

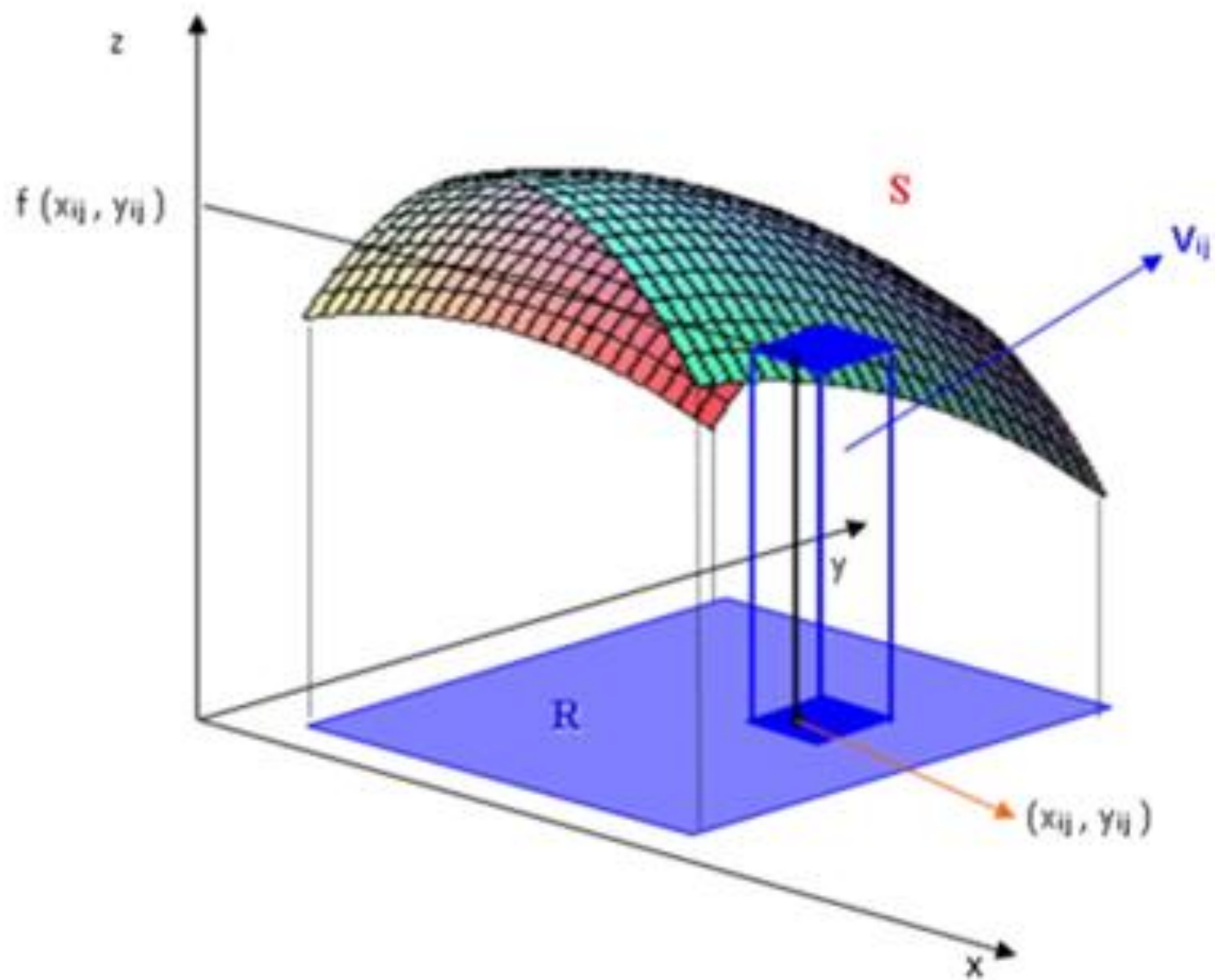
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 3

