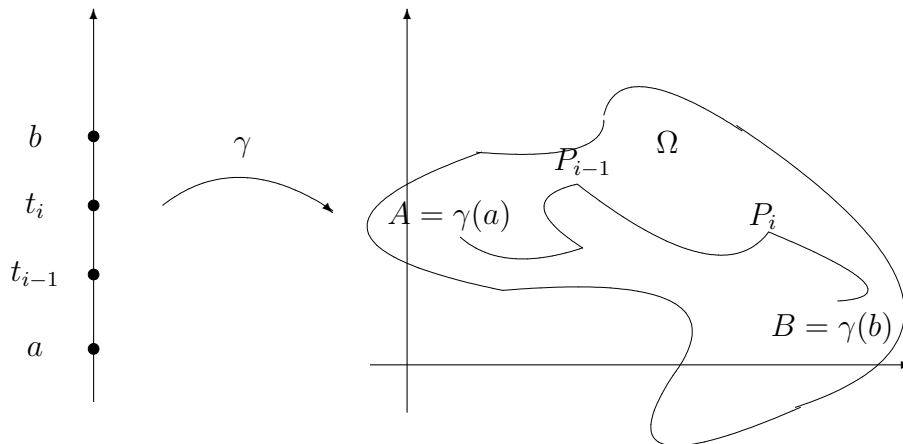
Observemos que definindo-se $\vec{r}(t) = \alpha(t)\vec{i} + \beta(t)\vec{j}$ então $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2}$. Logo, a expressão acima tornar-se-á

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt.$$

No caso particular de $f(x, y) = 1, \forall x \in \Omega$ temos

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt = \text{comprimento de } \gamma.$$

Diremos que $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ contínua é *suave por partes* se existe uma partição de $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, tal que a restrição de γ a cada um dos subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ é um caminho suave.



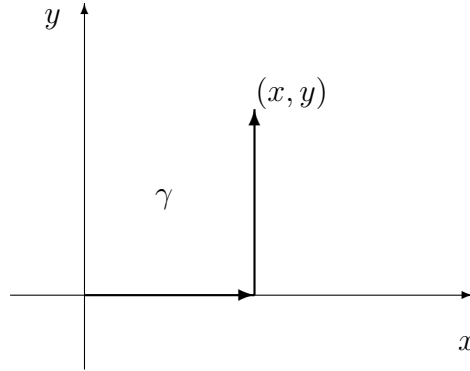
Deste modo podemos definir a integral curvilínea de $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sobre o caminho suave por partes $\gamma \subseteq \Omega$ como sendo a soma das integrais curvilíneas de f às restrições de γ a cada um dos subintervalos onde ela é suave, isto é

$$\int_{\gamma} f ds = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f ds$$

onde γ_i é o caminho obtido da restrição de do caminho γ ao subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

Podemos dar a seguinte interpretação geométrica para a integral curvilínea: suponha que f é contínua e não negativa em $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

A área do retângulo tendo como base P_{i-1} e P_i e altura igual a $f(x_i^*, y_i^*)$ como na figura abaixo é aproximadamente igual a $f(x_i^*, y_i^*)\Delta S_i$. Logo é natural pensarmos que $\int_{\gamma} f ds$ como sendo a área da superfície que tem como base curva γ e altura determinada pelo gráfico da função f .



11.2 Aplicação

Olhemos γ como um fio delgado e $f(x, y)$ como sendo a densidade em (x, y) . Com isto temos que $f(x_i^*, y_i^*)\Delta S_i \simeq$ massa de $P_{i-1}P_i = \Delta m_i$.

Mas $\sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*)\Delta S_i = \sum_{i=1}^n \Delta m_i$ é aproximadamente a massa total do fio. Logo $M = \int_{\gamma} f ds$ nos dá a massa total no fio.

Exemplo 11.2.1 Calcular $\int_{\gamma} f(x, y) ds$ onde $f(x, y) = x^3 + y$ e γ dada por $\gamma(t) = (3t, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.

Neste caso $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t)) = (3t, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$. Assim

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(x, y) ds &= \int_a^b f(\alpha(t), \beta(t)) \sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2} dt = \int_0^1 (27t^3 + t^3) \sqrt{9 + 9t^4} dt \\ &= \int_0^1 84t^3 \sqrt{1 + t^4} dt = \left\{ \begin{array}{l} u = 1 + t^4 \longrightarrow du = 4t^3 dt \\ t = 0 \longrightarrow u = 1 \\ t = 1 \longrightarrow u = 2 \end{array} \right\} = \int_1^2 21\sqrt{u} du = 14(2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Exemplo 11.2.2 Calcular a área da superfície vertical delimitada superiormente pelo gráfico do parabolóide $f(x, y) = x^2 + y^2$ e inferiormente pelo arco do círculo $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0, y \geq 0$.

Se considerarmos $\gamma : [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como sendo a curva suave $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t)) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi/2$ então a área A da superfície descrita acima será dada por

$$A = \int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(\alpha(t), \beta(t)) \sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t + 2 \sin^2(t)) \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = \int_0^{\pi/2} (1 + \sin^2 t) dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[1 + \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))\right] dt = \frac{3\pi}{4} u.a.
\end{aligned}$$

11.3 Integral de linha de um campo vetorial

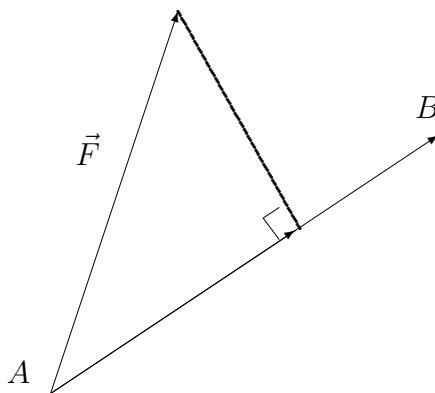
Sejam $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^3$ uma curva suave dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$ e

$$\vec{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z) \vec{i} + F_2(x, y, z) \vec{j} + F_3(x, y, z) \vec{k}$$

um campo contínuo definido em Ω .

Suponhamos que γ seja trajetória de uma partícula sujeita ao campo de forças $\vec{F}$.

Se $\vec{F}$ é constante e γ é um segmento de reta, temos que Trabalho = $\vec{F} \cdot$ vetor deslocamento



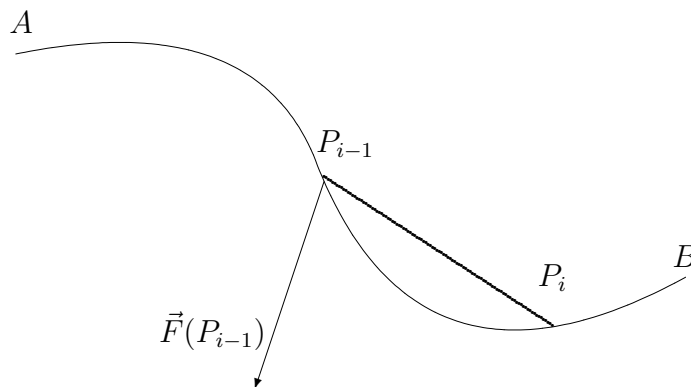
Se $\vec{F}$ não for constante ou γ não for uma reta, particionamos γ num número finito de arcos, isto é, considere uma partição P , de $[a, b]$ $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ e tome $P_i = \gamma(t_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Se $\|P\|$ é pequeno, o trabalho realizado por $\vec{F}$ ao longo do arco $\widehat{P_{i-1}P_i}$, $i = 1, \dots, n$ pode ser aproximado por

$$\Delta w_i = \vec{F}(P_{i-1}) \cdot (P_i - P_{i-1}) = \vec{F}(\gamma(t_{i-1})) \cdot (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})).$$

Mas, $\gamma(t_{i-1}) \cdot (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) = \gamma'(\bar{t}_i) \Delta_i t$, para algum $\bar{t}_i$ entre t_{i-1} e t_i . Desta forma,

$$\Delta w_i = \vec{F}(\gamma(t_{i-1})) \cdot \gamma'(\bar{t}_i) \Delta_i t.$$



O trabalho W realizado por $\vec{F}$ ao longo de γ é, por definição,

$$W = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta w_i = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{F}(\gamma(t_{i-1})) \cdot \gamma'(\bar{t}_i) \Delta_i t.$$

Embora a soma acima não seja uma soma de Riemann, pode ser mostrado que o limite exista e é igual a

$$W = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

que será denotada por

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

e chamada de *integral de linha de $\vec{F}$ sobre γ* .

Note também que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) (x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}) dt \\ &= \int_a^b [F_1(x(t), y(t), z(t))x'(t) + F_2(x(t), y(t), z(t))y'(t) + F_3(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt \\ &= \int_a^b [F_1(\gamma(t))x'(t) + F_2(\gamma(t))y'(t) + F_3(\gamma(t))z'(t)] dt \\ &= \int_a^b [(F_1 \circ \gamma)x' + (F_2 \circ \gamma)y' + (F_3 \circ \gamma)z'] dt \end{aligned}$$

A expressão acima sugere a seguinte notação:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz.$$

Exercício 11.3.1 Calcule

$$\int_{\gamma} 2x dx + dy + dz,$$

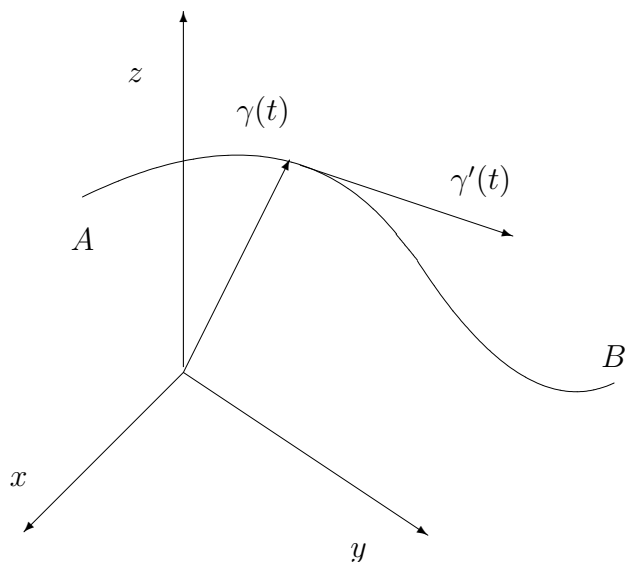
onde γ é a intersecção do cilindro $y = x^2$, do parabolóide $z = 2 - x^2 - y^2$ contida no octante $x, y, z \geq 0$. O caminho deve ser percorrido de $(1, 1, 0)$ a $(0, 0, 2)$.

Resolução: Uma parametrização de γ é

$$\gamma(t) = (t, t^2, 2 - t^2 - t^4), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Temos

$$\int_{\gamma} 2x dx + dy + dz = \int_0^1 [2t + 2t - 2t - 4t^3] dt = \int_0^1 [2t - 4t^3] dt = t^2 - t^4 \Big|_0^1 = -3.$$



Veamos agora uma relação entre a integral de linha de um campo vetorial e a integral de linha com relação ao comprimento de arco.

Dada uma curva suave γ , considere $\vec{T}(P)$ o vetor unitário tangente a γ em P . Lembre que estamos assumindo que $\gamma'(t) \neq 0$.

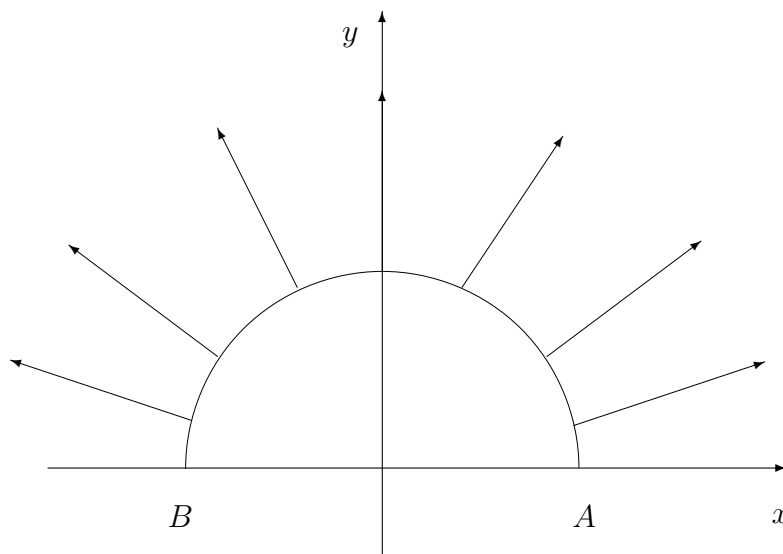
$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
 &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{T}(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt \\
 &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{T}(\gamma(t)) ds = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{T} ds
 \end{aligned}$$

Resumindo,

$$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{T} ds.$$

Note que $\vec{F} \cdot \vec{T}$ é a componente tangencial de $\vec{F}$ com relação à curva.

Exercício 11.3.2 Calcule $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ e $\gamma : t \in [0, \pi] \rightarrow (\cos t, \sin t)$



Resolução: Vale observar que deveremos ter a integral igual a zero.

De fato,

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi} (\cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}) \cdot (-\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j}) dt = \int_0^{\pi} 0 dt = 0.$$

Exercício 11.3.3 Calcular o trabalho realizado por $\vec{F}$ ao longo do caminho γ , onde $\vec{F}(x, y) = (x, y)$ e $\gamma(t) = (t, |t|)$, $t \in [-1, 1]$.

Resolução:

Neste caso temos:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^1 \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{-1}^0 \vec{F}(\gamma(t)) \gamma'(t) dt + \int_0^1 \vec{F}(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_{-1}^0 (t, |t|)(1, -1) dt + \int_0^1 (t, |t|)(1, 1) dt = \int_{-1}^0 2t dt + \int_0^1 2t dt = -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Teorema 11.3.1 Seja $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dado por $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ um caminho suave, $h : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ uma mudança de parâmetros (isto é, h é invertível) e $\lambda = \gamma \circ h$ reparametrização de γ . Então

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ se } h'(\tau) > 0 \text{ ou}$$

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ se } h'(\tau) < 0.$$

Prova Suponhamos que $h'(\tau) < 0$. Neste caso, $h(c) = b$ e $h(d) = a$. Pela regra da cadeia, $\lambda'(\tau) = \gamma'(h(\tau))h'(\tau)$. Fazendo a mudança $t = h(\tau)$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_d^c \vec{F}(\gamma(h(\tau))) \cdot \gamma'(h(\tau)) h'(\tau) d\tau \\ &= - \int_c^d \vec{F}(\gamma(h(\tau))) \cdot \gamma'(h(\tau)) h'(\tau) d\tau = \int_c^d \vec{F}(\lambda(\tau)) \cdot \lambda'(\tau) d\tau = - \int_{\lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r}.\end{aligned}$$

O caso $h'(\tau)$ é semelhante.