Integral dupla em Retângulos

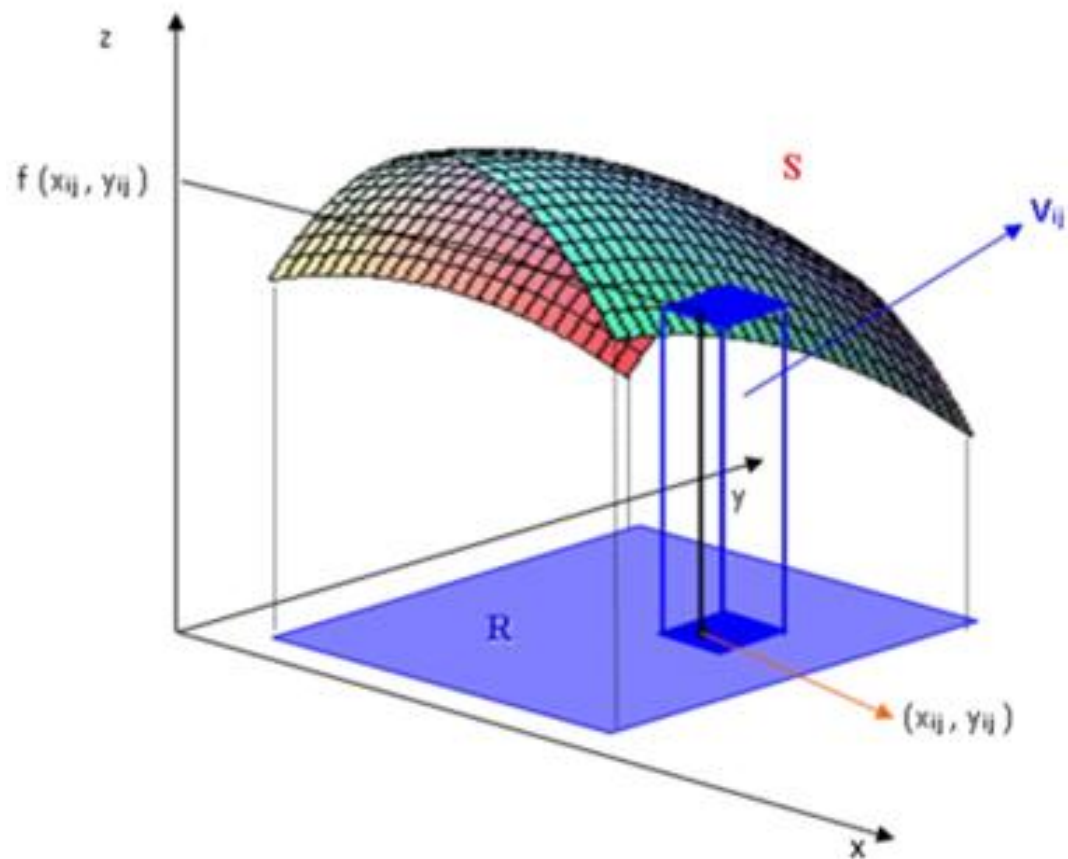
Integrais Duplas

De modo semelhante, vamos considerar uma função f de duas variáveis definida em um retângulo fechado

$R = [a, b] \times [c, d]$ e vamos inicialmente supor $f(x, y) > 0$. O gráfico de f é a superfície com equação $z = f(x, y)$. Seja S o sólido que está contido na região acima de R e abaixo do gráfico de f .



O resultado da integral dupla sobre R equivale ao volume de sólidos como da figura abaixo



Partimos a região R em pequenos retângulos e se arbitrário, que chamaremos **ponto amostra**, (x_i, y_j) em cada R_{ij} , poderemos aproximar a parte de S que está acima de cada R_{ij} por uma caixa retangular fina (ou "coluna") com base R_{ij} e altura $f(x_i, y_i)$, como mostrado na Figura 1. O volume dessa caixa é dado pela sua altura vezes a área do retângulo da base. Se seguirmos com esse procedimento para todos os retângulos e somarmos os volumes das caixas correspondentes, obteremos uma aproximação do volume total de S .

Cada vez que partimos a região em retângulos menores, mais próximo a soma dos volumes das caixas estará do volume do sólido.

O volume exato do sólido é dado pela soma de Rieman:

$$V = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

Utilizando o teorema fundamental do Cálculo, com a mesma idéia obteve-se que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Ex: Calcule a integral dupla $\int \int_S (3xy^3 + 2x^2 - y) dx dy$,
onde S é o retângulo $-1 \leq x \leq 3$ e $1 \leq y \leq 4$. Vamos
integrar primeiro em x :

Ex: Calcule a integral dupla $\int \int_S (3xy^3 + 2x^2 - y)dx dy$, onde S é o retângulo $-1 \leq x \leq 3$ e $1 \leq y \leq 4$. Vamos integrar primeiro em x :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^3 (3xy^3 + 2x^2 - y)dx = 3y^3 \frac{x^2}{2} + 2 \frac{x^3}{3} - yx \Big|_{-1}^3 \\ &= 3y^3 \frac{3^2}{2} + 2 \frac{3^3}{3} - y3 \\ &\quad - \left(3y^3 \frac{(-1)^2}{2} + 2 \frac{(-1)^3}{3} - y(-1) \right) \\ &= \frac{24}{2} y^3 + \frac{56}{3} - 4y \end{aligned}$$

Agora calcula a segunda integral:

$$\begin{aligned} II &= \int_1^4 \left(\frac{24}{2} y^3 + \frac{56}{3} - 4y \right) dy = \frac{24}{2} \frac{y^4}{4} + \frac{56}{3} y - 2y^2 \Big|_1^4 \\ &= 3 \cdot 4^4 + \frac{56}{3} 4 - 2 \cdot 4^2 - \left(3 \cdot 1^4 + \frac{56}{3} - 2 \cdot 1^2 \right) = 791 \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS:

1. Calcule as integrais abaixo:

a) $\int_0^1 \int_1^2 (2x + y) dx dy$ R: 7/2

b) $\int_0^1 \int_0^2 (2xy^2 + \operatorname{sen} y) dx dy$ R: $\frac{10}{2} - 2\cos(1)$