Observação 11.3.1 Note que a integral $\int_{\gamma} f ds$ independe do sentido de percurso.

De fato, com a notação do teorema acima, no caso $h'(\tau) < 0$, temos

$$\|\lambda'(\tau)\| = \|\gamma'(h(\tau))\| |h'(\tau)| = -\|\gamma'(\tau)\| h'(\tau)$$

e, daí,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f ds &= \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_d^c f(\gamma(h(\tau))) \|\gamma'(h(\tau))\| h'(\tau) d\tau \\ &= - \int_c^d f(\gamma(h(\tau))) \|\gamma'(h(\tau))\| h'(\tau) d\tau = \int_c^d f(\lambda(\tau)) \|\lambda'(\tau)\| d\tau = \int_{\lambda} f ds.\end{aligned}$$

Exercício 11.3.4 Calcular $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde $\vec{F}(x, y) = (x^2y, x^2y)$ nos seguintes casos:

- (a) γ é o segmento de reta que liga $(0, 0)$ a $(1, 1)$.
- (b) γ é a parábola $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.
- (c) γ é o segmento de reta que liga $(1, 1)$ a $(0, 0)$.

Resolução:

- (a) Uma parametrização da curva é $\gamma(t) = (t, t)$, $0 \leq t \leq 1$.

$$\text{Assim, } \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (t^3, t^3) \cdot (1, 1) dt = \int_0^1 2t^3 dt = \frac{1}{2}.$$

- (b) Uma parametrização da curva é $\gamma(t) = (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$.

$$\text{Assim, } \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (t^4, t^4) \cdot (1, 2t) dt = \int_0^1 (t^4 + 2t^5) dt = \frac{8}{15}.$$

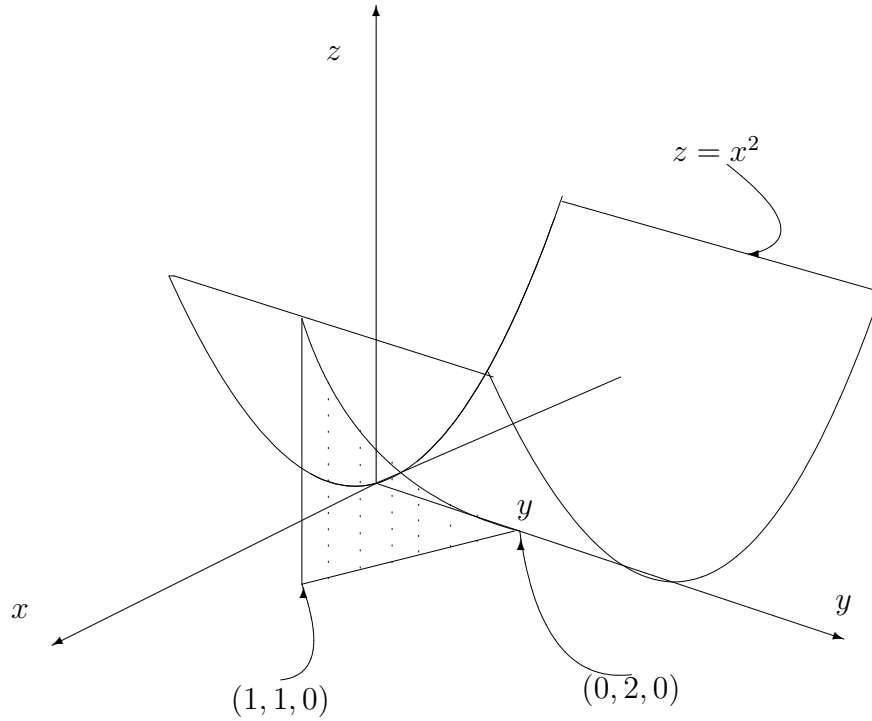
Observe que os valores das integrais ao longo das duas curvas acima que ligam $(0, 0)$ e $(1, 1)$ são diferentes.

- (c) Uma parametrização da curva é $\gamma(t) = (1 - t, 1 - t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 ((1 - t)^3, (1 - t)^3) \cdot (-1, -1) dt = \\ &= \int_0^1 -2(1 - t)^3 dt = \left. \frac{(1 - t)^4}{2} \right|_0^1 = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2) Calcular a área da região $\mathcal{R}$ abaixo.

**Resolução:**

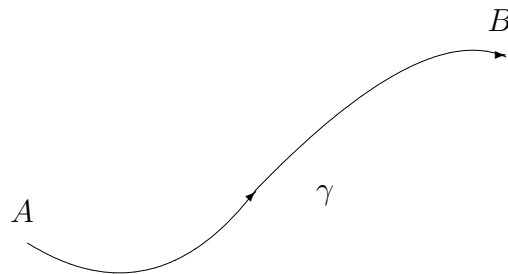
Neste caso temos $z = f(x, y) = x^2$ e $\gamma(t) = (t, 2 - t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Assim, a área da região $\mathcal{R}$ será dada por: $\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_0^1 t^2 \sqrt{2} = \sqrt{2} \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{3} u.a.$

11.4 Campos conservativos e integrais de linha

Proposição 11.4.1 *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 em Ω , $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$, $t \in [a, b]$ uma curva suave por partes tal que $\gamma(a) = A$ e $\gamma(b) = B$. Então, se $\vec{F} = \nabla f$, temos*

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A).$$



Prova: (i) Se γ é suave então

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \nabla f \cdot d\vec{r} = \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Pela regra da cadeia temos

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\gamma(t))\gamma'_2(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t))\gamma'_n(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

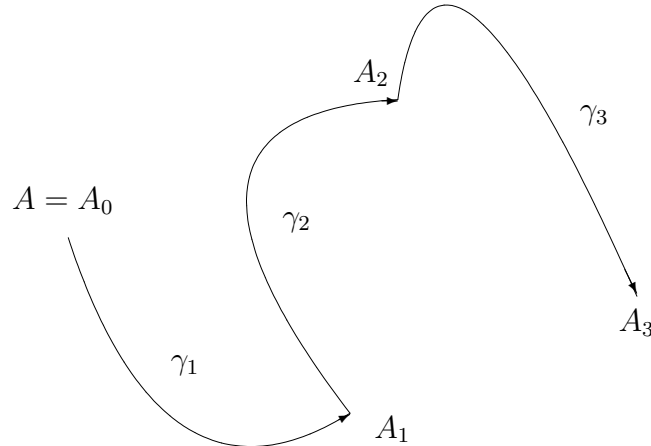
Do Teorema Fundamental do Cálculo segue que:

$$\int_{\gamma} \nabla f \cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{d}{dt}f(\gamma(t)) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(B) - f(A).$$

(ii) Se γ é suave por partes escrevemos $\gamma = \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_m$ onde γ_i é suave, $i = 1, \dots, m$ e liga A_i a A_{i+1} , $i = 1, \dots, m$, com $A_0 = A$ e $A_m = B$.

Usando (i) em cada γ_i , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \nabla f \cdot d\vec{r} &= \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} \nabla f \cdot d\vec{r} \\ &= f(A_1) - f(A_0) + f(A_2) - f(A_1) + \cdots + f(B) - f(A_{m-1}) = f(B) - f(A). \end{aligned}$$



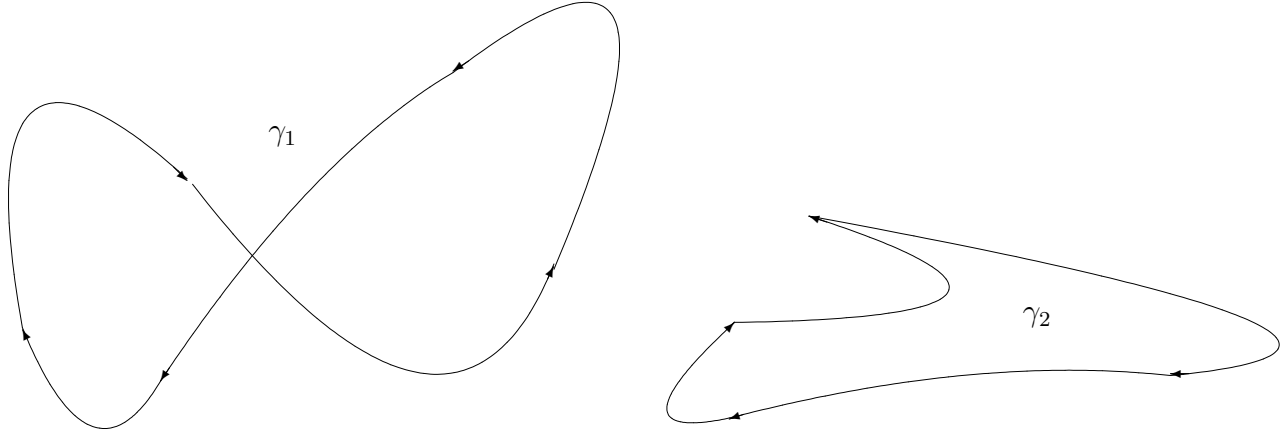
Definição 11.4.1 Se $\vec{F}$ é um campo vetorial contínuo definido em Ω , dizemos que a integral de $\vec{F}$ independe do caminho se para quaisquer curvas suaves por partes $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \Omega$ tais que $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ e $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ tem-se

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Observação 11.4.1 A proposição 11.4.1 afirma que a integral de linha de um campo gradiente independe do caminho, isto é, só depende dos pontos extremos.

Definição 11.4.2 Uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita fechada se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Neste caso a integral sobre γ será indicada por $\oint_{\gamma}$.

Definição 11.4.3 Se $\vec{F}$ é um campo vetorial contínuo definido em Ω , dizemos que a integral de $\vec{F}$ ao longo de qualquer curva fechada é zero se $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para toda curva fechada suave por partes, $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$.



Exemplos de curvas fechadas

Corolário 11.4.1 Se $\vec{F} = \nabla f$ onde $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é suave e $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ é suave por partes e fechada então $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

Prova: Como $\vec{F} = \nabla f$ e $f(B) = f(A)$, segue da proposição 11.4.1 que $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

Proposição 11.4.2 Seja $\vec{F}$ um campo contínuo definido em Ω . A fim de que a integral de $\vec{F}$ ao longo de toda curva fechada seja zero é necessário e suficiente que a integral de $\vec{F}$ seja independente do caminho.

Prova: Suponhamos que a integral de $\vec{F}$ ao longo de qualquer curva fechada seja zero. Sejam $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$ e $\gamma_2 : [a, b] \rightarrow \Omega$ curvas suaves por partes tais que $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ e $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Defina $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t - a), & \text{se } a \leq t \leq \frac{a+b}{2} \\ \gamma_2(a + 2b - 2t), & \text{se } \frac{a+b}{2} \leq t \leq b. \end{cases}$$

Note que γ é fechada e suave por partes. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &\quad + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \vec{F}(\gamma_1(2t - a)) \cdot (2\gamma_1'(2t - a)) dt \\ &\quad + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \vec{F}(\gamma_2(a + 2b - 2t)) \cdot (-2\gamma_2'(2a + b - 2t)) dt. \quad (11.1) \end{aligned}$$

Usando a mudança $u = 2t - a$ temos

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} \vec{F}(\gamma_1(2t - a)) \cdot (2\gamma_1'(2t - a)) dt = \int_a^b \vec{F}(\gamma_1(u)) \cdot \gamma_1'(u) du = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Usando a mudança $v = a + 2b - 2t$ temos

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b \vec{F}(\gamma_2(a + 2b - 2t)) \cdot (-2\gamma_2'(2a + b - 2t)) dt = \int_a^b \vec{F}(\gamma_2(v)) \cdot \gamma_2'(v) dv = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Como γ é fechada, de 11.1 obtemos

$$0 = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

isto é,

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Suponhamos agora que a integral de $\vec{F}$ seja independente do caminho. Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ uma curva fechada suave por partes e defina $\lambda : [a, b] \rightarrow \Omega$ por $\lambda(t) = \gamma(a + b - t)$. Note que como γ é fechada, temos $\gamma(a) = \gamma(b) = \lambda(a) = \lambda(b)$. Como a integral independe do caminho,

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

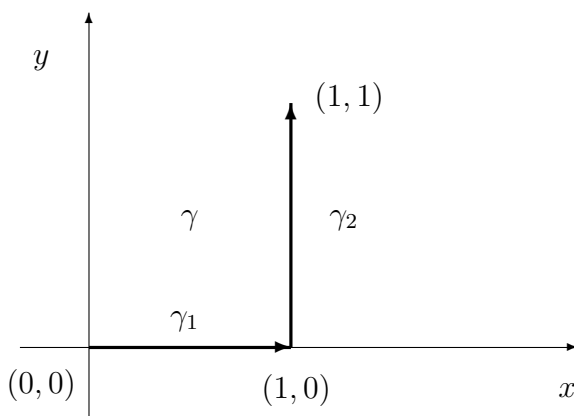
Agora, usando $t = a + b - u$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = - \int_b^a \vec{F}(\gamma(a + b - u)) \cdot \gamma'(a + b - u) du \\ &= \int_b^a \vec{F}(\lambda(u)) \cdot \lambda'(u) du = - \int_a^b \vec{F}(\lambda(u)) \cdot \lambda'(u) du = - \int_{\lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \end{aligned}$$

Portanto, $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

Exemplo 11.4.1 Calcular $\int_{\gamma} x dx + y dy$ em cada um dos itens abaixo:

- (i) γ é o segmento de reta que liga $(0, 0)$ a $(1, 1)$.
- (ii) γ é a parábola $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.
- (iii) γ é a curva indicada abaixo.
- (iv) γ é a circunferência $(\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.