c) $\int_0^1 \int_1^2 (x \cos(y) + x^2 y - 1) dx dy$

d) $\int_0^1 \int_0^1 \cos(2x + 3y) \cdot x dx dy$

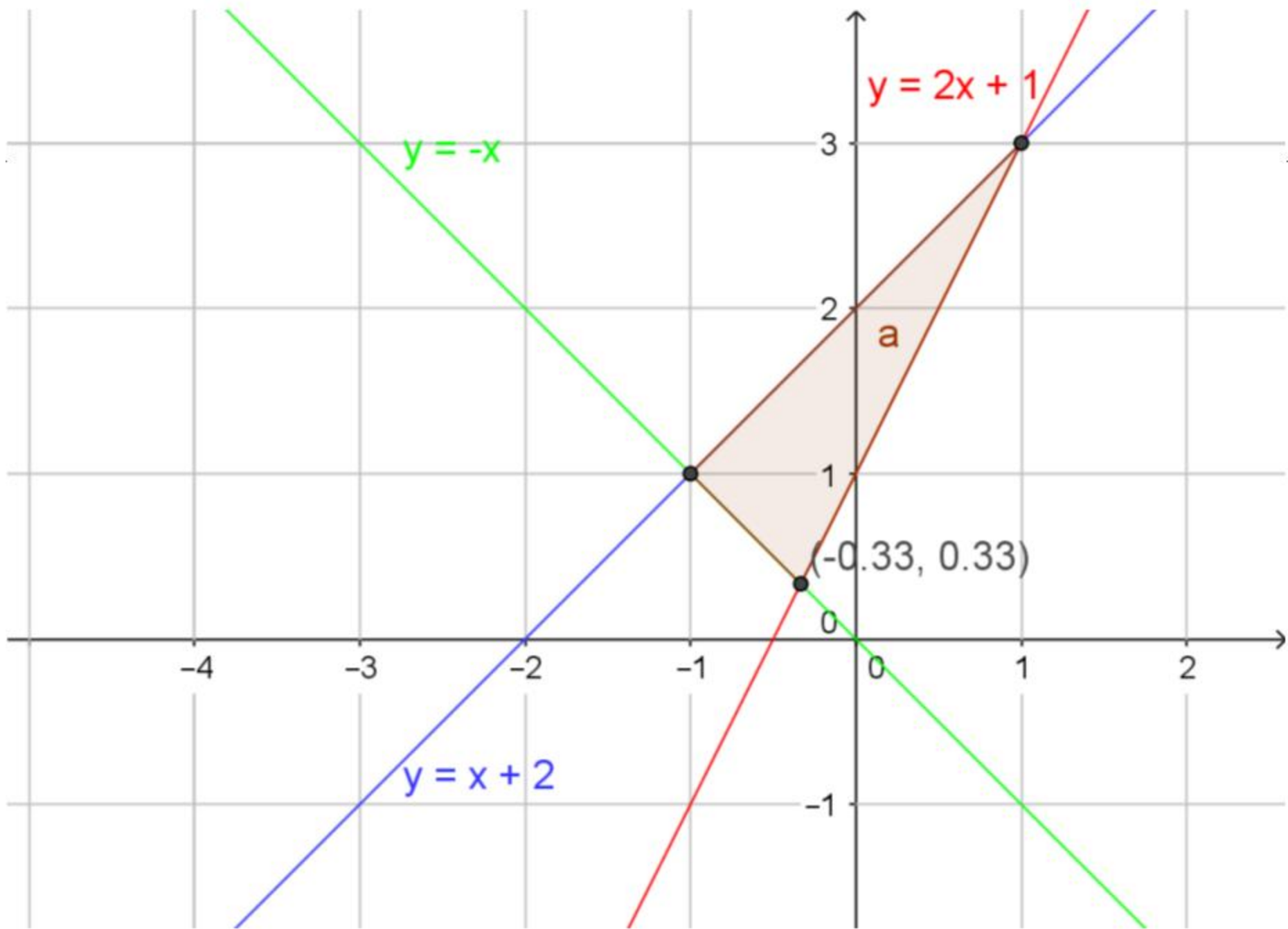
INTEGRAIS SOBRE REGIÕES

Dada uma região $a \leq x \leq b$ e $g(x) \leq y \leq h(x)$, então

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$$

Muitas vezes esta região vem escrita de outra forma e devemos determinar os limites de integração nelas, fixando uma das variáveis e a outra em função.

Ex: Determine os limites de integração na região delimitada pelas retas $y = 2x + 1$, $y = -x$ e $y = x + 2$



De acordo com a região de integração podemos fixar x . Sendo assim y será limitada de acordo com as curvas envolvidas.

Teremos que fazer duas regiões. Na primeira enquanto

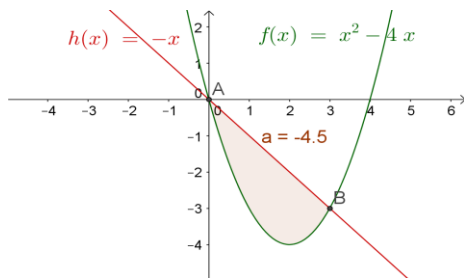
$-1 \leq x \leq -0.33$ temos $-x \leq y \leq x + 2$. Na segunda temos

$-0.33 \leq x \leq 1$ e $2x + 1 \leq y \leq x + 2$. Então na região dada a integral fica:

$$I = \int_{-1}^{-0.33} \int_{-x}^{x+2} f(x, y) dy dx + \int_{-0.33}^1 \int_{2x+1}^{x+2} f(x, y) dy dx$$

Ex: Calcule

$\iint_S (xy + 3xy^2 - 5y) dx dy$, onde S é a região delimitada pelos gráficos de $y = x^2 - 4x$ e $y = -x$. A região está no gráfico abaixo.



Neste caso o calculo da integral é:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 \int_{x^2-4x}^{-x} (xy + 5y) \, dy \, dx = \int_0^3 \left(\frac{xy^2}{2} + \frac{5y^2}{2} \right) \Big|_{x^2-4x}^{-x} dx = \\ &= \int_0^3 \left(-\frac{x^5}{2} - x^4 + \frac{65x^3}{2} - \frac{155x^2}{2} \right) dx = -\frac{x^6}{12} - \frac{x^5}{5} + \frac{65x^4}{8} - \\ &\quad - \frac{155x^3}{6} \Big|_0^3 = \dots \end{aligned}$$

Pois de acordo com a região de integração, a curva $y = -x$ está acima da outra curva, enquanto $0 \leq x \leq 1$.

Exemplo: Determine a integral $\iint_R (x - 3y)dA$, onde R é a região delimitada por $y = x^2$ e $y = 4x - x^2$.

Solução:

De acordo com a figura do slide anterior a integral pedida é $\int_0^2 \int_{x^2}^{4x-x^2} (x - 3y)dydx$. Faremos primeiro em y :

$$\int_{x^2}^{4x-x^2} (x - 3y)dy = \left(xy - 3\frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^{4x-x^2} =$$

$$x(4x - x^2) - 3\frac{(4x - x^2)^2}{2} - \left(x \cdot x^2 - 3\frac{(x^2)^2}{2} \right) =$$

$$= -20x^2 + 10x^3$$

Agora integramos o resultado em relação a x :

$$\int_0^2 (-20x^2 + 10x^3)dx = \left(-20\frac{x^3}{3} + 10\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 =$$
$$-20\frac{8}{3} + 10\frac{16}{4} - (0) = -\frac{40}{3}.$$

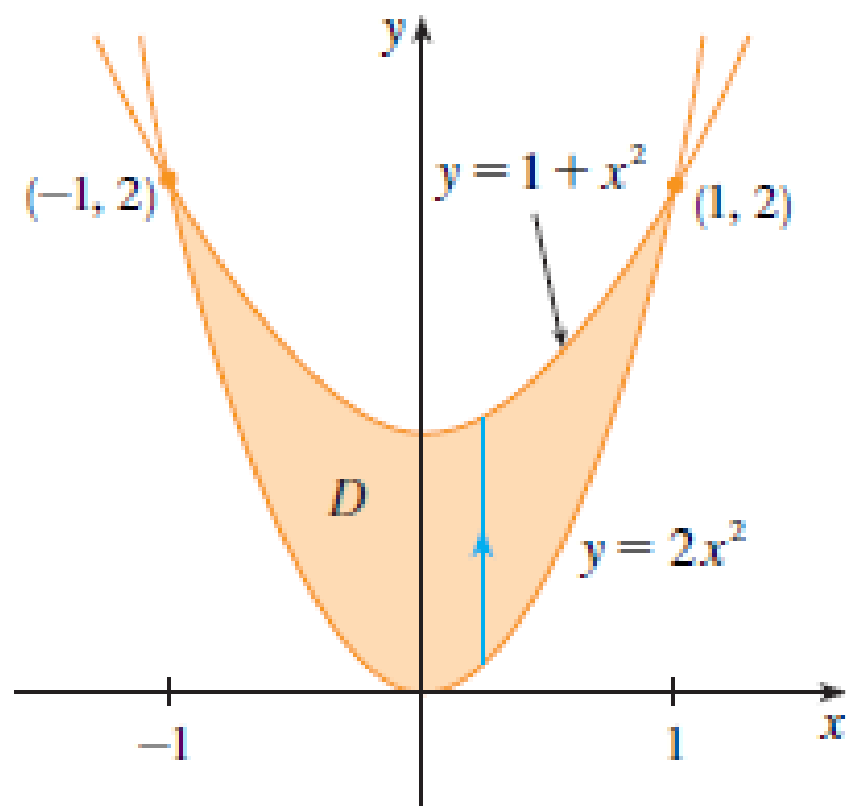
EXEMPLO 1 Calcule $\iint_D (x + 2y) dA$, onde D é a região limitada pelas parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.

SOLUÇÃO As parábolas se interceptam quando $2x^2 = 1 + x^2$, ou seja, $x^2 = 1$, logo, $x = \pm 1$. Observamos que a região D , ilustrada na Figura 8, é uma região do tipo I, mas não do tipo II, e podemos escrever

$$D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 2x^2 \leq y \leq 1 + x^2\}$$

Como o limite inferior é $y = 2x^2$ e o superior é $y = 1 + x^2$, a Equação 3 leva a

$$\begin{aligned}\iint_D (x + 2y) dA &= \int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y) dy dx \\&= \int_{-1}^1 [xy + y^2]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} dx \\&= \int_{-1}^1 [x(1 + x^2) + (1 + x^2)^2 - x(2x^2) - (2x^2)^2] dx \\&= \int_{-1}^1 (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1) dx \\&= -3 \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + 2 \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \Big|_{-1}^1 = \frac{32}{15}\end{aligned}$$



Exercício em grupo: Pelo que vimos nos exemplos anteriores, para realizar o cálculo de integrais sobre regiões é necessário determinar qual a curva está acima e quando necessário os pontos de intersecção. Assim sendo utilize o geogebra para identificar esses aspectos e calcule a integral $\iint_R (x + y)dA$, onde R é a região delimitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = x$.