Resolução: Temos que

$$\int_{\gamma} x dx + y dy = \int_{\gamma_1} x dx + y dy + \int_{\gamma_2} x dx + y dy,$$

onde

$$\gamma_1(t) = (t, 0), \quad \gamma_2(t) = (1, t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Assim,

$$\int_{\gamma} x dx + \int_{\gamma} y dy = \int_0^1 (t \cdot 1 + 0 \cdot 0) dt + \int_0^1 (1 \cdot 0 + t \cdot 1) dt = 1.$$

Por outro lado, é fácil verificar que

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

é tal que $\nabla f(x, y) = (x, y)$. Logo

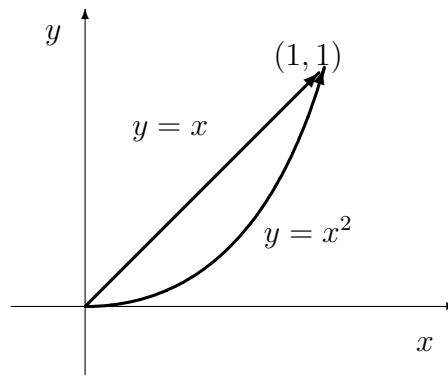
$$\int_{\gamma} x dx + \int_{\gamma} y dy = \int_{\gamma} \nabla f \cdot d\vec{r}.$$

Da proposição 11.4.1 segue que (i), (ii) e (iii) são iguais a $f(1, 1) - f(0, 0) = 1$. Quanto a (iv) o resultado é 0 pois a curva é fechada.

Nem todas as integrais de linha têm esta propriedade, como por exemplo:

$$\int_{\gamma} (xy, xy) \cdot d\vec{r} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \int_{\gamma'} (xy, xy) \cdot d\vec{r} = \frac{13}{20},$$

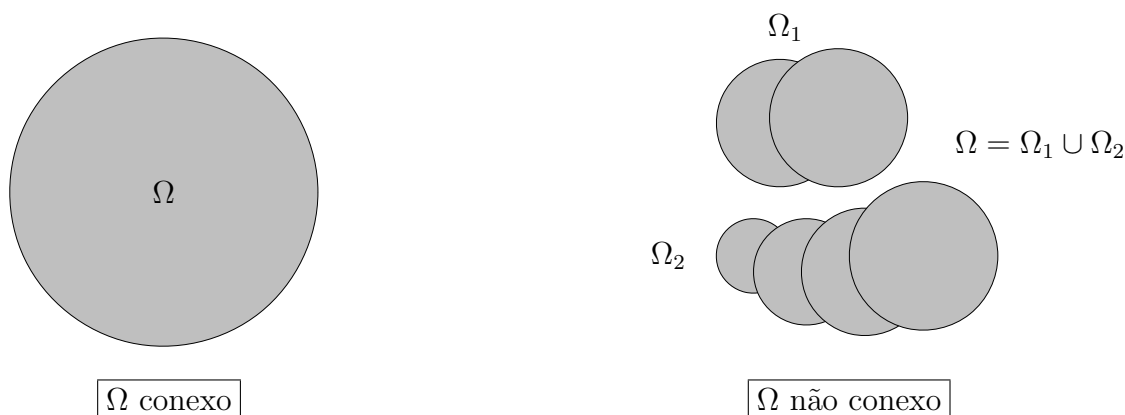
onde γ e γ' são os segmentos de reta e de parábola abaixo, respectivamente.



Definição 11.4.4 Diremos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é conexo (por caminhos) se quaisquer dois pontos de Ω podem ser ligados por um caminho suave, inteiramente contido em Ω . Diremos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma região se for aberto e conexo.

Exemplo 11.4.2 Nos casos abaixo, 1) é uma região (pois é aberto e conexo) e 2) não é região (pois não é conexo).

- 1) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.
- 2) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \text{ ou } x^2 + y^2 > 2\}$.



Teorema 11.4.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ uma região e $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo. Se a integral de $\vec{F}$ independe do caminho, então fixado $A \in \Omega$, a função dada por*

$$f(X) = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

onde γ é uma curva suave por partes cuja imagem está contida em Ω e liga A a $X \in \Omega$, é de classe C^1 e satisfaz $\nabla f = \vec{F}$ em Ω .

Prova: Como a integral independe do caminho, usaremos a notação

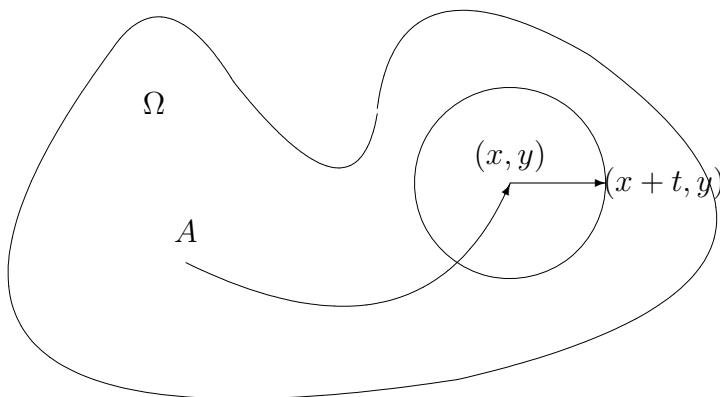
$$f(X) = \int_A^X \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Para simplificar vamos fazer a prova para $n = 2$.

Precisamos mostrar que $\nabla f(x, y) = \vec{F}(x, y)$. Colocando $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j}$, precisamos mostrar que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (F_1(x, y), F_2(x, y)).$$

Escolhemos curva suave por partes ligando A a $X = (x, y)$ contida em Ω (que existe pois Ω é conexo) e a estendemos até o ponto $(x + t, y)$ através de um segmento horizontal (podemos fazer isto pois Ω é aberto).



Assim temos

$$\begin{aligned} f(x+t, y) - f(x, y) &= \int_A^{(x+t, y)} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_A^{(x, y)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(x, y)}^{(x+t, y)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^t \vec{F}(x+\tau, y) \cdot (1, 0) d\tau = \int_0^t F_1(x+\tau, y) d\tau. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t, y) - f(x, y)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t F_1(x+\tau, y) d\tau \\ &= \frac{d}{dt} \left(\int_0^t F_1(x+\tau, y) d\tau \right) \Big|_{t=0} = F_1(x, y), \end{aligned}$$

onde usamos nas identidades acima a definição de derivada de função de uma variável e o Teorema Fundamental do Cálculo.

Analogamente,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = F_2(x, y).$$

Portanto,

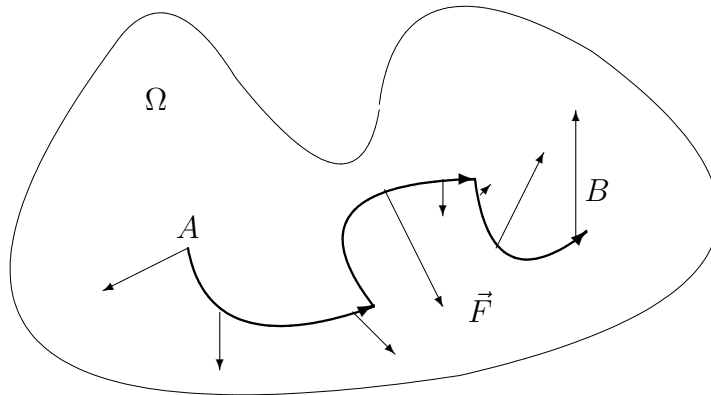
$$\nabla f(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = \vec{F}(x, y).$$

Definição 11.4.5 *Um campo vetorial gradiente também é chamado de campo conservativo. Se $\vec{F} = \nabla f$ a função f é chamada de um potencial de $\vec{F}$.*

Observação 11.4.2 *Segue das proposições 11.4.1, 11.4.2 e do teorema acima que se Ω é uma região e $\vec{F}$ é um campo contínuo definido em Ω , as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\vec{F}$ é conservativo;
2. a integral de $\vec{F}$ independe do caminho;
3. a integral de $\vec{F}$ ao longo de qualquer curva fechada é zero.

A motivação para chamarmos um campo gradiente por conservativo pode ser explicada pelo que segue. Suponhamos que uma partícula de massa m percorra um caminho $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ suave por partes, sob ação da força resultante $\vec{F}$.



Usaremos a aqui a notação $\vec{r}(t) = \gamma(t)$ para descrever a posição da partícula no instante t . Temos

$$W \text{ (trabalho)} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt.$$

Da segunda Lei de Newton temos:

$$\vec{F}(\gamma(t)) = m\vec{r}''(t).$$

Mas

$$\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{r}'(t) = m\vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t) \right] =$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \|\vec{r}'(t)\|^2 \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m v^2(t) \right],$$

onde $v(t) = \|\vec{r}'(t)\|$ é a velocidade escalar da partícula. Portanto,

$$W = \int_a^b \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m v^2(t) \right] dt = \frac{1}{2} m v^2(b) - \frac{1}{2} m v^2(a) = K(b) - K(a),$$

onde

$$K(t) = \frac{1}{2} m v^2(t)$$

é a energia cinética da partícula no instante t . Portanto,

trabalho = variação da energia cinética.

Suponhamos agora que $\vec{F} = \nabla f$, isto é, que $\vec{F}$ seja conservativo. Da proposição 11.4.1 segue que $W = f(B) - f(A)$. Comparando com a fórmula acima temos que: $f(B) - f(A) = K(b) - K(a)$, ou seja, $K(b) - f(B) = K(a) - f(A)$.

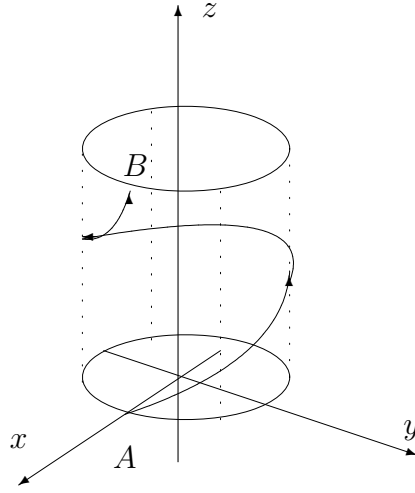
A quantidade $U(P) = -f(P)$ será chamada de energia potencial da partícula na posição P .

Assim,

$$K(a) + U(A) = K(b) + U(B),$$

ou seja, a soma da energia potencial com a energia cinética permanece constante, isto é, se conserva.

Exemplo 11.4.3 Encontrar o trabalho realizado pelo campo $\vec{F}(x, y, z) = \frac{k}{x^2 + y^2 + z^2} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ ao longo da curva $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$.



Resolução: Poderíamos resolver usando a definição, porém usaremos a proposição anterior.

Para isto procuremos $f = f(x, y, z)$ tal que

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{Kx}{x^2 + y^2 + z^2}$
2. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{Ky}{x^2 + y^2 + z^2}$
3. $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{Kz}{x^2 + y^2 + z^2}$

Integrando (1) em relação a x obtemos

$$f(x, y, z) = \int \frac{Kx}{x^2 + y^2 + z^2} dx + \phi(y, z) = \frac{K}{2} \ln(x^2 + y^2 + z^2) + \phi(y, z).$$

Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{Ky}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{\partial \phi}{\partial y}(y, z) \stackrel{(2)}{=} \frac{Ky}{x^2 + y^2 + z^2} \implies \frac{\partial \phi}{\partial y}(y, z) = 0 \implies \phi(y, z) = \phi(z),$$

isto é ϕ não depende de y . Calculando,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{Kz}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{\partial \phi}{\partial z}(z) \stackrel{(3)}{=} \frac{Kz}{x^2 + y^2 + z^2} \implies \frac{\partial \phi}{\partial z}(z) = 0 \implies \phi(z) = C,$$

isto é, ϕ também não depende de x, y, z .

Se tomarmos $\phi = 0$ temos $f(x, y, z) = \frac{K}{2} \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, portanto,

$$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(1, 0, 2\pi) - f(1, 0, 0) = \frac{K}{2} \ln(1 + 4\pi^2).$$

O teorema a seguir fornece uma condição simples que é necessária e suficiente para decidir se um campo é conservativo em um retângulo de $\mathbb{R}^2$.

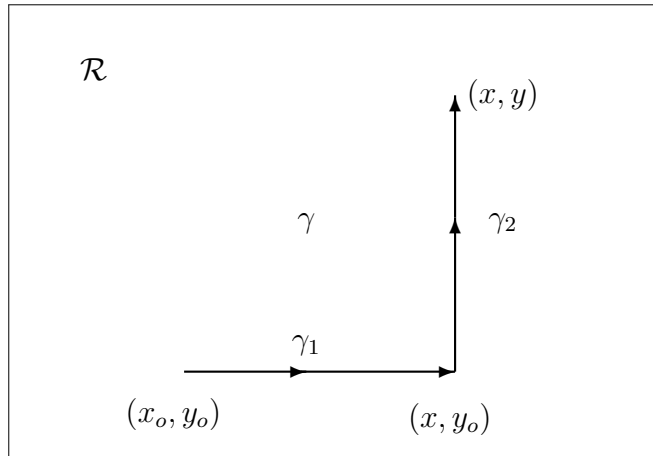
Teorema 11.4.2 *Seja $\vec{F}(x, y) = A(x, y)\vec{i} + B(x, y)\vec{j}$, onde A e B são de classe C^1 num retângulo $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$. Então $\vec{F}$ é conservativo em $\mathcal{R}$ se e somente se*

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \quad \text{em} \quad \mathcal{R}. \quad (11.2)$$

Prova: Se $\nabla f = \vec{F}$ então $A = \frac{\partial f}{\partial x}$ e $B = \frac{\partial f}{\partial y}$. Logo,

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \stackrel{(\text{Teor. Schwarz})}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Reciprocamente, suponhamos que 11.2 seja verificada. Fixemos $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$. Seja f definida em $\mathcal{R}$ por $f(x, y) = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde γ é a curva indicada na figura abaixo.



Consideremos as parametrizações $\gamma_1 : [x_0, x] \rightarrow \mathcal{R}$ dada por $\gamma_1(t) = (t, y_0)$ e $\gamma_2 : [y_0, y] \rightarrow \mathcal{R}$ dada por $\gamma_2(t) = (x, t)$. Com isto, temos:

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x A(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y B(x, t) dt.$$

Como

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \stackrel{(\text{Teo. Fund. Calc.})}{=} B(x, y)$$

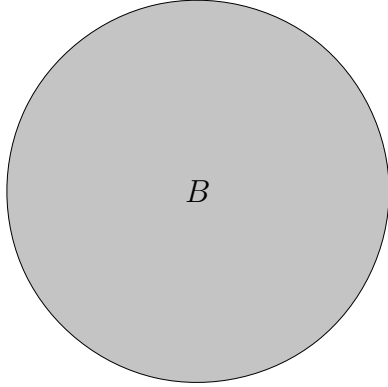
e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \stackrel{(\text{Teo. Fund. + Der. sob Sinal de Int.})}{=} A(x, x_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial B}{\partial x}(x, t) dt$$

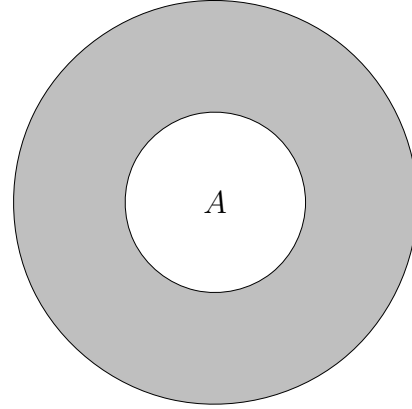
$$\stackrel{(\text{hipótese})}{=} A(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial A}{\partial y}(x, t) dt \stackrel{(\text{Teor. Fund. Calc.})}{=} A(x, y_0) + A(x, y) - A(x, y_0) = A(x, y).$$

Portanto, $\nabla f(x, y) = \vec{F}(x, y)$.