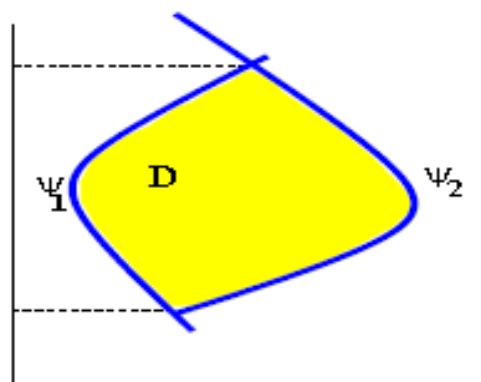
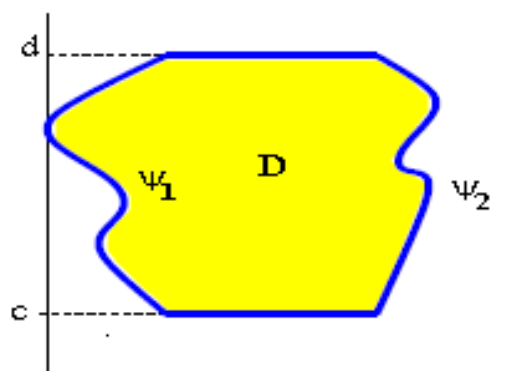
Integração Dupla sobre Regiões Gerais – Regiões de Tipo II

Regiões de tipo II

D é uma região de tipo II se pode ser descrita por:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

sendo $\psi_i : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) funções contínuas tais que $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ para todo $y \in [c, d]$.

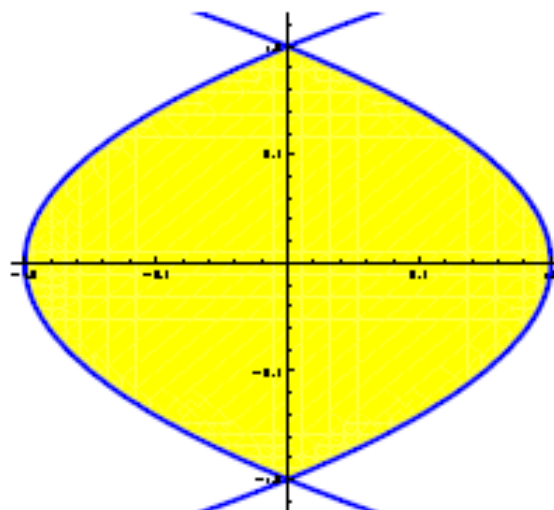


Exemplo de Região de Tipo II

Seja a região D limitada pelas seguintes curvas: $y^2 - w = 1$ e $y^2 + w = 1$.

$$D = \{(w, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq y \leq 1, y^2 - 1 \leq w \leq 1 - y^2\};$$

D é uma região de tipo II.



Exemplo: Calcule a integral $\iint_R (xy + 3)dA$, onde R é a região delimitada pelas curvas $y^2 - x = 1$ e $y^2 + x = 1$.

Solução: De acordo com o exemplo anterior esta região é $-1 \leq y \leq 1$ e $y^2 - 1 \leq x \leq 1 - y^2$. Daí calculamos

$$\int_{-1}^1 \int_{y^2-1}^{1-y^2} (x + 2y + 3) dx dy$$

Calculamos primeiro em x .

$$\int_{y^2-1}^{1-y^2} (xy + 3)dx = \left(\frac{x^2}{2}y + 3x\right)\Big|_{y^2-1}^{1-y^2} =$$

$$\frac{(1-y^2)^2}{2}y + 3(1-y^2) - \left(\frac{(y^2-1)^2}{2}y + 3(y^2-1)\right)$$

$$= 6 - 6y^2.$$

Agora integramos o resultado em y :