Observação 11.4.3 O teorema acima continua válido se ao invés do retângulo $\mathcal{R}$ considerarmos um domínio Ω simplesmente conexo, isto é, Ω não apresenta “buracos”. Mais, precisamente, um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é simplesmente conexo se toda curva fechada contida em Ω puder ser deformada continuamente dentro de Ω até um ponto.



o disco B é simplesmente conexo



o anel A não é simplesmente conexo

Exercício 11.4.1 Consideremos o campo definido em $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dado por

$$\vec{F}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\vec{j} = A(x, y)\vec{i} + B(x, y)\vec{j}.$$

1. Verifique que $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$;
2. Mostre que $\vec{F}$ não é conservativo em D ;
3. Mostre que $\vec{F}$ é conservativo em qualquer retângulo que não contenha a origem;
4. Encontre uma função potencial para $\vec{F}$ na região $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y = 0\}$.

1. Basta ver que

$$A(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \implies \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

e

$$B(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \implies \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

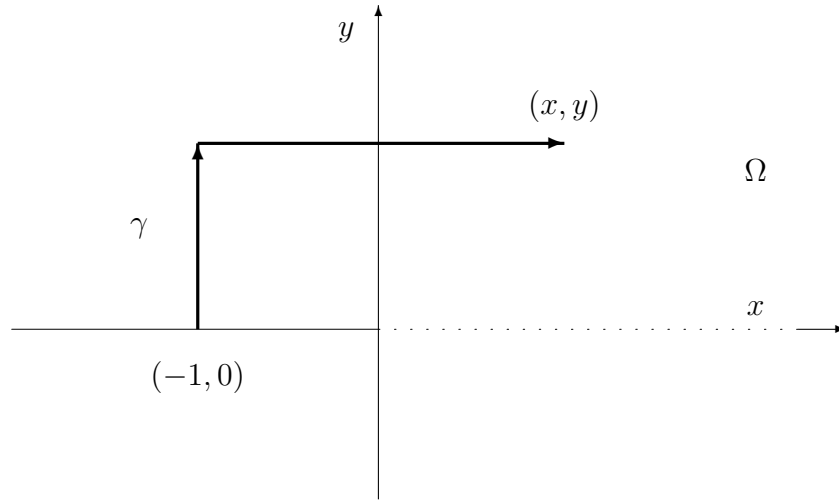
2. Se $\vec{F}$ fosse conservativo em D , a sua integral sobre qualquer curva fechada contida em D seria zero. Porém, isto não ocorre, pois basta tomar $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ e calculando

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

3. Se $\mathcal{R}$ é um retângulo que não contém a origem, então $\mathcal{R} \subset D$. Pelo item 1. deste exercício e pelo teorema 11.4.2 segue-se que $\vec{F}$ é conservativo em $\mathcal{R}$.

4. $\vec{F}$ é conservativo em Ω pois trata-se de um domínio simplesmente conexo (veja a observação 11.4.3) e 11.2 já foi verificada em 1.

Dado $(x, y) \in \Omega$, considere γ a poligonal abaixo que liga $(-1, 0) \in \Omega$ a (x, y) .



Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_{\gamma} A dx + B dy = \int_0^y A(-1, t) dt + \int_{-1}^x B(t, y) dt = \int_0^y -\frac{1}{1+t^2} dt + \int_{-1}^x -\frac{y}{y^2+t^2} dt \\ &= -\arctg y - \int_{-1}^x \frac{y}{y^2+t^2} dt \end{aligned}$$

onde

$$-\int_{-1}^x \frac{y}{y^2+t^2} dt = \begin{cases} 0, & \text{se } y = 0 \text{ e } x < 0 \\ -\arctg \frac{t}{y} \Big|_{-1}^x = -\arctg \frac{x}{y} - \arctg \frac{1}{y}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim,

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y = 0 \text{ e } x < 0 \\ -\arctg y - \arctg \frac{1}{y} - \arctg \frac{x}{y}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}(-\arctg y - \arctg \frac{1}{y}) &= -\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+\frac{1}{y^2}} \left(-\frac{1}{y^2}\right) \\ &= -\frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+y^2} = 0, \quad y \neq 0. \end{aligned}$$

Deste modo a função $-\arctg y - \arctg \frac{1}{y}$ é igual a $-\pi/2$ para todo $y > 0$ (basta tomar $y = 1$) e igual a $\pi/2$ para todo $y < 0$. Por quê?

Assim, uma função potencial de $\vec{F}$ em Ω é dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & \text{se } y > 0 \\ 0, & \text{se } y = 0 \\ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & \text{se } y < 0. \end{cases} \quad e \quad x < 0$$

Note que se $x > 0$ então

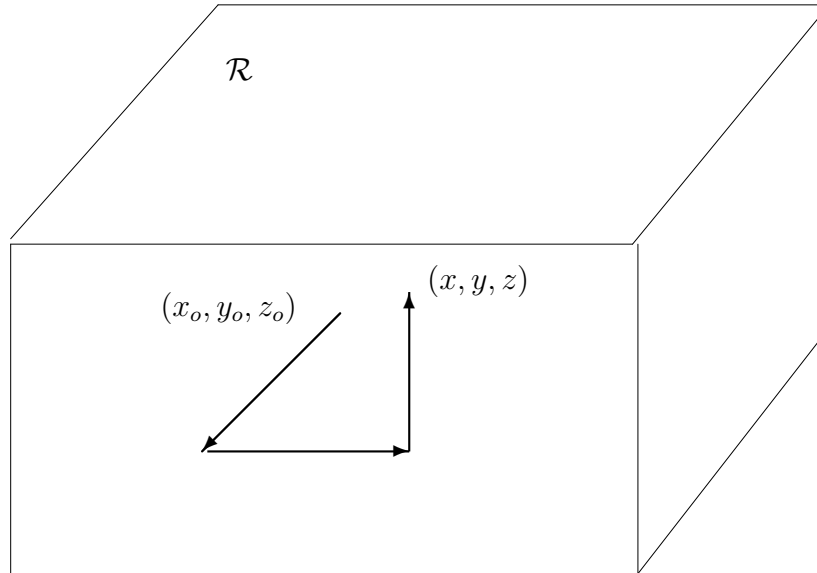
$$\lim_{y \rightarrow 0+} f(x, y) = -\pi \quad e \quad \lim_{y \rightarrow 0-} f(x, y) = \pi.$$

Um resultado análogo ao teorema 11.4.2 também é válido para o $\mathbb{R}^3$. Temos

Teorema 11.4.3 *Seja $\vec{F} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$, onde $A, B, C \in C^1$ em $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$. Então $\vec{F}$ é conservativo em $\mathcal{R}$ se e somente se*

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}, \quad \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial x} \quad e \quad \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial y} \quad em \quad \mathcal{R}.$$

Observação 11.4.4 *A prova é parecida com a do teorema 11.4.2 sendo que a função potencial do campo é obtida integrando $\vec{F}$ sobre uma poligonal (contida em $\mathcal{R}$) como abaixo.*



Observação 11.4.5 *O teorema acima continua válido se ao invés do paralelepípedo $\mathcal{R}$ considerarmos um domínio Ω simplesmente conexo como na observação 11.4.3. Note que no $\mathbb{R}^3$ um domínio simplesmente conexo pode ter “buracos”, como é o caso de uma bola da qual foi retirado o centro. Já uma bola da qual foi retirado um diâmetro não é um domínio simplesmente conexo.*

Exemplo 11.4.4 *Se $\vec{F}(x, y, z) = y^2\vec{i} + (2xy + e^{3z})\vec{j} + 3ye^{3z}\vec{k}$, ache uma função f tal que $\nabla f = \vec{F}$.*

Resolução: Se existir uma tal f devemos ter satisfazer:

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y^2$
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2xy + e^{3z}$
3. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 3ye^{3z}$

Integrando (1) com respeito a x obtemos:

$$f(x, y, z) = xy^2 + \phi(y, z) \quad (4).$$

Assim $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2xy + \phi_y(y, z)$. Comparando (4) com (2) temos $\phi_y(y, z) = e^{3z}$. Portanto, $\phi(y, z) = ye^{3z} + h(z)$. Logo (4) pode ser escrita como $f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + h(z)$.

Derivando esta equação com respeito a z e comparando com (3) obtemos $h'(z) = 0$. Assim, $h(z) = \text{constante} = k$. É fácil ver que $f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + k$ satisfaz $\nabla f = \vec{F}$.

Exercício 11.4.2 Refaça o exercício anterior calculando $f(x, y, z) = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde γ é o segmento dado por $\gamma(t) = (xt, yt, zt)$, $0 \leq t \leq 1$.

Exercício 11.4.3 Consideremos $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi/2$ e $\vec{F}(x, y) = y^2\vec{i} + (2xy - e^y)\vec{j}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calcular $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Resolução: Primeiro modo:

Pela definição

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t, 2 \cos t \sin t - e^{\sin t}) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \dots$$

Segundo modo: Como

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x, y) = 2y = \frac{\partial B}{\partial x}(x, y)$$

em qualquer retângulo então $\vec{F}$ é conservativo.

Procuramos f tal que $\nabla f = \vec{F}$, isto é,

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2$
2. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy - e^y$

Integrando (1) com relação a x obtemos $f(x, y) = xy^2 + \phi(y)$.

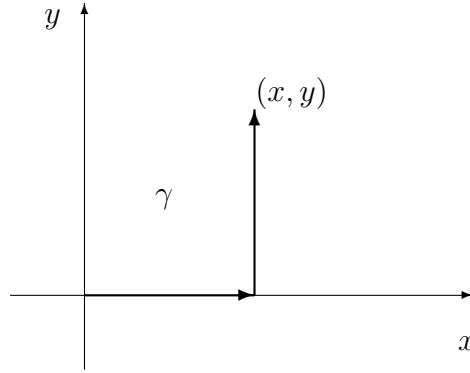
Por outro lado

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy + \phi'(y) \stackrel{(2)}{=} 2xy - e^y,$$

portanto $\phi'(y) = -e^y$ e logo $\phi(y) = -e^y + c$, assim $f(x, y) = xy^2 - e^y + c$. Verifica-se imediatamente que $\nabla f = \vec{F}$.

Calculando, $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(0, 1) - f(1, 0) = 1 - e$.

Observemos que f pode ser obtida como no teorema 11.4.2, isto é, integrando $\vec{F}$ sobre o caminho abaixo.



$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^x A(t, 0) dt + \int_0^y B(x, t) dt = \int_0^x 0 dt + \int_0^y (2xt - e^t) dt \\ &= (xt^2 - e^t)|_{t=0}^{t=y} = xy^2 - e^y + 1. \end{aligned}$$

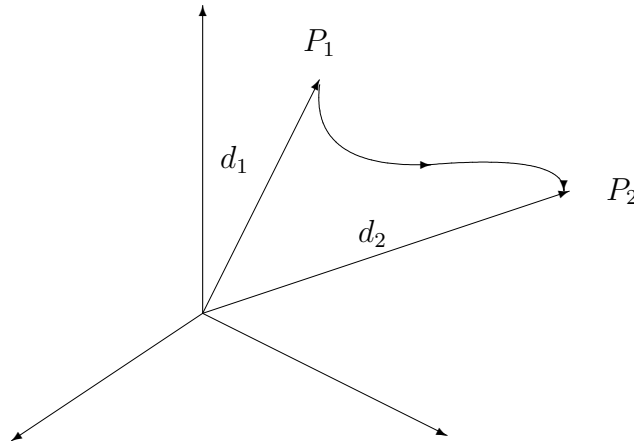
Terceiro modo: Sabemos que $\vec{F}$ é do tipo gradiente em $\mathbb{R}^2$. Logo a integral acima independe da curva que liga os pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Assim, vamos calcular a integral sobre o segmento de reta que liga $(1, 0)$ a $(0, 1)$. Uma parametrização é $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (1-t, t)$, $0 \leq t \leq 1$. Assim

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\tilde{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (t^2, 2t(1-t) - e^t) \cdot (-1, 1) dt \\ &= \int_0^1 (-t^2 + 2t(1-t) - e^t) dt = \dots = 1 - e. \end{aligned}$$

Exercício 11.4.4 Seja $\vec{F}$ um campo dado por $\vec{F}(x, y, z) = \frac{C}{\|\vec{r}(x, y, z)\|^3} \vec{r}(x, y, z)$, onde $\vec{r}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e C é uma constante. Sejam P_1 e P_2 pontos cujas distâncias à origem são d_1 e d_2 , respectivamente.

Expresse o trabalho realizado por $\vec{F}$ ao longo de uma curva suave por partes ligando P_1 e P_2 em termos de d_1 e d_2 .

Resolução



Observemos que $\vec{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$ onde $f(x, y, z) = -\frac{C}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$. Assim,

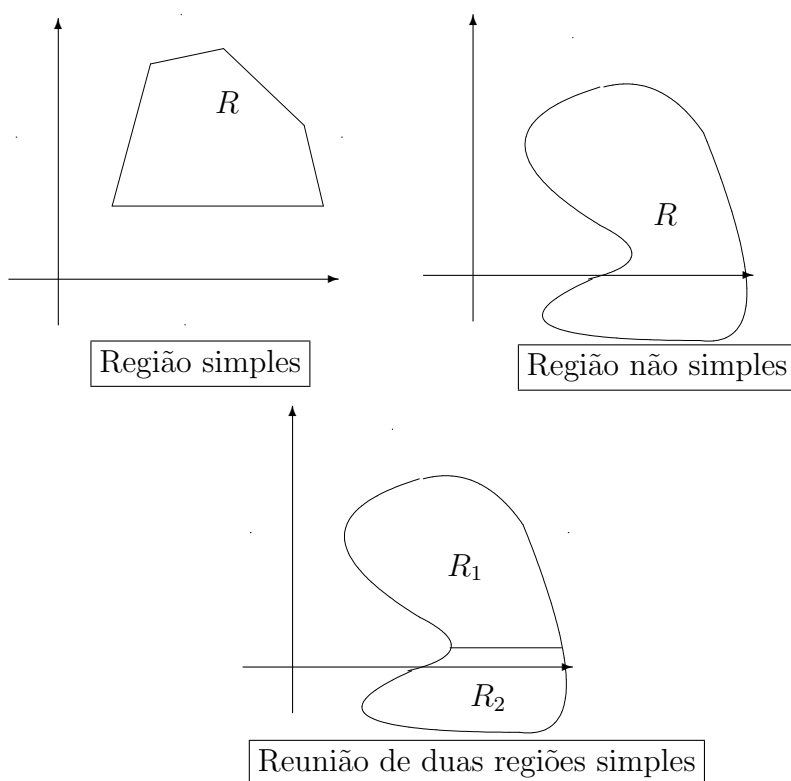
$$W = f(P_2) - f(P_1) = -\frac{C}{d_2} + \frac{C}{d_1} = \frac{C(d_2 - d_1)}{d_1 d_2}.$$

Capítulo 12

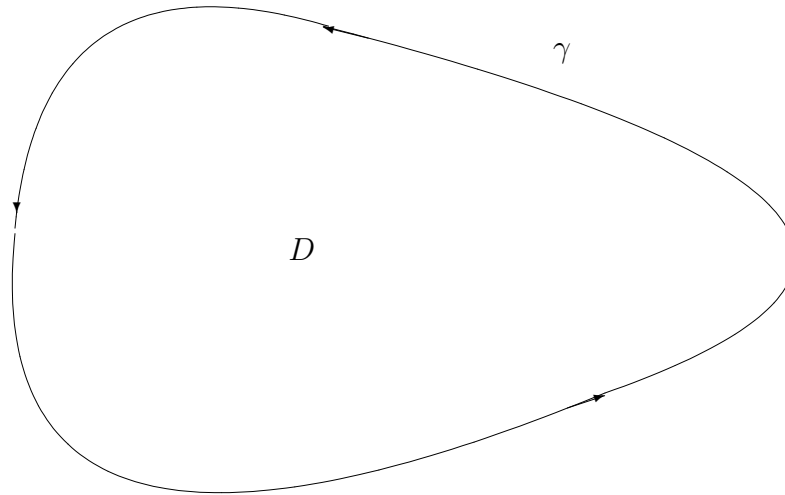
Teorema de Green

12.1 Introdução

Definição 12.1.1 *Uma região $B \subseteq \mathbb{R}^2$ é dita uma região simples se toda reta paralela a um dos eixos coordenados corta a fronteira de B em um segmento ou, no máximo, em dois pontos.*



Teorema 12.1.1 (Green) *Seja D um região plana limitada dada por reunião finita de regiões simples, cada uma com fronteira constituída de uma curva suave por partes. Se A e B são funções de classe C^1 num aberto contendo D e a fronteira de D , denotada por γ , então*



Então

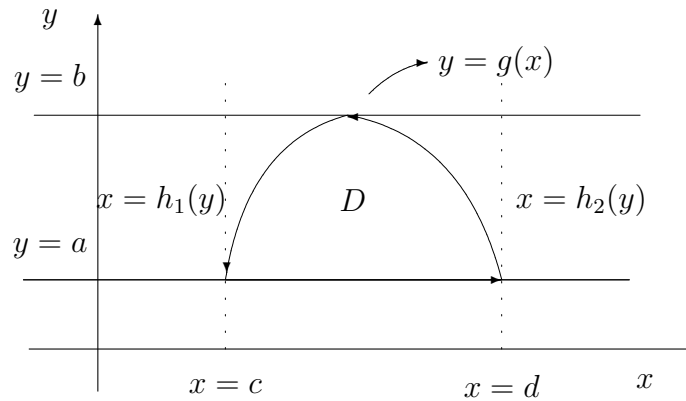
$$\int_{\gamma} A(x, y) dx + B(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) \right) dxdy.$$

onde γ é percorrida deixando D sempre à esquerda (neste caso diremos que γ está orientada positivamente). De modo abreviado escreveremos:

$$\int_{\gamma} A dx + B dy = \iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dxdy.$$

Prova:

1.º caso: Suponhamos que a região D seja simples. Faremos a prova apenas no caso em que a fronteira de D pode ser descrita por um segmento e o gráfico de uma função com um máximo, como na figura abaixo.



Neste caso temos:

$$\iint_D \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) dxdy = \int_a^b \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial B}{\partial x}(x, y) dxdy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b [B(h_2(y), y) - B(h_1(y), y)] dy \\
&= \int_a^b B(h_2(y), y) dy + \int_b^a B(h_1(y), y) dy = \int_{\gamma} B(x, y) dy,
\end{aligned}$$

onde na última igualdade verificamos que a parte da integral em γ sobre o segmento de reta horizontal não contribui com nada na integral.

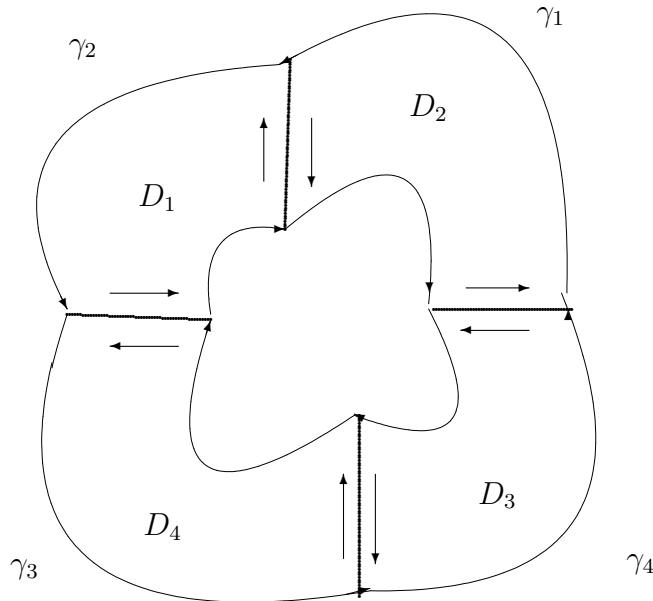
$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) dx dy &= \int_c^d \int_a^{g(x)} \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) dy dx = \int_c^d [A(x, g(x)) - A(x, a)] dx \\
&= - \int_d^c A(x, g(x)) dx - \int_c^d A(x, a) dx = - \int_{\gamma} A(x, y) dx.
\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial A}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \int_{\gamma} A(x, y) dx + \int_{\gamma} B(x, y) dy.$$

2.º caso: D é uma reunião finita de regiões simples.

Dividamos a região D em sub-regiões, D_i , $i = 1, \dots, n$, onde cada uma destas são simples (ver figura abaixo). Denotemos por γ_i , $i = 1, \dots, n$ a fronteira de D_i orientada como na figura abaixo.



Podem existir partes das curvas γ_i que não fazem parte de γ e que serão percorridas duas vezes, uma vez em cada sentido.

Aplicando o 1.º caso em cada uma dessas sub-regiões obtemos:

$$\int_{\gamma_i} A dx + B dy = \iint_{D_i} \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy, \quad i = 1, \dots, n.$$

Somando-se de $i = 1$ a n obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} A dx + B dy &= \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} A dx + B dy \\ &= \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Observação 12.1.1 *No caso de dimensão 1, o teorema de Green pode ser visto como o Teorema Fundamental do Cálculo, pois estamos relacionando o valor da integral de uma função em um intervalo fechado, sabendo o valor da de sua derivada na fronteira, que no caso é formada por dois pontos.*

12.2 Aplicação

Área de uma região plana

Tomando-se $A(x, y) = 0$ e $B(x, y) = x$ temos pelo teorema de Green que a área da região D será dada por

$$A(D) = \iint_D dx dy = \int_{\gamma} x dy,$$

onde γ é percorrida no sentido positivo.

De outro modo, tomando-se $A(x, y) = -y$ e $B(x, y) = 0$ temos que

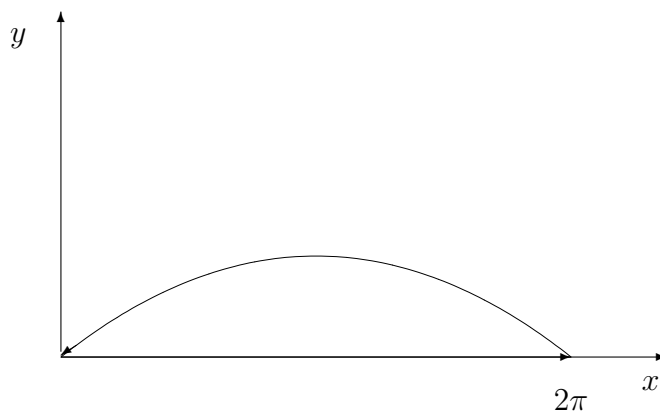
$$A(D) = \iint_D dx dy = - \int_{\gamma} y dx.$$

Ou ainda, somando-se as duas igualdades acima, temos que

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} x dy - y dx.$$

Exercício 12.2.1 *Calcule a área da região delimitada pela cicloide dada por $\gamma_1(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$ e $\gamma_2 = (t, 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.*

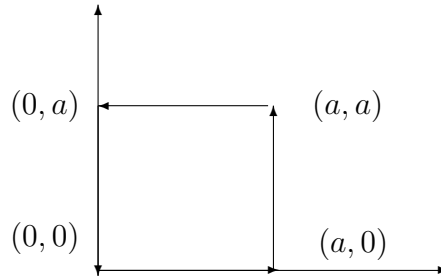
Resolução:



Note que, percorrendo a fronteira da região acima no sentido horário (negativo), temos

$$\begin{aligned} A &= - \oint_{\gamma} x dy = - \left[\int_{\gamma_1} x dy - \int_{\gamma_2} x dy \right] = - \int_{\gamma_1} x dy = - \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin t dt \\ &= \int_0^{2\pi} [t \sin t - \sin^2 t] dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt - \int_0^{2\pi} t \sin t dt = \pi - [-t \cos t]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t dt = 3\pi. \end{aligned}$$

Exercício 12.2.2 Use o Teorema de Green para calcular $\oint_{\gamma} (1+10xy+y^2) dx + (6xy+5x^2) dy$, onde γ é o quadrado de vértices $(0,0), (a,0), (0,a), (a,a), a > 0$.



Resolução: Observemos que neste caso $A(x,y) = 1 + 10xy + y^2$, $B(x,y) = 6xy + 5x^2$ e D a região delimitada pelo quadrado satisfazem as condições do Teorema de Green, onde a fronteira de D , γ , está orientada no sentido positivo. Aplicando-o obtemos:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} (1 + 10xy + y^2) dx + (6xy + 5x^2) dy &= \iint_D \left[\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right] dx dy = \\ \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (6xy + 5x^2) - \frac{\partial}{\partial y} (1 + 10xy + y^2) \right] dx dy &= \iint_D [(6y + 10x) - (10x + 2y)] dx dy \\ &= \iint_D 4y dx dy = \int_0^a \int_0^a 4y dx dy = 2a^3. \end{aligned}$$

Exercício 12.2.3 Calcular a área limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Resolução: Vimos acima que a área, A , da região pode ser dada por: $A = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} x dy - y dx$, onde γ é a elipse percorrida no sentido positivo (isto é, anti-horário). Uma parametrização de γ pode ser dada por $t \in [0, 2\pi] \rightarrow (a \cos(t), b \sin(t))$. Assim,

$$A = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t b \cos t + b \sin t a \sin t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab.$$

Exercício 12.2.4 Seja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $A(x,y) = A(r)$, $B(x,y) = B(r)$ funções de classe C^1 que dependem somente da distância à origem. Mostre que

$$\iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

Resolução: Neste caso temos que $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ é a circunferência de centro na origem e raio 1.

Podemos aplicar o Teorema de Green para obter:

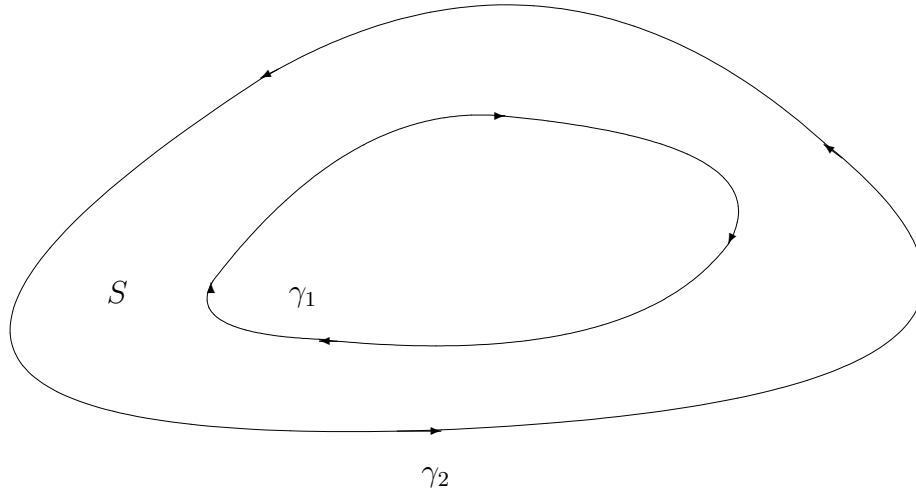
$$\iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\gamma} A(1) dx + B(1) dy$$

(observe que A e B são constantes sobre a circunferência γ).

Por outro lado se considerarmos $\bar{A}(x, y) = A(1)$ e $\bar{B}(x, y) = B(1)$, $(x, y) \in D$ (isto é, $\bar{A}$ e $\bar{B}$ são constantes em D) e aplicando o Teorema de Green a estas duas funções obteremos:

$$\int_{\gamma} A(1) dx + B(1) dy = \iint_D \left(\frac{\partial \bar{B}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{A}}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

Exercício 12.2.5 Consideremos $\vec{F}(x, y) = A(x, y)\vec{i} + B(x, y)\vec{j}$, onde $A, B \in C^1$ com $\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}$ na região S dada abaixo. Prove que $\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.