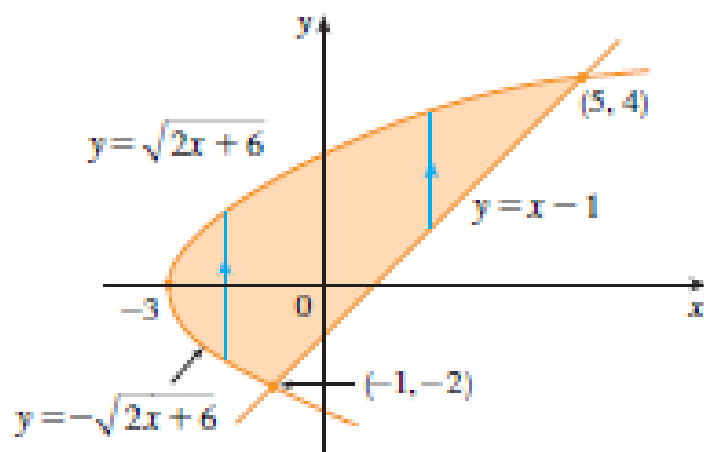
$$\int_{-1}^1 (6 - 6y^2)dy = 6y - 2y^3 \Big|_{-1}^1 = 6 - 2 - (-6 + 2) = 8.$$

MUDANÇA DA ORDEM DE INTEGRAÇÃO.

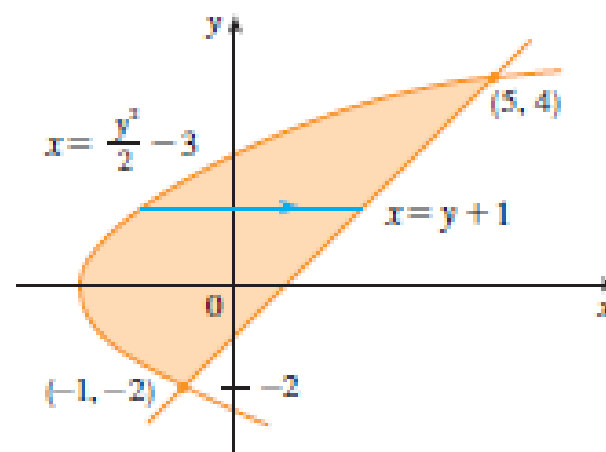
EXEMPLO 3 Calcule $\iint_D xy \, dA$, onde D é a região limitada pela reta $y = x - 1$ pela parábola $y^2 = 2x + 6$.

SOLUÇÃO A região D é mostrada na Figura 12. Novamente, D pode ser vista tanto como uma região do tipo I como uma região do tipo II, mas a descrição de D como região do tipo I é mais complicada, porque o limite inferior é constituído de duas partes. Portanto, preferimos expressar D como uma região do tipo II:

$$D = \left\{ (x, y) \mid -2 \leq y \leq 4, \frac{1}{2}y^2 - 3 \leq x \leq y + 1 \right\}$$



(a) D como uma região do tipo I



(b) D como uma região do tipo II

Então, 5 dá

$$\begin{aligned}\iint_D xy \, dA &= \int_{-2}^4 \int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} xy \, dx \, dy = \int_{-2}^4 \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{x=\frac{1}{2}y^2-3}^{x=y+1} dy \\&= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 y \left[(y+1)^2 - \left(\frac{1}{2}y^2 - 3 \right)^2 \right] dy \\&= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 \left(-\frac{y^5}{4} + 4y^3 + 2y^2 - 8y \right) dy \\&= \frac{1}{2} \left[-\frac{y^6}{24} + y^4 + 2\frac{y^3}{3} - 4y^2 \right]_{-2}^4 = 36\end{aligned}$$

LISTA DE EXERCÍCIOS

7. $\iint_D y^2 dA$, $D = \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 1, -y - 2 \leq x \leq y\}$

8. $\iint_D \frac{y}{x^5 + 1} dA$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$

9. $\iint_D x dA$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}$

23–32 Determine o volume do sólido dado.

23. Abaixo do plano $x - 2y + z = 1$ e acima da região limitada por $x + y = 1$ e $x^2 + y = 1$

24. Abaixo da superfície $z = 2x + y^2$ e acima da região limitada por $x = y^2$ e $x = y^3$

43–48 Esboce a região de integração e mude a ordem de integração.