Resolução:

Pelo Teorema de Green temos que:

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

pois, por hipótese,

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}$$

em S . Portanto

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Exercício 12.2.6 Consideremos $\vec{F}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\vec{j}$, para $(x, y) \neq (0, 0)$ e $\gamma : t \in [0, 2\pi] \rightarrow (2 \cos t, 3 \sin t)$. Calcular $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Resolução:

Diretamente temos que:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-3 \sin t}{4 \cos^2 t + 9 \sin^2 t}, \frac{2 \cos t}{4 \cos^2 t + 9 \sin^2 t} \right) \cdot (-2 \sin t, 3 \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{6 \sin^2 t + 6 \cos^2 t}{4 \cos^2 t + 9 \sin^2 t} \right) dt = \int_0^{2\pi} \frac{6}{4 \cos^2 t + 9 \sin^2 t} dt \end{aligned}$$

que é uma integral razoavelmente difícil de calcularmos.

Observemos também que não podemos aplicar o Teorema de Green a região determinada por γ pois as funções não satisfazem as condições do teorema (a origem $(0, 0)$ é um ponto onde as funções coordenadas de $\vec{F}$ não são nem contínuas).

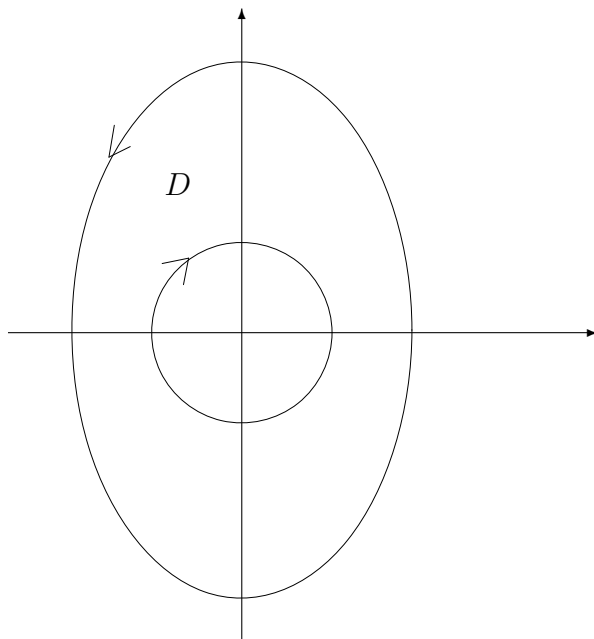
Para contornar este problema, observemos primeiramente que se

$$A(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad B(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

então

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}$$

na região D abaixo que é externa ao disco unitário e interna à elipse.



Podemos aplicar o exemplo anterior, que nos diz que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t} \right) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Capítulo 13

Integrais de Superfície

13.1 Superfícies

Definição 13.1.1 *Uma superfície parametrizada é uma transformação $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 .*

Observação 13.1.1 *A imagem de uma superfície parametrizada, $S = \sigma(A)$, é chamada de superfície. Neste caso, diz-se que transformação acima é uma parametrização da superfície.*

Observação 13.1.2 *Geralmente usaremos a notação*

$$\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in A.$$

Exemplo 13.1.1 *A esfera de raio R centrada na origem,*

$$S = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

é uma superfície.

Note que, a transformação proveniente das coordenadas esféricas, dada por

$$\sigma(\varphi, \theta) = (R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \varphi), \quad \theta, \varphi \in \mathbb{R},$$

é uma parametrização de S .

Exemplo 13.1.2 *Se $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 então o seu gráfico,*

$$G = \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in A\},$$

é uma superfície.

Basta notar que

$$\sigma(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad (u, v) \in A$$

é uma parametrização de G .

Exemplo 13.1.3 O cilindro C dado por $x^2 + y^2 = R^2$ é uma superfície parametrizada por $\sigma(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v)$, onde $u, v \in \mathbb{R}$.

Note que se S é uma superfície e σ uma parametrização sua, então os vetores

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)$$

são tangentes a S no ponto $\sigma(u, v)$. Para verificar este fato, basta notar que, fixado v , a função $u \mapsto \sigma(u, v)$ representa uma curva sobre S que passa por $\sigma(u, v)$ e tem vetor tangente dado por $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v)$. De maneira análoga se verifica que $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)$ tem propriedade semelhante.

Se $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)$ são linearmente independentes então o produto vetorial

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v)$$

é diferente de zero e normal a S em $\sigma(u, v)$.

Convém lembrarmos que se colocarmos

$$\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

então o produto vetorial entre $\frac{\partial \sigma}{\partial u}$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}$ é dado pelo determinante simbólico

$$\vec{N}(u, v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \vec{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \vec{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \vec{k},$$

onde

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

e assim por diante.

Definição 13.1.2 Dizemos que uma superfície parametrizada $\sigma : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ é regular se $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)$ são linearmente independentes para todo $(u, v) \in A$.

Exemplo 13.1.4 Com relação ao gráfico de f (veja exemplo 13.1.2) obtemos

$$\vec{N} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial u} \vec{i} - \frac{\partial f}{\partial v} \vec{j} + \vec{k}.$$

Note que neste caso temos $\vec{N} \neq \vec{0}$ e

$$\|\vec{N}\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}.$$

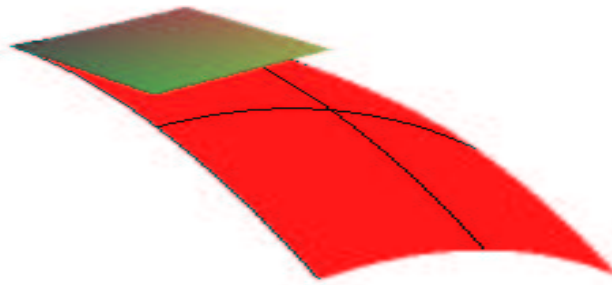
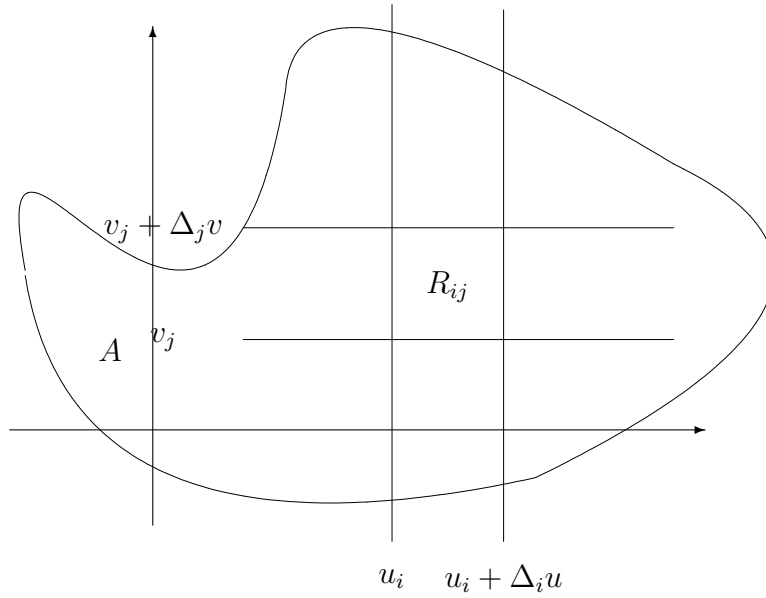
13.2 Integral de Superfície

Seja S uma superfície parametrizada por $\sigma : A \rightarrow \mathbb{R}^3$. Suponha que sobre S esteja definida uma função contínua f . Lembre que $S \subset \mathbb{R}^3$ e, portanto, f é uma função de três variáveis. Queremos definir de um modo razoável a integral de f sobre S .

Tomemos um retângulo R_{ij} sobre a região A de lados $\Delta_i u$ e $\Delta_j v$ e com um vértice (u_i, v_j) , como mostra a figura. Seja $P_o = \sigma(u_i, v_j)$. A imagem $\sigma(R)$ deste retângulo sobre S pela parametrização σ tem área aproximadamente igual à área do paralelogramo contido no plano tangente a S que passa por P_o cujos lados são *congruentes* aos vetores $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_i, v_j)\Delta_i u$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_i, v_j)\Delta_j v$.

Assim área de $\sigma(R_{ij})$ é aproximadamente

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_i, v_j)\Delta_i u \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_i, v_j)\Delta_j v \right\| = \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_i, v_j) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| \Delta_i u \Delta_j v = \|\vec{N}(u, v)\| \Delta_i u \Delta_j v.$$



Desta forma, se escolhermos $(u'_i, v'_j) \in R_{ij}$ podemos formar a soma de Riemann

$$\sum_{i,j} f(\sigma(u'_i, v'_j)) \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_i, v_j) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| \Delta_i u \Delta_j v$$

a qual converge a

$$\iint_A f(\sigma(u, v)) \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_i, v_j) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| du dv,$$

desde que f contínua e limitada em $S = \sigma(A)$ e a fronteira de A seja uma reunião finita de conjuntos suaves.

Definição 13.2.1 *Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto cuja fronteira é uma reunião finita de conjuntos suaves. Seja S uma superfície dada pela parametrização $\sigma : A \rightarrow \mathbb{R}^3$. Se f é uma função contínua e limitada em S definimos a integral de superfície de f em S por*

$$\iint_S f dS = \iint_A f(\sigma(u, v)) \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_i, v_j) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| du dv.$$

Observação 13.2.1 *Se $f = 1$ em S então*

$$\iint_S dS = \text{área de } S.$$

Observação 13.2.2 *Se f representa algum tipo de densidade superficial de S de alguma grandeza escalar (p. ex., densidade de massa ou de carga) então*

$$\iint_S f dS$$

representa a quantidade total desta grandeza sobre sobre S .

Observação 13.2.3 *Se S é o gráfico de uma função $g : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 (veja exemplo 13.1.2) então*

$$\iint_S f dS = \iint_A f(u, v, g(u, v)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \right)^2} du dv.$$

13.3 Exemplos

Exemplo 13.3.1 *Encontre a área de uma esfera de raio R .*

Resolução:

Sabemos que

$$\sigma(\varphi, \theta) = (R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \varphi), \quad (\varphi, \theta) \in A = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

é uma para parametrização de S . Temos

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = (-R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, 0)$$

e

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = (R \cos \theta \cos \varphi, R \sin \theta \cos \varphi, -R \sin \varphi)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R \sin \theta \sin \varphi & R \cos \theta \sin \varphi & 0 \\ R \cos \theta \cos \varphi & R \sin \theta \cos \varphi & -R \sin \varphi \end{pmatrix} \\ &= -R^2 \cos \theta \sin^2 \varphi \vec{i} - R^2 \sin \theta \sin^2 \varphi \vec{j} - R^2 \sin \varphi \cos \varphi \vec{k} \\ \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) \right\|^2 &= R^4 (\cos^2 \theta \sin^4 \varphi + \sin^2 \theta \sin^4 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) \\ &= R^4 (\sin^4 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) = R^4 \sin^2 \varphi (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = R^4 \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) \right\| = R^2 \sin \varphi$$

e

$$A(S) = \iint_S dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta = 2\pi R^2 (-\cos \varphi)|_0^\pi = 4\pi R^2.$$

Exemplo 13.3.2 Mostre que a parametrização da esfera centrada na origem e de raio u , $\sigma : R = [0, 2\pi] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por

$$\sigma(u, v) = (\sqrt{1-v^2} \cos u, \sqrt{1-v^2} \sin u, v)$$

preserva áreas, isto é, se $K \subset R$ é um conjunto cuja fronteira é uma reunião finita de conjuntos suaves então a área de K é igual à área de $\sigma(K)$.

Resolução: Lembre-se que a parametrização acima já foi estudada no capítulo de transformações.

Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sqrt{1-v^2} \sin u & \sqrt{1-v^2} \cos u & 0 \\ -\frac{v \cos u}{\sqrt{1-v^2}} & -\frac{v \sin u}{\sqrt{1-v^2}} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{1-v^2} \cos u \vec{i} + \sqrt{1-v^2} \sin u \vec{j} + v \vec{k} \end{aligned}$$

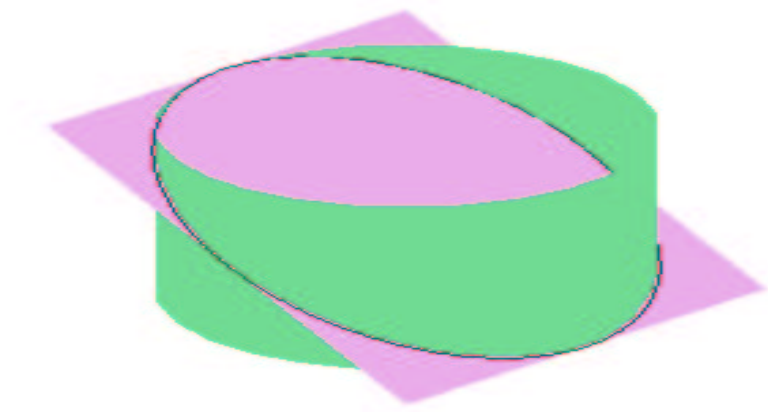
$$\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\|^2 = (1-v^2) \cos^2 u + (1-v^2) \sin^2 u + v^2 = 1.$$

Assim,

$$A(\sigma(K)) = \iint_{\sigma(K)} dS = \iint_K \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\| du dv = \iint_K du dv = A(K).$$

Exemplo 13.3.3 Encontre a área da região do plano $z = -y + 1$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Resolução:

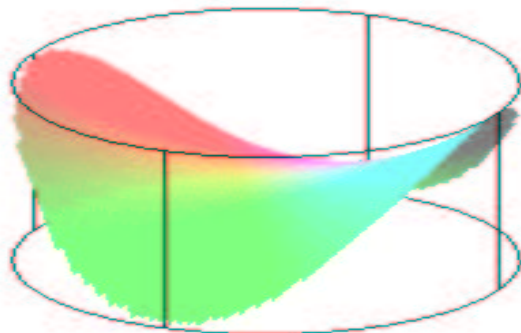


Neste caso $z = f(x, y) = -y + 1$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Observemos que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -1$, logo a área da região S será:

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_A \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} \, dx \, dy \\ &= \iint_A \sqrt{1 + 1} \, dx \, dy = \sqrt{2} \iint_A dx \, dy = \sqrt{2}\pi, \end{aligned}$$

já que a última integral dupla nos dá a área do círculo de raio 1.

Exemplo 13.3.4 Calcular a área do parabolóide hiperbólico $z = xy$ que fica dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

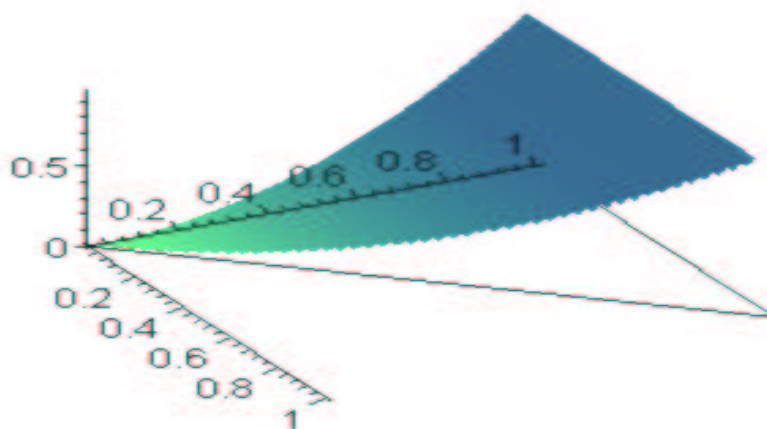


Resolução: Temos $f(x, y) = xy$ e $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. E daí, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x$,

Usando coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_A \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy = \iint_A \sqrt{y^2 + x^2 + 1} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} r dr d\theta = \{ \text{faça } u = r^2 + 1 \dots \} = \frac{2\pi}{3} [2\sqrt{2} - 1]. \end{aligned}$$

Exemplo 13.3.5 Encontrar a área da parte do cilindro $z = y^2$ que fica sobre o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$.



Resolução: Neste caso temos que $z = f(x, y) = y^2$ e $A =$ triângulo com vértices nos pontos acima,. Logo, sabemos que a área, $A(S)$, da superfície será dada por:

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_A \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy \stackrel{(*)}{=} \int_0^1 \int_0^y \sqrt{4y^2 + 1} dx dy \\ &= \int_0^1 \sqrt{4y^2 + 1} y dy = \{ \text{faça } u = 4y^2 + 1 \dots \} = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

(*) Vale observar que se a integral acima for calculada na outra ordem ela ficará bem difícil.

Exemplo 13.3.6 Calcular a massa de uma lâmina que tem a forma do cone $z^2 = x^2 + y^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = 4$, se a densidade superficial é proporcional à distância ao eixo dos z .

Resolução:

A função densidade é $\rho : S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$ e onde

$$S = \{(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}); (x, y) \in A\} \quad \text{e} \quad (x, y) \in A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Observemos que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Assim, a massa de S é dada por

$$\begin{aligned} M(S) &= \iint_S \rho \, dS = k = \iint_A \rho(x, y, \sqrt{x^2+y^2}) \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} \, dxdy \\ &= k\sqrt{2} \iint_A \sqrt{x^2+y^2} \, dxdy = k\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^4 r^2 \, drd\theta = 42k\pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Capítulo 14

Fluxo

14.1 Definição e Exemplos

Considere uma superfície parametrizada regular dada por $\sigma : A \rightarrow \mathbb{R}^3$. Definimos os versores

$$\vec{n}_1(u, v) = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\|} \quad \text{e} \quad \vec{n}_2(u, v) = -\vec{n}_1(u, v).$$

Como já vimos, $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são normais a $S = \sigma(A)$ em $\sigma(u, v)$. Se $\vec{F}$ é um campo vetorial contínuo, definido sobre S e $\vec{n}$ é igual a $\vec{n}_1$ ou $\vec{n}_2$, definimos o fluxo (normal) de $\vec{F}$ através de S na direção $\vec{n}$ por

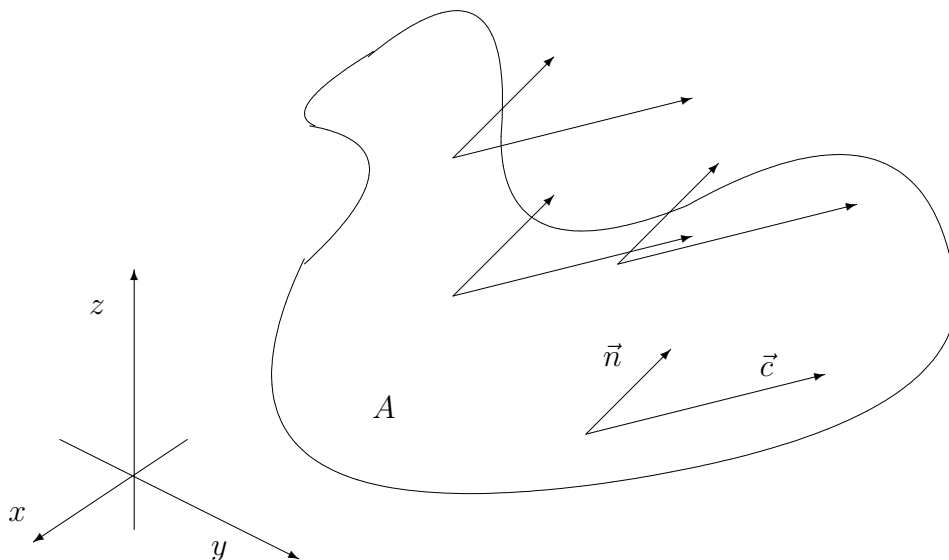
$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS.$$

Note que se $\vec{n} = \vec{n}_1$ então

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_1 = \iint_A \vec{F}(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\|} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\| \, dudv \\ &= \iint_A \vec{F}(\sigma(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right) \, dudv \end{aligned}$$

e se a escolha fosse $\vec{n} = \vec{n}_2$, teríamos $\Phi = -\Phi_1$.

Exemplo 14.1.1 *Considere um fluido que escoa com velocidade constante igual a $\vec{c}$. Encontre o fluxo deste campo através de uma placa plana de área A com relação à normal $\vec{n}$ da placa que faz com $\vec{c}$ um ângulo de no máximo 90° .*



Temos

$$\Phi = \iint_S \vec{c} \cdot \vec{n} dS = \vec{c} \cdot \vec{n} \iint_S dS = A \vec{c} \cdot \vec{n}.$$

Observe que se $\vec{c}$ é medida em metros por segundo e a área de S em metros quadrados, vemos que a dimensão de Φ é metros cúbicos por segundo. Ou seja, Φ mede a vazão, isto é, o volume de líquido que atravessa S por unidade de tempo. Observe ainda que $\vec{c} \cdot \vec{n}$ é zero se $\vec{c}$ e $\vec{n}$ são ortogonais e, neste caso, a posição da placa é paralela ao campo. No outro extremo, Φ é máximo quando a placa está posicionada perpendicularmente ao campo e, neste caso, $\Phi = \|\vec{c}\|A$.

Sejam $\sigma_j : A_j \rightarrow \mathbb{R}^3$ $j = 1, \dots, m$ são superfícies parametrizadas regulares. Suponha que A_j seja um compacto cuja fronteira é uma reunião finita de conjuntos suaves e que $\sigma_i(\text{int} A_i) \cap \sigma_j(\text{int} A_j) = \emptyset$, onde $\text{int} A$ representa o interior do conjunto A . Coloque $S_j = \sigma_j(A_j)$ e $S = S_1 \cup \dots \cup S_m$. Se $\vec{n}_j$ é uma escolha de vetores normais a S_j , e $\vec{F}$ é um campo contínuo definido sobre S , definimos o fluxo de $\vec{F}$ através de S (de acordo com as normais escolhidas) por

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 dS + \dots + \iint_{S_m} \vec{F} \cdot \vec{n}_m dS$$

Observação 14.1.1 Note que se S é uma superfície fechada $\vec{F}$ representa velocidade de um fluido que escoa através de S , o sinal do fluxo de $\vec{F}$ através da normal exterior de S nos diz se há mais fluido saindo de S , no caso de sinal positivo, ou entrando na região limitada delimitada por S , no caso de sinal negativo. Quando o fluxo é zero, há uma igualdade entre a quantidade de fluido que entra e entre a que sai.

Exemplo 14.1.2 Calcule o fluxo de $\vec{f}(x, y, z) = xyz\vec{i} + 4yz^2\vec{j} - yz\vec{k}$ para fora do cubo S cujas faces estão contidas na união dos planos coordenados e dos planos $x = 1$, $y = 1$ e $z = 1$.

Resolução:

Face	$\vec{n}$	$\vec{F} \cdot \vec{n}$	Fluxo
$z = 1$	$\vec{k}$	$-yz$	$\iint_A -y \, dx \, dy = -\frac{1}{2}$
$z = 0$	$-\vec{k}$	yz	$\iint_A 0 \, dx \, dy = 0$
$x = 1$	$\vec{i}$	xy	$\iint_A y \, dy \, dz = \frac{1}{2}$
$x = 0$	$-\vec{i}$	$-xy$	$\iint_A 0 \, dy \, dz = 0$
$y = 1$	$\vec{j}$	$4yz^2$	$\iint_A 4z^2 \, dx \, dy = \frac{4}{3}$
$y = 0$	$-\vec{j}$	$-4yz^2$	$\iint_A 0 \, dx \, dy = 0$

Portanto,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{4}{3}.$$

Exemplo 14.1.3 Encontre o fluxo através da normal exterior da esfera $S = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ do campo elétrico

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

gerado por uma carga.

Resolução: Um modo de resolver este exercício é usando a parametrização do exemplo 13.3.1 e resolver

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_A \vec{E}(\sigma(\varphi, \theta)) \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\varphi, \theta) \right) d\varphi d\theta.$$

No entanto, resolveremos da seguinte maneira: o versor normal no ponto $(x, y, z) \in S$ apontando para fora é

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

e, portanto,

$$\vec{E} \cdot \vec{n} = \frac{q}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{q}{R^2}.$$

Dai,

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{q}{R^2} \iint_S dS = \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi q.$$

Capítulo 15

Os Teoremas de Gauss e Stokes

15.1 O Divergente e o Rotacional

Consideremos um campo de vetores

Definição 15.1.1 *Seja $\vec{F} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ um campo vetorial de classe C^1 em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. O divergente de $\vec{F}$ em $P \in \Omega$ é definido por*

$$\operatorname{div} \vec{F}(P) = \frac{\partial A_1}{\partial x}(P) + \frac{\partial A_2}{\partial y}(P) + \frac{\partial A_3}{\partial z}(P), .$$

Exemplo 15.1.1 *Se $\vec{F}(x, y, z) = x^2\vec{i} - xy\vec{j} + xy\vec{k}$ então $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = x + xy$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.*

Exemplo 15.1.2 *Se $\vec{F}(x, y, z) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ então $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = 0$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.*

Exemplo 15.1.3 *Se $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ então $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = 3$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.*

Definição 15.1.2 *Dado um campo vetorial $\vec{F} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ de classe C^1 em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$., definimos o rotacional de $\vec{F}$ em $P \in \Omega$ como sendo*

$$\operatorname{rot} \vec{F}(P) = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y}(P) - \frac{\partial A_2}{\partial z}(P) \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z}(P) - \frac{\partial A_3}{\partial x}(P) \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x}(P) - \frac{\partial A_1}{\partial y}(P) \right) \vec{k}.$$

Observemos que $\operatorname{rot} \vec{F}$ pode ser calculado, simbolicamente, através do seguinte determinante:

$$\operatorname{rot} \vec{F}(P) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}.$$

No caso bidimensional,

$$\vec{F}(x, y) = A_1(x, y)\vec{i} + A_2(x, y)\vec{j}$$

então

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x, y) = \left(\frac{\partial A_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial A_1}{\partial y}(x, y) \right) \vec{k}.$$

Exemplo 15.1.4 Se $\vec{F}(x, y, z) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ então

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F}(P) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial (-y)}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial (-y)}{\partial y} \right) \vec{k} = 2\vec{k}. \end{aligned}$$

Observemos que o campo é uma rotação.

Exemplo 15.1.5 Seja $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Então

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F}(P) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) \vec{k} = 0. \end{aligned}$$

Note que o campo acima não é uma rotação.

Exercício 15.1.1 Considere $\Phi(x, y, z) = x + y + z$ e $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calcular:

a) $\nabla(\phi)$ b) $\operatorname{div} \vec{F}$ c) $\operatorname{rot} \vec{F}$ d) $\operatorname{div}(\phi \vec{F})$ e) $\operatorname{rot}(\phi \vec{F})$.

Exercício 15.1.2 Prove que $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$, onde $\vec{F} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

Exercício 15.1.3 Prove que $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$ se f é de classe C^2 .

O seguinte teorema é uma consequência é uma reformulação em termos do rotacional teorema 12.4.3 (capítulo de Integrais de Linha), juntamente com a equivalência entre independência de caminho e integral zero sobre todas as curvas fechadas.

Teorema 15.1.1 Seja $\vec{F} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ com derivadas parciais contínuas em $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$. As seguintes afirmações são equivalentes

1. $\vec{F}$ é conservativo em $\mathcal{R}$;
2. $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$ em $\mathcal{R}$;
3. a integral de $\vec{F}$ independe do caminho;
4. a integral de $\vec{F}$ ao longo de qualquer curva fechada é zero.

Observação 15.1.1 Vale um teorema análogo ao anterior para retângulos em $\mathbb{R}^2$.

15.2 O Teorema de Gauss

Suponhamos que A , B , Γ e D sejam como no enunciado do teorema de Green. Suponha que a parametrização de Γ seja tal que $\Gamma'(t) \neq 0$. Então temos

$$\int_{\Gamma} -Bdx + A dy = \iint_D \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) dx dy.$$

Se colocarmos $\vec{F} = -B(x, y)\vec{i} + A(x, y)\vec{j}$ e $\vec{v}(x, y) = A(x, y)\vec{i} + B(x, y)\vec{j}$ a equação anterior tornar-se-á

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \operatorname{div} \vec{v} dx dy.$$

Lembre que

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint \vec{F} \cdot \vec{T} ds,$$

onde $\vec{T}$ é o vetor tangente unitário a Γ , que deixa a região D à sua esquerda.

Observemos que $\vec{F} \cdot \vec{T} = \vec{v} \cdot \vec{n}$. De fato, se denotarmos $\vec{n} = (a, b)$ o vetor normal unitário apontando para fora da região D , teremos $\vec{T} = (-b, a)$, pois $\vec{T}$ deixa D à sua esquerda ($\vec{T}$ é uma rotação de 90° de $\vec{n}$ no sentido anti-horário. Agora, como $\vec{F} = (-B, A)$ e $\vec{v} = (A, B)$ segue-se que

$$\vec{F} \cdot \vec{T} = (-B, A) \cdot (-b, a) = (Bb + Aa) = \vec{v} \cdot \vec{n}.$$

Com isto obtemos

$$\oint \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \iint_D \operatorname{div} \vec{v} dx dy.$$

Vejamos como a fórmula acima se aplica também no $\mathbb{R}^3$.

Seja B um compacto de $\mathbb{R}^3$ cuja fronteira S possa ser descrita da seguinte maneira:

Sejam $\sigma_j : A_j \rightarrow \mathbb{R}^3$ $j = 1, \dots, m$ são superfícies parametrizadas regulares. Suponha que A_j seja um compacto cuja fronteira é uma reunião finita de conjuntos suaves e que $\sigma_i(\operatorname{int} A_i) \cap \sigma_j(\operatorname{int} A_j) = \emptyset$, onde $\operatorname{int} A$ representa o interior do conjunto A . Coloque $S_j = \sigma_j(A_j)$ então $S = S_1 \cup \dots \cup S_m$.

Teorema 15.2.1 (Divergência (Gauss)) *Sejam B e S como acima. Seja $\vec{n}_j$ o vetor normal unitário a S_j que aponta para fora de B . Coloque $\vec{n}(P) = \vec{n}_j(P)$, se $P \in \sigma_j(\operatorname{int} A_j)$. Se $\vec{F}$ é um campo de classe C^1 definido num aberto que contém B então*

$$\iiint \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS. \quad (15.1)$$

Observação 15.2.1 *Note que o lado esquerdo de 15.1 representa o fluxo de $\vec{F}$ através da normal exterior de S .*

15.2.1 Interpretação Física do Divergente

Lembremos que o Teorema do Valor Médio para Integrais do Cálculo 1 nos diz que: se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua então existe $c \in (a, b)$ tal que $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$.

Este resultado continua válido para integrais triplas, isto é, se $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua na bola B então existe $P_0 \in E$ tal que

$$\iiint_B g(x, y, z) dx dy dz = g(P_0) \text{vol}(B).$$

Sejam $\vec{F}$ um campo de classe C^1 definido em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e $P \in \Omega$. Sejam B_ϵ a bola fechada de centro em P e raio $\epsilon > 0$ contida em Ω e S_ϵ a superfície de B_ϵ . Suponha que $\vec{F}(x, y, z)$ represente a velocidade de escoamento de um fluido no ponto $(x, y, z) \in \Omega$.

O Teorema da divergência nos diz que

$$\iint_{S_\epsilon} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{B_\epsilon} \text{div } \vec{F} dx dy dz.$$

Logo

$$\iiint_{B_\epsilon} \text{div } \vec{F} dx dy dz = \text{fluxo para fora de } S_\epsilon.$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio para Integrais para o segundo membro da igualdade acima obtemos

$$\iint_{S_\epsilon} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \text{div}(\vec{F}(P_\epsilon)) \text{vol}(B_\epsilon),$$

onde $P_\epsilon \in B_\epsilon$. Assim,

$$\text{div } \vec{F}(P_\epsilon) = \frac{\iint_{S_\epsilon} \vec{F} \cdot \vec{n} dS}{\text{vol}(B_\epsilon)}.$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ temos que $P_\epsilon \rightarrow P$ e, assim,

$$\text{div } \vec{F}(P) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{div } \vec{F}(P_\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\iint_{S_\epsilon} \vec{F} \cdot \vec{n} dS}{\text{vol}(B_\epsilon)}.$$

Portanto, $\text{div } \vec{F}(P)$ é o valor limite do fluxo por unidade de volume sobre uma esfera de centro em P , quando o raio da esfera tende a zero, ou ainda,

$$\frac{\text{volume do fluido para fora por unidade de tempo}}{\text{volume da esfera}} = \text{div } \vec{F}(P).$$

Logo, se $\text{div } \vec{F}(P) > 0$ então o fluido “se afasta” de P , isto é, P é uma *fonte*. Se $\text{div } \vec{F}(P) < 0$ então o fluido “se aproxima” de P , isto é, P é uma *sorvedouro*. Se $\text{div } \vec{F} = 0$ dizemos que o fluido é *incompressível*.

Observação 15.2.2 O raciocínio acima pode ser repetido para um fluxo magnético ou elétrico.

Exemplo 15.2.1 *Comprove o teorema da divergência para o caso em que B é um tetraedro limitado pelos planos coordenados e por $x + y + z = 1$, $\vec{F}(x, y, z) = 3x^2\vec{i} + xy\vec{j} + z\vec{k}$.*

Resolução: Neste caso $\text{div } \vec{F}(x, y, z) = 6x + x + 1 = 7x + 1$. Assim,

$$\iiint_B \text{div } \vec{F} \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (7x + 1) \, dz \, dy \, dx = \cdots = \frac{1}{8}.$$

Por outro lado, se colocarmos S_1 como a face do tetraedro contida no plano $z = 0$, S_2 como a face contida no plano $x = 0$, S_3 como a face contida no plano $y = 0$ e S_4 como a face contida no plano $x + y + z = 1$, obtemos

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_1} (3x^2\vec{i} + xy\vec{j} + 0\vec{k}) \cdot (-\vec{k}) \, dS = 0.$$

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_2} (0\vec{i} + 0\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (-\vec{i}) \, dS = 0.$$

$$\iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_3} (3x^2\vec{i} + 0\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (-\vec{j}) \, dS = 0.$$

Como $S_4 = \{(x, y, 1 - x - y); (x, y) \in S_1\}$ então

$$\begin{aligned} \iint_{S_4} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \iint_{S_1} (3x^2\vec{i} + xy\vec{j} + (1 - x - y)\vec{k}) \cdot (\vec{i}\vec{j} + \vec{k}) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (3x^2 + xy + (1 - x - y)) \, dy \, dx = \cdots = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Logo

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_A \text{div } \vec{F} \, dx \, dy \, dz.$$

Exemplo 15.2.2 *Sejam B o sólido limitado por $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 3$ e $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. ; Utilizar o teorema da divergência para calcular o fluxo de $\vec{F}$ através da normal exterior da superfície S que delimita B .*

Resolução: Temos

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_B 3 \, dx \, dy \, dz = 3\text{vol}(B) = 36\pi.$$

Exemplo 15.2.3 *Idem para $\vec{F}(x, y, z) = -y\vec{i} + x\vec{j}$.*

Resolução: Temos

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_B 0 \, dx \, dy \, dz = 0.$$

15.3 O Teorema de Stokes

Voltemos a examinar o Teorema de Green. Suponhamos que A , B , Γ e D satisfazem as condições do teorema do teorema de Green. Temos

$$\int_{\Gamma} A dx + B dy = \iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dxdy. \quad (15.2)$$

Lembremos que se $\vec{F}(x, y) = A(x, y)\vec{i} + B(x, y)\vec{j}$ então

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Deste modo, podemos reescrever a fórmula 15.2 como

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{k} dxdy.$$

Vejamos como este resultado pode ser visto no $\mathbb{R}^3$.

Seja $K \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto compacto cuja fronteira pode ser descrita por uma curva γ fechada suave por partes, sem auto-intersecção. Seja $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada injetora tal que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial u} \neq \vec{0}.$$

Diremos que o bordo de $S = \sigma(K)$, dado pela curva $\Gamma = \sigma \circ \gamma$ está no orientado no sentido positivo com relação a

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial v} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial u}}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial v} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial u} \right\|}$$

quando γ estiver orientada no sentido anti-horário.

Teorema 15.3.1 (Stokes) *Sejam $K, \gamma, \sigma, S, \Gamma$ e n como acima. Se $\vec{F}$ é um campo de classe C^1 definido num aberto que contém S então*

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

Exemplo 15.3.1 *Comprove o teorema de Stokes para o caso em que $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1 : z \geq 0\}$, $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.*

Resolução: Neste caso sabemos que $\text{rot } \vec{F} = 0$.

Logo

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_S 0 dS = 0.$$

Por outro lado, como o bordo de S pode ser descrito por $\Gamma(t) \rightarrow (\cos(t), \sin(t), 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, segue-se que

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} x dx + y dy + z dz = \int_0^{2\pi} [\cos t(-\sin t) + \sin t \cos t] dt = \int_0^{2\pi} 0 dt = 0.$$

15.3.1 Interpretação Física do Rotacional

Seja $\vec{F}$ um campo de classe C^1 definido em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Suponha que $\vec{F}(x, y, z)$ represente a velocidade de escoamento de um fluido no ponto $(x, y, z) \in \Omega$.

A integral $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{T} ds$ será denominada circulação de $\vec{F}$ ao longo de Γ , onde $\vec{T}$ é o vetor unitário tangente a Γ .

Observação 15.3.1 Note que se $\vec{F} \cdot \vec{T} \neq 0$, temos contribuição para um movimento circulatório.

Se $\vec{F} \cdot \vec{T} = 0$, não haverá contribuição para um movimento circulatório.

Consideremos P um ponto em Ω , D_{ϵ} um disco de centro em P e raio $\epsilon > 0$. Sejam Γ_{ϵ} a circunferência de D_{ϵ} , $\vec{T}$ vetor tangente unitário a Γ_{ϵ} .

Utilizando o Teorema de Stokes e o Teorema do Valor Médio para Integrais temos

$$\int_{\Gamma_{\epsilon}} \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \int_{\Gamma_{\epsilon}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \stackrel{\text{T. Stokes}}{=} \iint_{D_{\epsilon}} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS \stackrel{\text{T.V. Médio}}{=} \text{rot } \vec{F}(P_{\epsilon}) \cdot \vec{n} \pi \epsilon^2.$$

Portanto,

$$\text{rot } \vec{F}(P_{\epsilon}) \cdot \vec{n} = \frac{1}{\pi \epsilon^2} \int_{\Gamma_{\epsilon}} \vec{F} \cdot \vec{T} ds.$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ temos que $P_{\epsilon} \rightarrow P$ e, assim,

$$\text{rot } \vec{F}(P) \cdot \vec{n} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{rot } \vec{F}(P_{\epsilon}) \cdot \vec{n} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \epsilon^2} \int_{\Gamma_{\epsilon}} \vec{F} \cdot \vec{T} ds.$$

Logo, em cada ponto P , a componente de $\text{rot } \vec{F}(P)$ em qualquer direção $\vec{n}$ é o valor limite da circulação de $\vec{F}$ por unidade de área no plano normal a $\vec{n}$. Em particular, $\text{rot } \vec{F}(P) \cdot \vec{n}$ tem máximo quando $\vec{n}$ é paralelo a $\text{rot } \vec{F}(P)$. Assim, a direção de $\text{rot } \vec{F}(P)$ é a direção para a qual a circulação ao longo da fronteira de um disco perpendicular a $\text{rot } \vec{F}(P)$ atinge seu valor máximo quando o disco tende a um ponto.

Uma outra relação entre rotacional e aspectos rotacionais do movimento pode ser obtida da seguinte forma:

Consideremos um fluido em rotação uniforme em torno de um eixo.

Definimos o vetor velocidade angular, denotado por $\vec{\omega}$, como sendo o vetor que satisfaz

- (i) $\vec{\omega}$ tem a direção do eixo de rotação;
- (ii) tem sentido positivo em relação à rotação (“regra da mão direita”);
- (iii) $\|\vec{\omega}\| = \frac{\|\vec{F}\|}{\|\vec{r}\|}$.

Note que $\vec{F} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, pois $\|\vec{F}\| = \|\vec{\omega}\| \|\vec{r}\|$.

Logo se, $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j} + \omega_3 \vec{k}$, $P = (x, y, z)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ então

$$\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix}$$

$$= [\omega_2(z - z_0) - \omega_3(y - y_0)]\vec{i} + [\omega_3(x - x_0) - \omega_1(z - z_0)]\vec{j} + [\omega_1(y - y_0) - \omega_2(x - x_0)]\vec{k}.$$

Calculando $\text{rot } \vec{F}$ teremos $2\omega_1\vec{i} + 2\omega_2\vec{j} + 2\omega_3\vec{k}$. Portanto $\text{rot } \vec{F} = 2\vec{\omega}$.

Observação 15.3.2 Se temos o movimento de um fluido, $\vec{F} = A\vec{i} + B\vec{j}$, incompressível (divergente igual a zero) e irrotacional (rotacional igual a zero) no plano então

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = 0$$

e

$$\text{rot } \vec{F} = \left[\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} \right] \vec{k} = 0,$$

nos dão as Equações de Cauchy-Riemann, de grande importância na teoria de funções de variáveis complexas.

15.4 Resumo

Temos os seguintes resultados relacionados:

1. Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a).$$

2. Teorema Fundamental para Campos Conservativos:

$$\int_{\gamma} \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

3. Teorema de Green:

$$\int_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} A dx + B dy.$$

3. Teorema da Divergência ou de Gauss:

$$\iiint_B \text{div } \vec{F} dx dy dz = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

3. Teorema da Stokes:

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Gamma} d\vec{r}.$$

Exercício 15.4.1 Prove que se $\vec{F}$ é um campo de quadrado inverso então $\vec{F}$ é incompressível e irrotacional

Exemplo 15.4.1 Seja S uma superfície fechada que é fronteira de uma região B , com a origem sendo um ponto interior de B . Se o campo de quadrado inverso é dado por $\vec{F}(x, y, z) = \frac{q}{\|\vec{r}\|} \vec{r}$, onde $\vec{r}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, prove que o fluxo de $\vec{F}$ sobre S é $4\pi q$, independente da forma de B .

Resolução: Vale observar que não podemos aplicar diretamente o teorema da divergência em B , pois $\vec{F}$ não é de classe C^1 em B .

Para resolver esta situação, consideremos a bola E de centro na origem e raio $a > 0$ contida em B . Denotemos a superfície de E por S^1 .

Como $\vec{F}$ é de classe C^1 na região $B_1 \doteq B \setminus E$, podemos aplicar o teorema da divergência nesta região e obter:

$$\iiint_{B_1} \operatorname{div} \vec{F} \, dv = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S^1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS.$$

Sabemos que $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, logo

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = - \iint_{S^1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS.$$

Mas a normal exterior a S^1 pode ser dada por $\vec{n} = -\frac{1}{\|\vec{r}\|} \vec{r}$ com $\|\vec{r}\| = a$. Assim,

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= - \iint_{S^1} \left(\frac{q}{\|\vec{r}\|^3} \cdot \vec{r} \right) \left(-\frac{1}{\|\vec{r}\|} \vec{r} \right) dS \\ &= \iint_{S^1} \frac{q}{\|\vec{r}\|^4} \vec{r} \cdot \vec{r} \, dS = \iint_{S^1} \frac{q}{\|\vec{r}\|^2} \, dS = \iint_{S^1} \frac{q}{a^2} \, dS = \frac{q}{a^2} \iint_{S^1} dS = 4\pi q. \end{aligned}$$

Exercício 15.4.2 Seja $\vec{F}(x, y, z) = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$. Encontre

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

onde S é a porção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ delimitada pelos planos $z = 1$ e $z = 2$ e $\vec{n}$ aponta para fora de S .