43. $\int_0^1 \int_0^y f(x, y) dy dx$

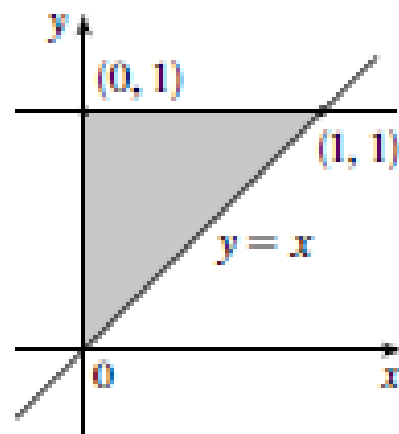
44. $\int_0^2 \int_{x^2}^4 f(x, y) dy dx$

RESPOSTAS

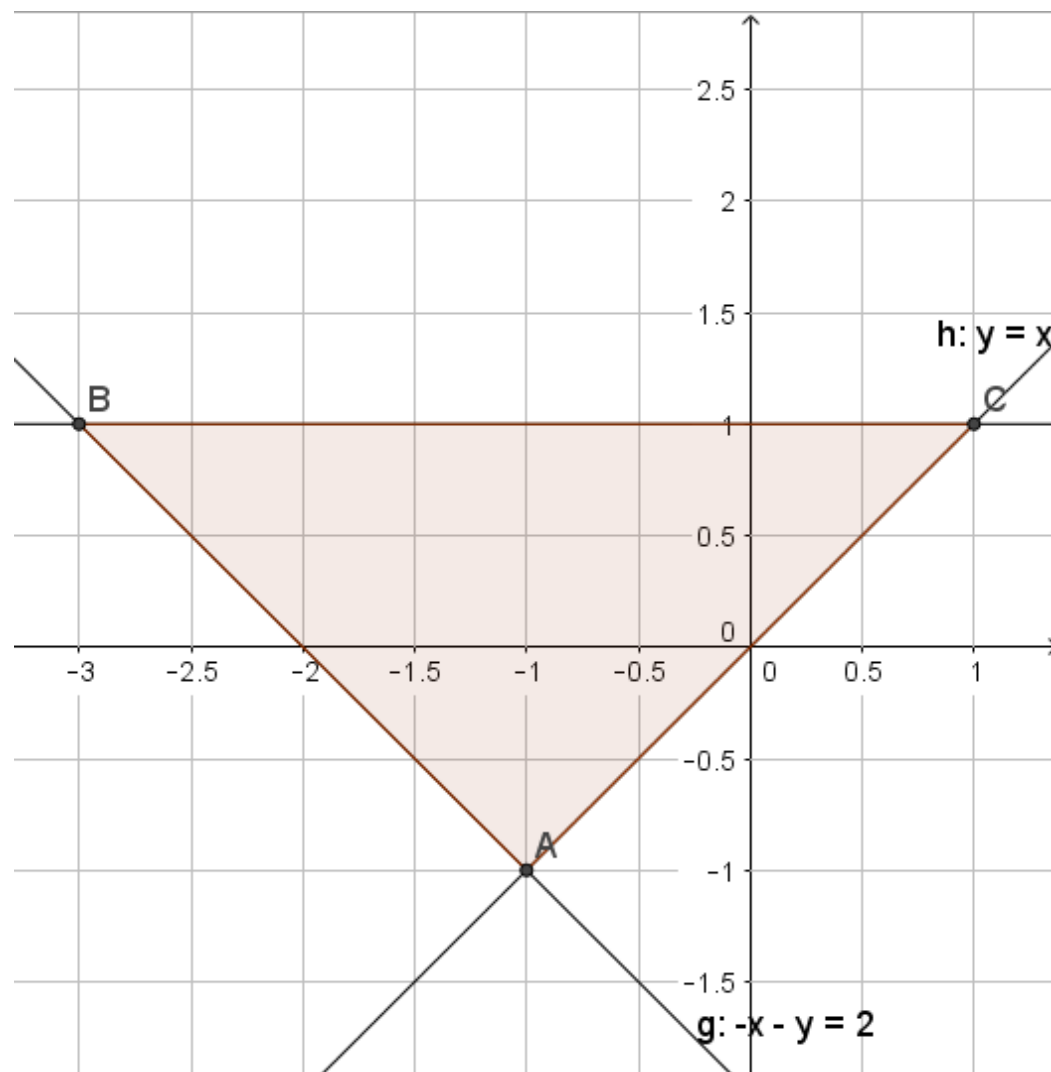
EXERCÍCIOS 15.3

1. 32 3. $\frac{3}{10}$ 5. $\frac{1}{3} \sin 1$ 7. $\frac{4}{3}$ 9. π 23. $\frac{17}{60}$

43. $\int_0^1 \int_x^1 f(x, y) \, dy \, dx$



Região do exercícios 7:



Exercícios 8:

