

Capítulo 6

Integração Dupla

6.1 Integração Dupla sobre Retângulos

Denotemos por $R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ um retângulo em $\mathbb{R}^2$. Consideremos $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ e $P_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ partições de ordem n de $[a, b]$ e $[c, d]$ respectivamente, tais que:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad \text{e} \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$$

$$\text{e } x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}, y_{j+1} - y_j = \frac{d-c}{n}.$$

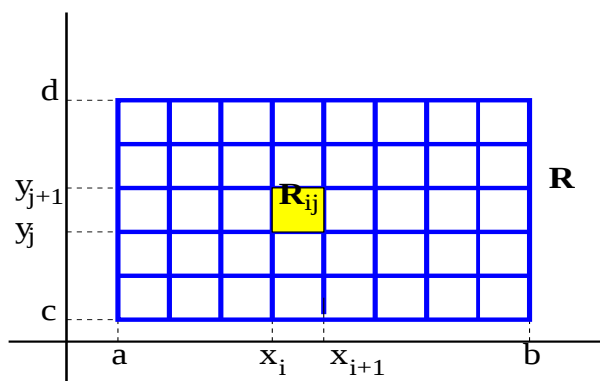


Figura 6.1: Partição de R .

O conjunto $P_1 \times P_2$ é denominada partição do retângulo R de ordem n . Sejam os n^2 sub-retângulos $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ e $c_{ij} \in R_{ij}$ arbitrário ($i, j = 0, \dots, n$). Considere $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. A soma

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(c_{ij}) \Delta x \Delta y,$$

onde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e $\Delta y = \frac{d-c}{n}$ é dita **soma de Riemann** de f sobre R .

Definição 6.1. Uma função $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ limitada é **integrável** sobre R se $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$, existe independente da escolha de $c_{ij} \in R_{ij}$ e da partição; em tal caso denotamos este limite por:

$$\iint_R f(x, y) dx dy,$$

que é denominada **integral dupla** de f sobre R .

Teorema 6.1. Toda $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ contínua é integrável.

A prova deste teorema pode ser vista em [EL].

6.2 Significado Geométrico da Integral Dupla

Se f é contínua e $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in R$, a existência da integral dupla de f sobre R tem um significado geométrico direto. Consideramos o sólido $W \subset \mathbb{R}^3$ definido por:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

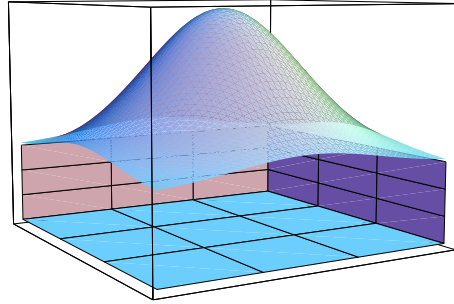


Figura 6.2: O sólido W .

W é fechado e limitado superiormente pelo gráfico de $z = f(x, y)$, inferiormente por R e lateralmente pelos planos $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$. Se denotamos por $V(W)$ o volume de W , então:

$$V(W) = \iint_R f(x, y) dx dy$$

De fato, escolhendo c_{ij} como o ponto onde f atinge seu máximo sobre R_{ij} (pois R é fechado, limitado e f é contínua), então $f(c_{ij}) \times \Delta x \times \Delta y$ é o volume do paralelepípedo de base R_{ij} e altura $f(c_{ij})$.

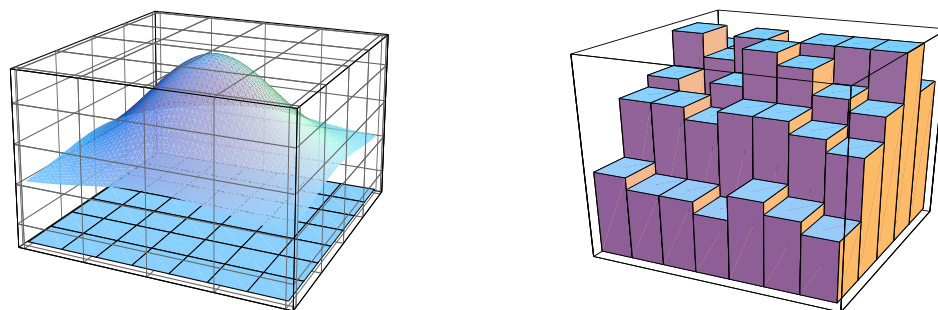


Figura 6.3: Partição e os paralelepípedos de W , respectivamente.

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(c_{ij}) \Delta x \Delta y$$

é o volume do sólido circunscrito a W . Analogamente se e_{ij} é o ponto onde f atinge seu mínimo sobre R_{ij} (pois R é fechado, limitado e f é contínua), então:

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(e_{ij}) \Delta x \Delta y$$

é o volume do sólido inscrito em W . Como f é integrável, os limites das somas de Riemann S_n e s_n independem da escolha de c_{ij} e e_{ij} :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \iint_R f(x, y) dx dy.$$

Em outras palavras os volumes dos sólidos inscritos e circunscritos a W , tendem ao mesmo limite. Portanto, é razoável chamar este limite de volume de W .

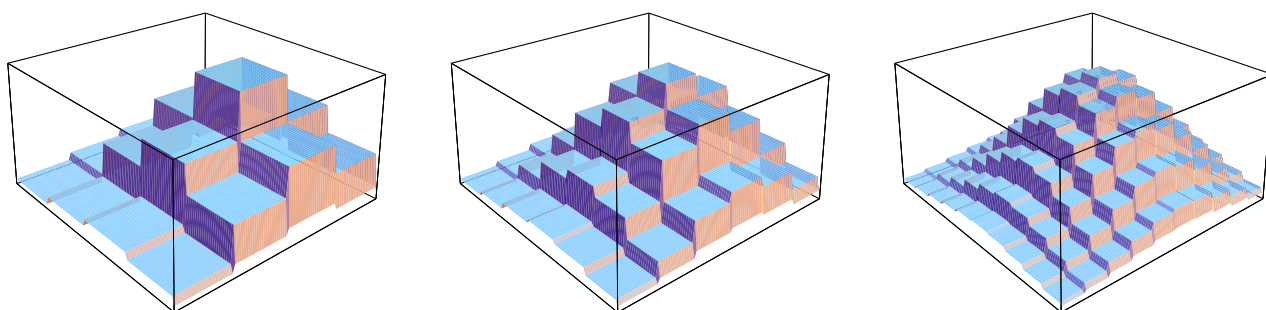


Figura 6.4: Reconstrução do sólido.

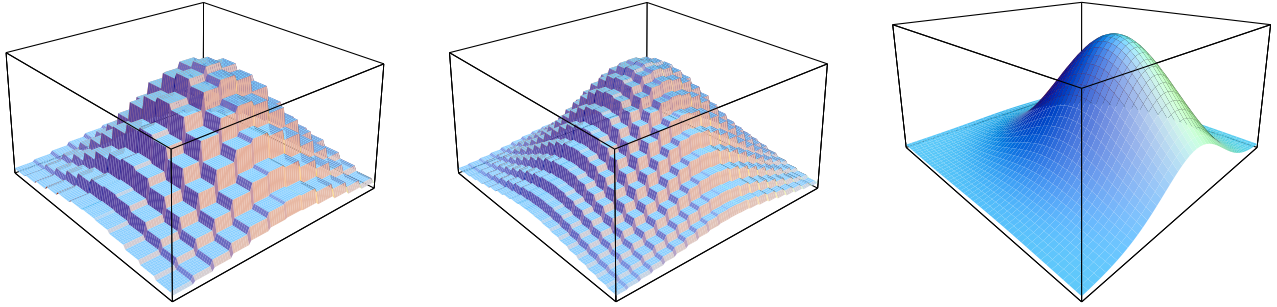


Figura 6.5: Reconstrução do sólido.

Novamente notamos que é possível mostrar rigorosamente que o significado geométrico da integral dupla independe da escolha da partição e dos pontos c_{ij} e e_{ij} .

A integral dupla tem propriedades análogas às das integrais das funções de uma variável.

Proposição 6.1.

1. **Linearidade da integral dupla.** Se f e g são funções integráveis sobre R então para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ é integrável sobre R , e:

$$\iint_R (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dx dy = \alpha \iint_R f(x, y) dx dy + \beta \iint_R g(x, y) dx dy.$$

2. Se f e g são integráveis sobre R e $g(x, y) \leq f(x, y)$, para todo $(x, y) \in R$, então:

$$\iint_R g(x, y) dx dy \leq \iint_R f(x, y) dx dy.$$

3. Se R é subdividido em k retângulos e f é integrável sobre cada R_i , $i = 1, \dots, k$ então f é integrável sobre R e,

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^k \iint_{R_i} f(x, y) dx dy.$$

6.3 Integrais Iteradas

Uma integral iterada de f sobre R é uma integral do tipo:

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

Para calculá-la fixamos y e calculamos a integral $\int_a^b f(x, y) dx$ como integral de uma variável em x ; o resultado é uma função de y que é novamente integrada em y , com limites de integração c e d .

A integral $\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$ é calculada de forma análoga.

Exemplo 6.1.

[1] Calcule $\int_0^2 \left[\int_1^3 x^2 y \, dy \right] dx$.

$$\int_1^3 x^2 y \, dy = x^2 \int_1^3 y \, dy = 4x^2 \quad \text{e} \quad \int_0^2 \left[\int_1^3 x^2 y \, dy \right] dx = \int_0^2 4x^2 \, dx = \frac{32}{3}.$$

[2] Calcule $\int_0^\pi \left[\int_0^\pi \cos(x+y) \, dx \right] dy$.

$$\int_0^\pi \cos(x+y) \, dx = \text{sen}(x+y) \Big|_{x=0}^{x=\pi} = \text{sen}(y+\pi) - \text{sen}(y),$$

e

$$\int_0^\pi \left[\int_0^\pi \cos(x+y) \, dx \right] dy = \int_0^\pi (\text{sen}(y+\pi) - \text{sen}(y)) \, dy = -4.$$

[3] Calcule $\int_{-1}^1 \left[\int_{-2}^1 (x^2 + y^2) \, dx \right] dy$.

$$\int_{-2}^1 (x^2 + y^2) \, dx = \left(\frac{x^3}{3} + x y^2 \right) \Big|_{x=-2}^{x=1} = 3 + 3y^2$$

e $\int_{-1}^1 \left[\int_{-2}^1 (x^2 + y^2) \, dx \right] dy = \int_{-1}^1 (3 + 3y^2) \, dy = 8.$

[4] Calcule $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\int_0^4 \rho^2 e^{\rho^3} \text{sen}(\phi) \, d\rho \right] d\phi$.

$$\int_0^4 \rho^2 e^{\rho^3} \text{sen}(\phi) \, d\rho = \text{sen}(\phi) \int_0^4 \rho^2 e^{\rho^3} \, d\rho = \text{sen}(\phi) \frac{e^{\rho^3}}{3} \Big|_0^4 = \text{sen}(\phi) \frac{e^{64} - 1}{3}$$

e $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\int_0^4 \rho^2 e^{\rho^3} \text{sen}(\phi) \, d\rho \right] d\phi = \frac{e^{64} - 1}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \text{sen}(\phi) \, d\phi = \frac{(e^{64} - 1)(\sqrt{3} - 1)}{6}.$

[5] Calcule $\int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2} \, dx \right] dy$.

$$\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2} \, dx = 1 - y^2, \quad \text{e} \quad \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2} \, dx \right] dy = \int_0^1 (1 - y^2) \, dy = \frac{2}{3}.$$

[6] Seja a função $f : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 2y & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Então:

$$\int_0^1 dy = \begin{cases} \int_0^1 dy = 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ \int_0^1 2y dy = 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Logo, $\int_0^1 \left[\int_0^1 dy \right] dx = 1$. Por outro lado $\int_0^1 f(x, y) dx$ não existe, exceto quando $y = \frac{1}{2}$; logo,

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 dx \right] dy$$

não existe. Em geral, nada garante a existência das integrais iteradas.

6.4 Teorema de Fubini

O seguinte teorema fundamental relaciona a integral dupla com as integrais iteradas, o que facilitará seu cálculo.

Teorema 6.2. (Fubini): *Seja $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ contínua sobre R . Então:*

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

Prova: Veja o apêndice.

Uma visualização geométrica do teorema de Fubini pode ser feita usando o princípio de Cavalieri: “ Dado um sólido, se denotamos por $A(y)$ a área da seção transversal ao sólido, medida a uma distância y de um plano de referência, o volume do sólido é dado por: $V = \int_c^d A(y) dy$, onde c e d são as distâncias mínima e máxima ao plano de referência”.

Se f é uma função contínua e $f(x, y) \geq 0$ em todo R , então $\iint_R f(x, y) dx dy$ representa o volume do sólido W :

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

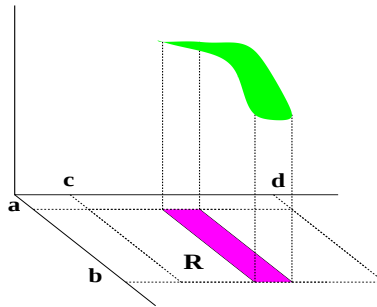


Figura 6.6:

Se intersectamos o sólido por um plano paralelo ao plano yz a uma distância x da origem, obtemos uma seção plana que tem como área $A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$. Pelo princípio de Cavalieri, o volume total do sólido é:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

Analogamente, se intersectamos o sólido por um plano paralelo ao plano xz a uma distância y da origem obtemos uma seção plana de área $A(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ e pelo princípio de Cavalieri:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d A(y) dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

Exemplo 6.2.

[1] Calcule $\iint_R dx dy$, onde $R = [a, b] \times [c, d]$.

$$\iint_R dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d dy \right] dx = \int_a^b (d - c) dx = (b - a) (d - c);$$

numericamente a integral dupla $\iint_R dx dy$, corresponde a área de R ou ao volume do paralelepípedo de base R e altura 1.

[2] Calcule $\iint_R f(x, y) dx dy$, onde $R = [a, b] \times [c, d]$ e $f(x, y) = h$, h constante positiva.

$$\iint_R f(x, y) dx dy = h \iint_R dx dy = h \times A(R) = h (b - a) (d - c),$$

onde a última igualdade expressa o volume do paralelepípedo de base R e altura h .

[3] Calcule $\iint_R (xy + x^2) dx dy$, onde $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \iint_R (xy + x^2) dx dy &= \int_0^1 \left[\int_0^1 (xy + x^2) dx \right] dy = \int_0^1 \left(\frac{x^2 y}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{3} \right) dy = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

O número $\frac{7}{12}$ representa o volume do sólido limitado superiormente pelo gráfico da função $f(x, y) = xy + x^2$ e pelos planos coordenados. $((x, y) \in [0, 1] \times [0, 1])$.

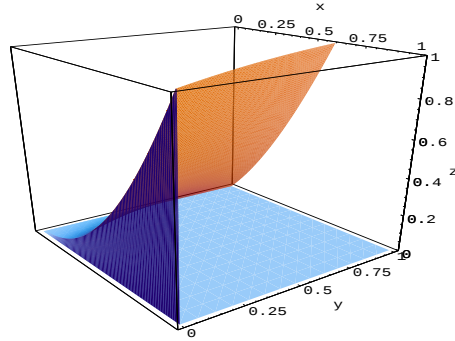


Figura 6.7: Exemplo [4].

[4] Calcule $\iint_R e^{x+2y} dx dy$, onde $R = [0, 1] \times [0, 3]$.

$$\iint_R e^{x+2y} dx dy = \int_0^3 \left[\int_0^1 e^{x+2y} dx \right] dy = (e - 1) \int_0^3 e^{2y} dy = \frac{1}{2}(e - 1)(e^6 - 1).$$

[5] Calcule $\iint_R \sin(x + y) dx dy$, onde $R = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$.

$$\iint_R \sin(x + y) dx dy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\pi \sin(x + y) dx \right] dy = \int_0^{2\pi} (\cos(y) - \cos(y + \pi)) dy = 0.$$

[6] Calcule o volume do sólido limitado superiormente por $z = 1 - y$ e inferiormente pelo retângulo definido por $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$.

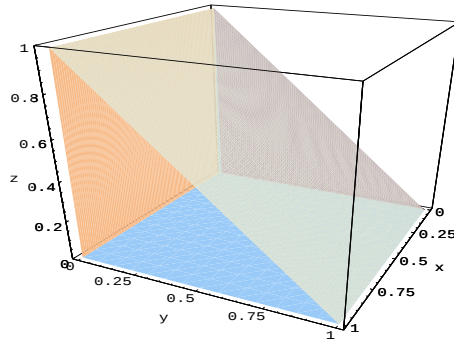


Figura 6.8: Sólido do exemplo [6].

O sólido está limitado superiormente pelo plano $z = 1 - y$ e inferiormente pelo retângulo $R = [0, 1] \times [0, 1]$; então, o volume V é:

$$V = \iint_R (1 - y) dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 (1 - y) dx \right] dy = \int_0^1 (1 - y) dy = \frac{1}{2} u.v.$$

[7] Calcule o volume do sólido limitado por $z = x^2 + y^2$ e pelos planos $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$ e $y = 1$.

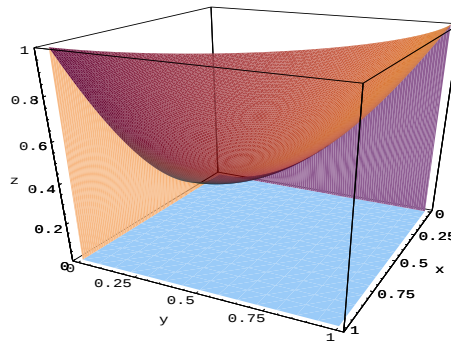


Figura 6.9: Sólido do exemplo [7].

$R = [0, 3] \times [0, 1]$. O volume é:

$$V = \iint_R (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^3 (x^2 + y^2) dx \right] dy = \int_0^1 (9 + 3y^2) dy = 10 \text{ u.v.}$$

u.v. = unidades de volume.

[8] Calcule o volume do sólido limitado por $z = 1 - y^2$ e pelos planos $x = -1$, $x = 1$, $y = -1$ e $y = 1$.

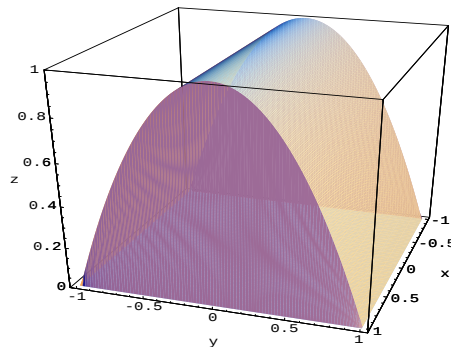


Figura 6.10: Sólido do exemplo [8].

$R = [-1, 1] \times [-1, 1]$. O volume é:

$$V = \iint_R (1 - y^2) dx dy = \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 (1 - y^2) dx \right] dy = 2 \int_{-1}^1 (1 - y^2) dy = \frac{8}{3} \text{ u.v.}$$

6.4.1 Extensão do Teorema de Fubini

Antes de estudar a integral dupla em regiões mais gerais enunciaremos uma generalização do teorema 6.1.

Definição 6.2. Seja $A \subset R$, $R = [a, b] \times [c, d]$. O conjunto $A \subset R$ tem conteúdo nulo se existe um número finito de sub-retângulos $R_i \subset R$, $(1 \leq i \leq n)$ tais que $A \subset R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_{n-1} \cup R_n$ e:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n |R_i| = 0;$$

onde $|R_i|$ é a área de R_i .

Exemplo 6.3.

[1] Se $A = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$, $p_i \in R$, $(1 \leq i \leq m)$. O conjunto A tem conteúdo nulo. Utilizando uma partição de ordem n de R como antes, temos: $|R_i| = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2}$, $1 \leq i \leq n$. Como cada ponto pode estar no máximo em quatro sub-retângulos, então:

$$0 < \sum_{i=1}^n |R_i| \leq \frac{4m(b-a)(d-c)}{n^2}.$$

Logo $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n |R_i| = 0$.

[2] ∂R tem conteúdo nulo.

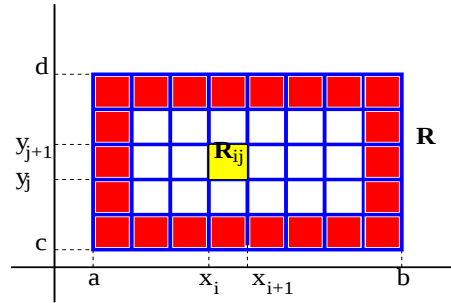


Figura 6.11: ∂R .

Os pontos de ∂R estão distribuídos em $4n - 4$ sub-retângulos R_{ij} :

$$0 < \sum_{i=1}^n |R_i| \leq \frac{(4n - 4)(b-a)(d-c)}{n^2} \leq \frac{4(b-a)(d-c)}{n},$$

pois $\frac{n-1}{n} < 1$. Logo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n |R_i| = 0.$$

É possível provar que o gráfico de uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tem conteúdo nulo.

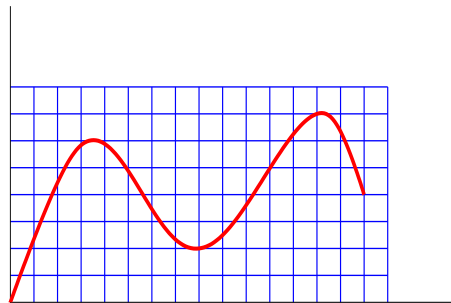


Figura 6.12: $G(f)$.

Teorema 6.3. Se $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada e o conjunto onde f é descontínua tem conteúdo nulo, então f é integrável sobre R .

Prova: Veja [EL] na bibliografia.

6.5 Integração Dupla sobre Regiões mais Gerais

6.5.1 Regiões Elementares

Definiremos três tipos especiais de subconjuntos do plano, que serão utilizados para estender o conceito de integral dupla sobre retângulos a regiões mais gerais. Seja $D \subset \mathbb{R}^2$.

Regiões de tipo I

D é uma região de tipo I se pode ser descrita por:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

sendo $\phi_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) funções contínuas tais que $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

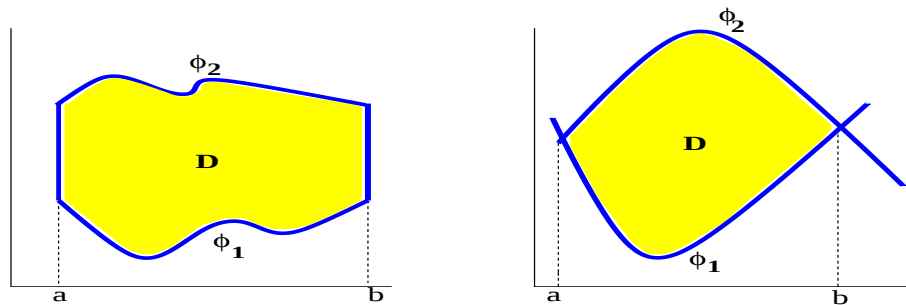


Figura 6.13: Regiões de tipo I.

Regiões de tipo II

D é uma região de tipo II se pode ser descrita por:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

sendo $\psi_i : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) funções contínuas tais que $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ para todo $y \in [c, d]$.

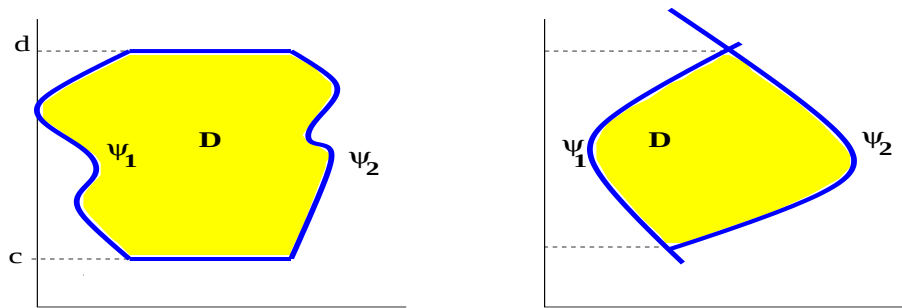


Figura 6.14: Regiões de tipo II.

Regiões de tipo III

D é uma região de tipo III se pode ser descrita como região de tipo I ou de tipo II.

As regiões de tipos I, II ou III são chamadas elementares. As regiões elementares são fechadas e limitadas.

Exemplo 6.4.

[1] A região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4x - x^2$ pode ser descrita como de tipo I:
A interseção das curvas é dada pela solução do sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4x - x^2 \end{cases},$$

do qual obtemos: $x = 0$ e $x = 2$; logo, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4x - x^2\}$.

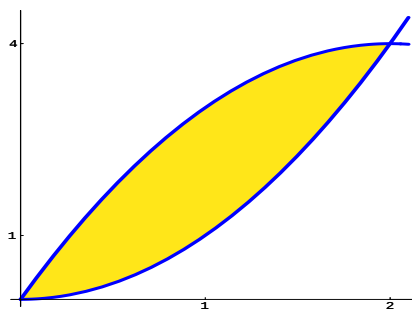


Figura 6.15: Região de tipo I.

[2] Seja a região D limitada pelas seguintes curvas: $y^2 - x = 1$ e $y^2 + x = 1$.

A região pode ser descrita por $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq y \leq 1, y^2 - 1 \leq x \leq 1 - y^2\}$; D é uma região de tipo II.

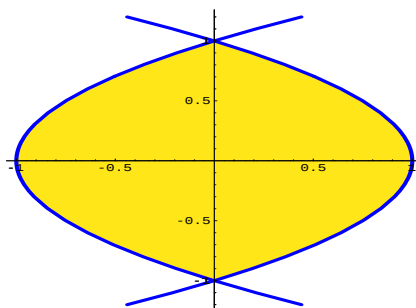


Figura 6.16: Região de tipo II.

[3] A região D limitada pela reta $x + y = 2$ e pelos eixos coordenados, no primeiro quadrante, pode ser descrita como de tipo II: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 2 - y\}$.

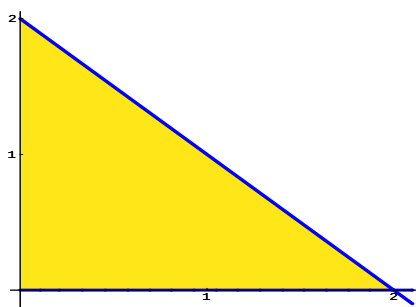


Figura 6.17: Região de tipo III.

[4] A região D limitada pelas curvas $y = x - 1$ e $y^2 = 2x + 6$, pode ser descrita como de tipo II. A interseção das curvas é dada pela solução do sistema:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y^2 = 2x + 6, \end{cases}$$

do qual obtemos: $x = -1$ e $x = 5$; logo: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -2 \leq y \leq 4, \frac{y^2}{2} - 3 \leq x \leq y + 1\}$.

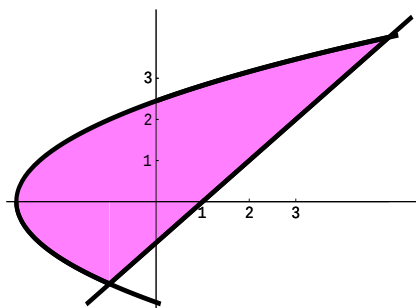


Figura 6.18: Região de tipo II.

[5] Seja D a região limitada pela curva $x^2 + y^2 = 1$; esta região é do tipo III. De fato:

De tipo I: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 1, \phi_1(x) = -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \phi_2(x) = \sqrt{1-x^2}\}$. De tipo II: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq y \leq 1, \psi_1(y) = -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \psi_2(y) = \sqrt{1-y^2}\}$.

6.6 Extensão da Integral Dupla

Seja D uma região elementar tal que $D \subset R$, onde R é um retângulo e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua (logo limitada). Definamos $f^* : R \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in D \\ 0 & \text{se } (x, y) \in R - D. \end{cases}$$

f^* é limitada e contínua, exceto, possivelmente, em ∂D ; mas se ∂D consiste de uma união finita de curvas que são gráficos de funções contínuas, pelo teorema 6.1, f^* é integrável sobre R .

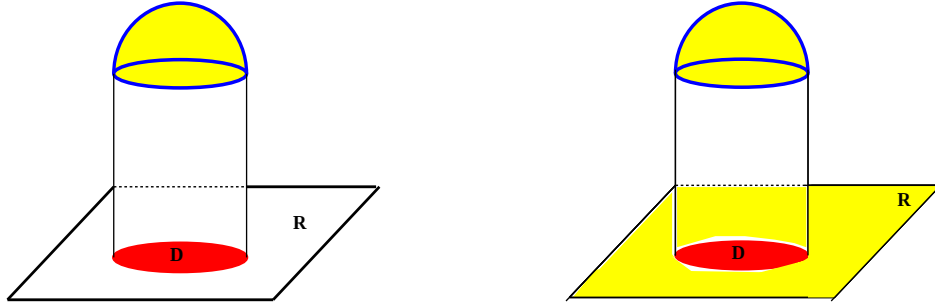


Figura 6.19: Gráficos de f e f^* , respectivamente.

Definição 6.3. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável sobre D se f^* é integrável sobre R e em tal caso definimos:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R f^*(x, y) dx dy.$$

Se R_1 é outro retângulo tal que $D \subset R_1$ e $f_1^* : R_1 \rightarrow \mathbb{R}$ é definida como antes, então:

$$\iint_R f^*(x, y) dx dy = \iint_{R_1} f_1^*(x, y) dx dy,$$

pois $f^* = f_1^* = 0$ onde R e R_1 diferem.

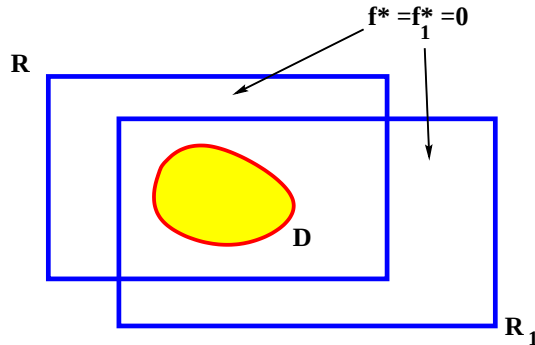


Figura 6.20:

Logo, $\iint_D f(x, y) dx dy$ não depende da escolha do retângulo.

6.7 Integral Dupla e Volume de Sólidos

Proposição 6.2. Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada sobre D , então:

1. Se D é uma região de tipo I:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

2. Se D é uma região de tipo II:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

Para a prova, veja o apêndice.

Corolário 6.4. Se $f(x, y) = 1$ em todo D , então:

$$\iint_D dx dy = \text{Área}(D)$$

De fato, se D é de tipo I, temos $\iint_D dx dy = \int_a^b [\phi_2(x) - \phi_1(x)] dx = A(D)$.

Se $f(x, y) \geq 0$ e é contínua em D , podemos novamente interpretar a integral dupla de f sobre D como o volume do sólido W limitado superiormente pelo gráfico de f e inferiormente por D .

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

D é a projeção de W sobre o plano xy e:

$$V(W) = \iint_D f(x, y) dx dy$$

6.7.1 Exemplos

[1] Calcule $\int_0^1 \left[\int_y^1 e^{x^2} dx \right] dy$. A integral não pode ser calculada na ordem dada. Observe que:

$$\iint_D e^{x^2} dx dy = \int_0^1 \left[\int_y^1 e^{x^2} dx \right] dy.$$

A região D , onde está definida a integral, é de tipo II: $0 \leq y \leq 1$ e $y \leq x \leq 1$.

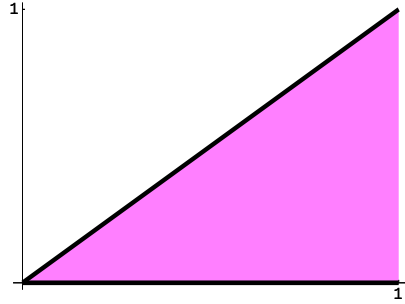


Figura 6.21: A região D .

A região D é de tipo III; logo, D também é de tipo I. De fato: $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq x$ e:

$$\iint_D e^{x^2} dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^x e^{x^2} dy \right] dx = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}(e - 1).$$

[2] Calcule $\int_0^1 \left[\int_x^1 \frac{\text{sen}(y)}{y} dy \right] dx$.

A região D , onde está definida a integral é de tipo I: $0 \leq x \leq 1$ e $x \leq y \leq 1$. Por outro lado, D é de tipo III, logo D também é de tipo II: $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq x \leq y$:

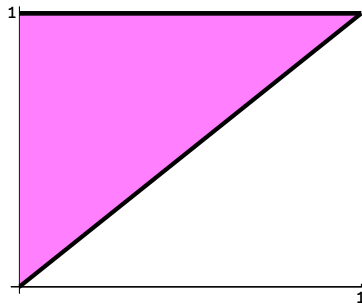
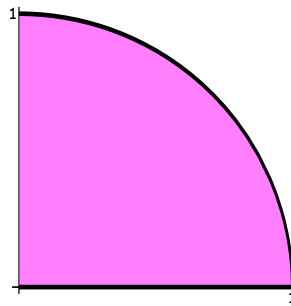


Figura 6.22: A região D .

$$\int_0^1 \left[\int_x^1 \frac{\text{sen}(y)}{y} dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^y \frac{\text{sen}(y)}{y} dx \right] dy = \int_0^1 \text{sen}(y) dy = 1 - \cos(1).$$

[3] Calcule $\iint_D \sqrt{1-y^2} dx dy$, onde D é a região limitada por $x^2 + y^2 = 1$ no primeiro quadrante.

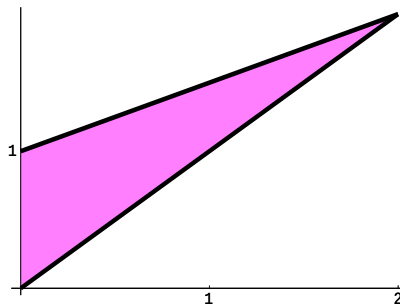
Figura 6.23: A região D .

Consideramos D como região de tipo II. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$. Pela proposição:

$$\iint_D \sqrt{1-y^2} \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2} \, dx \right] dy = \int_0^1 (1-y^2) \, dy = \frac{2}{3}.$$

Note que se escrevemos D como região de tipo I, a integração é muito mais complicada.

[4] Calcule $\iint_D (x+y)^2 \, dx \, dy$, se D é a região limitada por $y = x$, $2y = x+2$ e o eixo dos y .

Figura 6.24: A região D .

As retas se intersectam no ponto $(2, 2)$. Escrevendo D como região de tipo I: $0 \leq x \leq 2$, $x \leq y \leq \frac{x}{2} + 1$.

$$\iint_D (x+y)^2 \, dx \, dy = \int_0^2 \left[\int_x^{\frac{x}{2}+1} (x+y)^2 \, dy \right] dx = \frac{1}{3} \int_0^2 \left(\left(\frac{3x}{2} + 1 \right)^3 - 8x^3 \right) dx = \frac{21}{6}.$$

[5] Determine o volume do sólido limitado por $y - x + z = 1$ e pelos planos coordenados.

Para ter uma visão geométrica do problema, fazemos o desenho do sólido, que é limitado superiormente pelo plano que passa pelos pontos $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0)$ e inferiormente pelo plano $z = 0$.

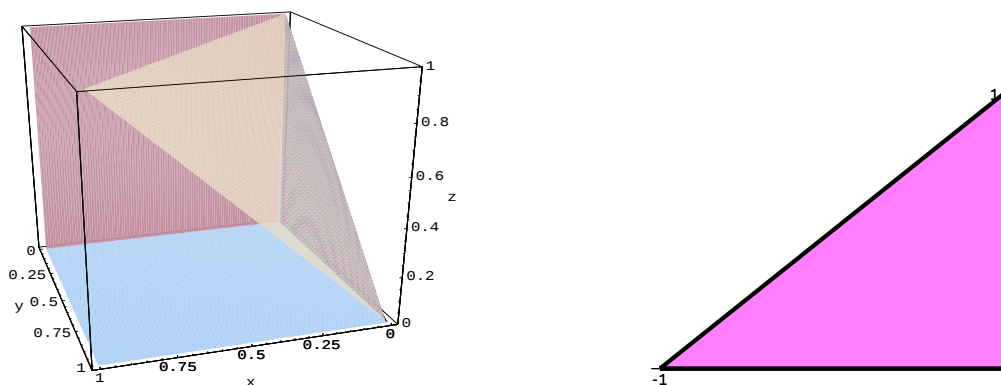


Figura 6.25: O sólido e a região, respectivamente.

A integral dupla representa o volume do sólido limitado superiormente pelo gráfico da função $z = f(x, y) = 1 + x - y$ e, inferiormente pela região D projeção de W no plano xy .

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in D, \quad 0 \leq z \leq 1 + x - y\},$$

onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq x + 1\}$ é região do tipo I. Seu volume é:

$$V(W) = \iint_D (1 + x - y) dx dy = \int_{-1}^0 \left[\int_0^{x+1} (1 + x - y) dy \right] dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (x + 1)^2 dx = \frac{1}{6} u.v.$$

[6] Determine o volume do sólido limitado por $z = 2x + 1$, $x = y^2$ e $x - y = 2$.

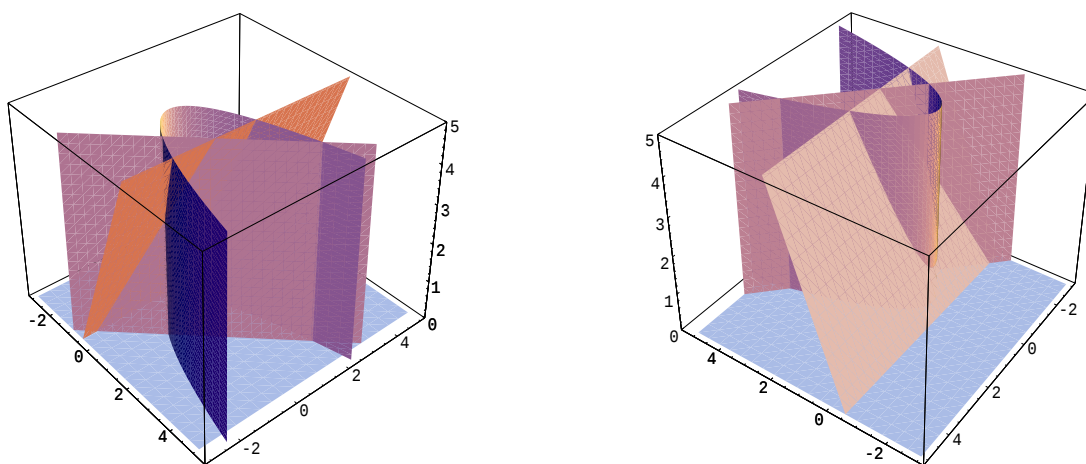
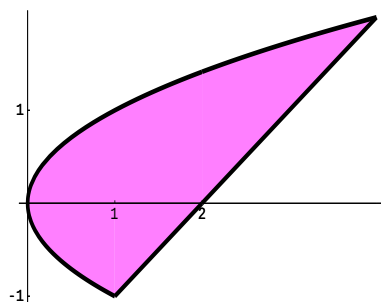


Figura 6.26: O sólido do exemplo [6].

Figura 6.27: A região D .

Observe que $z = f(x, y) = 2x + 1$ e

$$V(W) = \iint_D (2x + 1) dx dy,$$

onde D é a projeção do sólido no plano xy . Considerando D como região do tipo II, ela é definida por:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq y + 2\}.$$

O volume é:

$$V(W) = \iint_D (2x + 1) dx dy = \int_{-1}^2 \left[\int_{y^2}^{y+2} (2x + 1) dx \right] dy = \int_{-1}^2 (5y + 6 - y^4) dy = \frac{189}{10} u.v.$$

[7] Calcule o volume do sólido que está acima do plano xy e é limitado por $z = x^2 + 4y^2$ e $x^2 + 4y^2 = 4$.

O gráfico de $z = x^2 + 4y^2$ é um parabolóide elítico e o de $x^2 + 4y^2 = 4$ é um cilindro elítico.

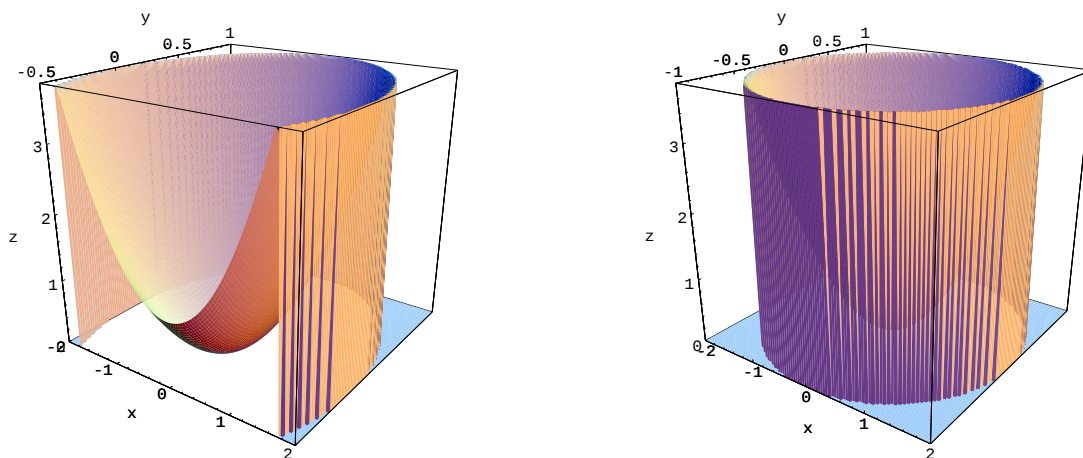


Figura 6.28: O sólido do exemplo [7].

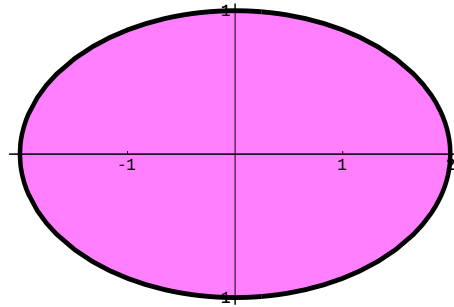
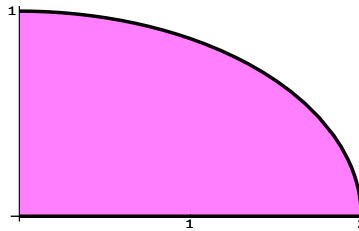


Figura 6.29: A região do exemplo [7].

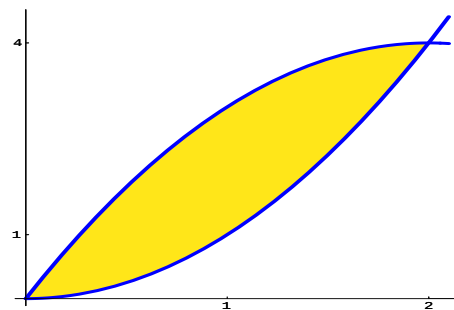
Pela simetria do sólido, calculamos o volume no primeiro octante e multiplicamos o resultado por 4.

Figura 6.30: A região D .

D é a projeção do cilindro no plano xy . D é do tipo I: $0 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$ e,

$$\begin{aligned} V &= 4 \iint_D (x^2 + 4y^2) dx dy = 4 \int_0^2 \left[\int_0^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} (x^2 + 4y^2) dy \right] dx \\ &= 2 \int_0^2 \left(x^2 \sqrt{4-x^2} + \frac{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) dx = 4\pi u.v. \end{aligned}$$

[8] Calcule a área da região plana limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4x - x^2$. Os pontos de interseção das curvas são: $(0, 0)$ e $(2, 4)$.

Figura 6.31: A região D .

D é do tipo I: $0 \leq x \leq 2$ e $x^2 \leq y \leq 4x - x^2$.

$$A = \iint_D dx dy = \int_0^2 \left[\int_{x^2}^{4x-x^2} dy \right] dx = 2 \int_0^2 (2x - x^2) dx = \frac{8}{3} u.a.$$

[9] Calcule o volume do sólido obtido pela interseção dos cilindros: $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + z^2 = a^2$, $a \neq 0$.

O sólido é simétrico em relação à origem.

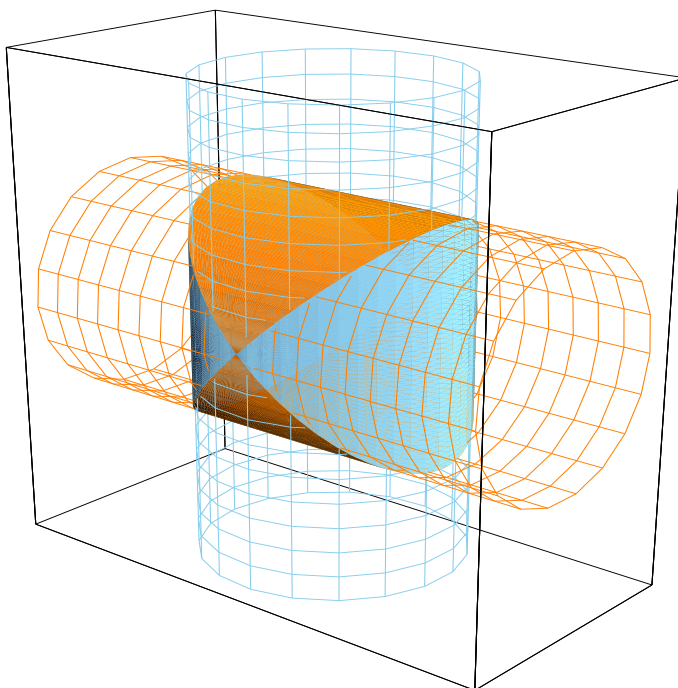


Figura 6.32: Interseção dos cilindros.

Calculamos o volume da porção do sólido no primeiro octante e multiplicamos o resultado por 8.

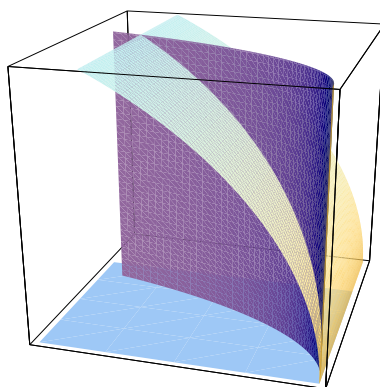


Figura 6.33: O sólido no primeiro octante.

Claramente D é região do tipo I: $0 \leq x \leq a$ e $0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}$. A altura do sólido W é dada por $z = f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2}$ e:

$$\begin{aligned} V &= 8 \iint_D \sqrt{a^2 - x^2} dx dy \\ &= 8 \int_0^a \left[\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2} dy \right] dx \\ &= 8 \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{16 a^3}{3}. \end{aligned}$$

[10] Calcule o volume do sólido limitado por $3x + 4y = 10$, $z = x^2 + y^2$ e situado acima do plano xy , no primeiro octante.

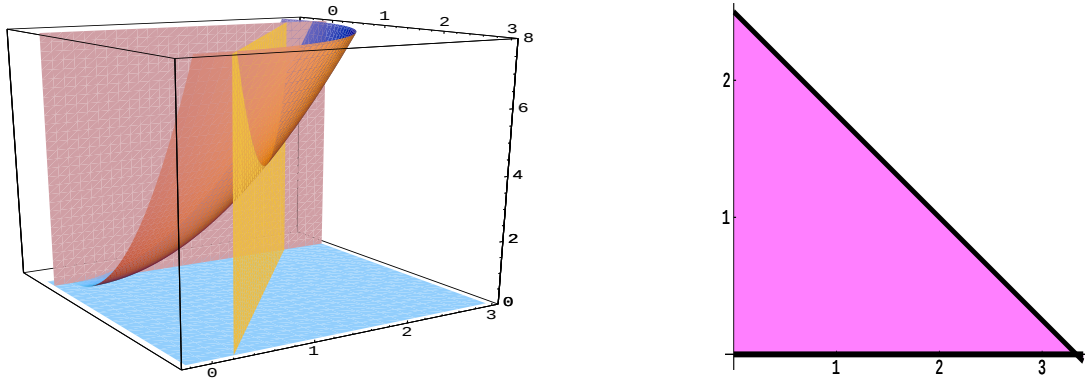


Figura 6.34: Sólido e região do exemplo [10], respectivamente.

D é uma região do tipo II: $0 \leq y \leq \frac{5}{2}$ e $0 \leq x \leq \frac{10-4y}{3}$; logo:

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{\frac{5}{2}} \left[\int_0^{\frac{10-4y}{3}} (x^2 + y^2) dx \right] dy \\ &= -\frac{2}{81} \int_0^{\frac{5}{2}} (2y - 5) (43y^2 - 80y + 100) dy \\ &= -\frac{2}{81} \int_0^{\frac{5}{2}} (86y^3 - 375y^2 + 600y - 500) dy = \frac{15625}{1296} u.v. \end{aligned}$$

[11] Calcule o volume do sólido limitado por $z - xy = 0$, $z = 0$, $y = x^2$ e $y^2 - x = 0$.

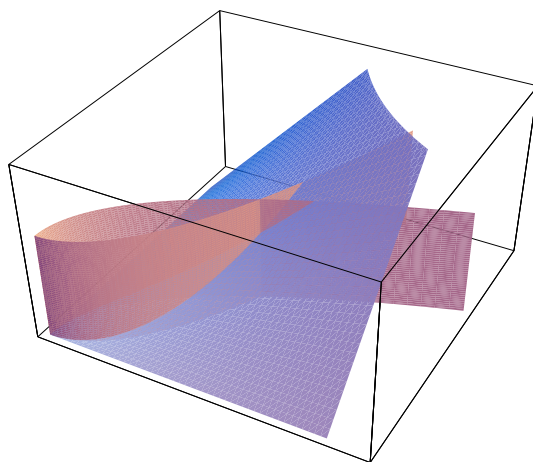
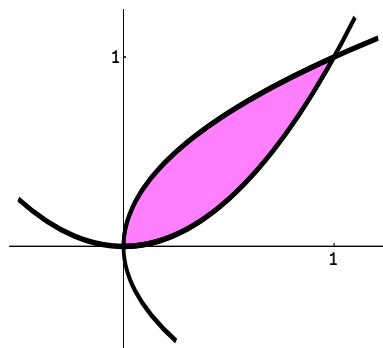


Figura 6.35: Sólido do exemplo [11].

D é uma região do tipo I: $0 \leq x \leq 1$ e $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$,

Figura 6.36: Região D .

$$\text{logo } V = \iint_D x y \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x y \, dy \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - x^5) \, dx = \frac{1}{12} u.v.$$

Capítulo 7

Mudança de Coordenadas

7.1 Introdução

Seja $D^* \subset \mathbb{R}^2$ uma região elementar no plano uv e:

$$x, y : D^* \longrightarrow \mathbb{R},$$

onde $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ são funções contínuas e com derivadas parciais contínuas num retângulo aberto R tal que $D^* \subset R$. Estas duas funções determinam uma transformação do plano uv no plano xy . De fato, $T : D^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$. A transformação T é também denotada por:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), \quad (u, v) \in D^*. \end{cases}$$

Denotemos a imagem de D^* por T como $D = T(D^*)$, contida no plano xy .

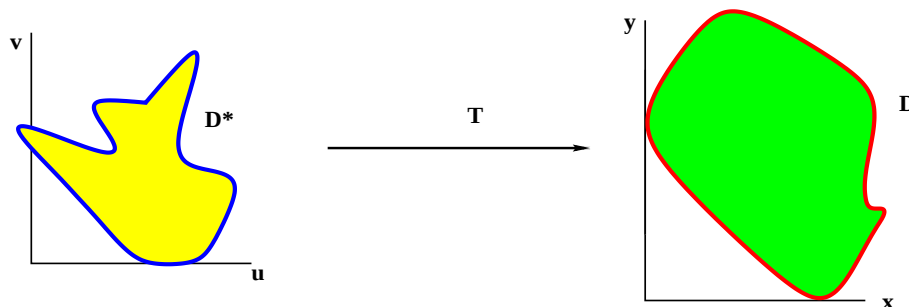


Figura 7.1: Mudança de coordenadas.

Exemplo 7.1.

Seja $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ e $T(r, t) = (r \cos(t), r \sin(t))$, Determinemos $D = T(D^*)$ no plano xy .

$$\begin{cases} x = r \cos(t) \\ y = r \sin(t); \end{cases}$$

logo: $x^2 + y^2 = r^2 \leq 1$; então $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$.

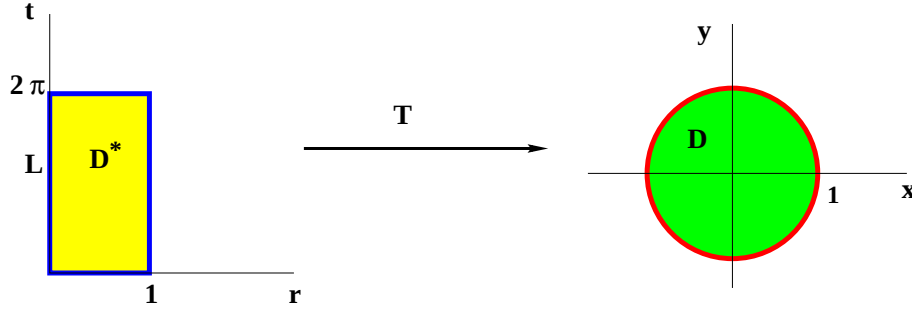


Figura 7.2:

Definição 7.1. Uma transformação T é **injetiva** em D^* se $T(u_1, v_1) = T(u_2, v_2)$ implica em $u_1 = u_2$ e $v_1 = v_2$, para todo par de elementos $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in D^*$.

No exemplo 7.1, temos que $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ e $T(r, t) = (r \cos(t), r \sin(t))$. A transformação T não é injetiva: De fato, $T(0, t_1) = T(0, t_2) = (0, 0)$ para $t_1 \neq t_2$. Observe que $T(L) = (0, 0)$, onde $L = \{(0, t) / 0 \leq t \leq 2\pi\}$. Mas se $D^* = (0, 1] \times (0, 2\pi]$, T é injetiva.

Seja $T : D^* \rightarrow D$ uma transformação definida por:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), \quad (u, v) \in D^*. \end{cases}$$

Considere a seguinte matriz:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

onde as derivadas parciais são calculadas nos pontos $(u, v) \in D^*$. J é chamada matriz Jacobiana (de Jacobi) da transformação T .

Definição 7.2. O determinante da matriz J , dito **jacobiano** de T , é denotado e definido por:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det(J) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

onde as derivadas parciais são calculadas nos pontos $(u, v) \in D^*$.

A importância da matriz Jacobiana de uma transformação deverá ser estudada com mais rigor, em disciplinas mais avançadas. Por enquanto citaremos a seguinte proposição, sem prova:

Proposição 7.1. Se $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$, no ponto $(u_0, v_0) \in D^*$, então existe uma vizinhança do ponto (u_0, v_0) tal que a restrição de T a esta vizinhança é injetiva.

Exemplo 7.2.

[1] No exemplo 7.1, temos que $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ e $T(r, t) = (r \cos(t), r \sin(t))$. Logo,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, t)} = r.$$

Note que para todo $(r, t) \in L$ temos $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, t)} = 0$.

[2] Seja o quadrado $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$ e $T(u, v) = (u + v, u - v)$.

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v. \end{cases}$$

Se $u = 0$, então $y = -x$; se $v = 0$, então $y = x$, se $u = 1$, então $y = 2 - x$ e se $v = 1$, então $y = x - 2$. A região $D = T(D^*)$ é a região do plano xy limitada pelas curvas $y = x$, $y = -x$, $y = x - 2$ e $y = 2 - x$. O jacobiano $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -2$.

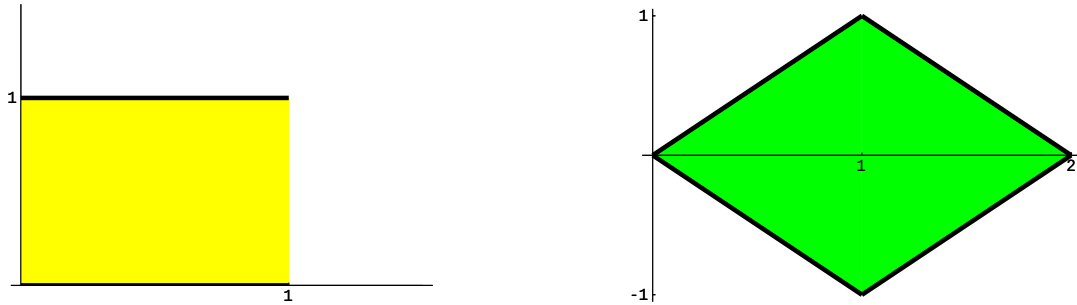


Figura 7.3: Regiões D^* e D , respectivamente.

[3] Seja D^* a região limitada pelas curvas $u^2 - v^2 = 1$, $u^2 - v^2 = 9$, $uv = 1$ e $uv = 4$ no primeiro quadrante, sendo $T(u, v) = (u^2 - v^2, uv)$. Determinemos $T(D^*) = D$, fazendo:

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = uv; \end{cases}$$

se $u^2 - v^2 = 1$, então $x = 1$; se $u^2 - v^2 = 9$, então $x = 9$, se $uv = 1$, então $y = 1$ e se $uv = 4$, então $y = 4$

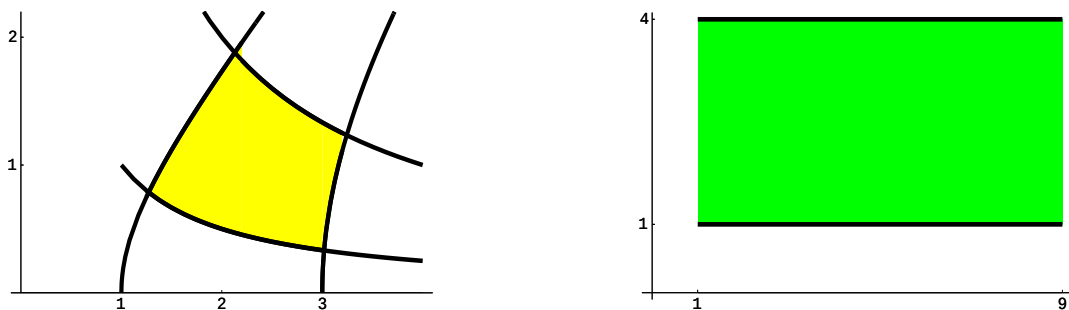


Figura 7.4: Regiões D^* e D , respectivamente.

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 2(u^2 + v^2)$, que não se anula em D^* . Logo T é injetiva.

Teorema 7.1. *Sejam D e D^* regiões elementares no plano, T uma transformação de classe C^1 e injetiva em D^* . Suponha que $T(D^*) = D$. Então, para toda função integrável f sobre D temos:*

$$\boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(u, v) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv}$$

onde $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$ é o valor absoluto do determinante Jacobiano e $f(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$. Em particular a área de D é:

$$\boxed{A(D) = \iint_D dx dy = \iint_{D^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv}$$

É possível mostrar que o teorema anterior é ainda válido se T não é injetiva num subconjunto de conteúdo nulo de D^* , como no caso de L , no exemplo 1.

Observe que podemos ir do plano uv ao plano xy e vice-versa, pois T é bijetiva.

7.2 Mudança Linear de Coordenadas

Consideremos a seguinte transformação:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x(u, v) = a_1 u + b_1 v \\ y &= y(u, v) = a_2 u + b_2 v \end{aligned}}$$

onde $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$. Como $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$, do teorema anterior, segue:

Corolário 7.2. *Se $f(u, v) = f(a_1 u + b_1 v, a_2 u + b_2 v)$, então:*

$$\boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = |a_1 b_2 - a_2 b_1| \iint_{D^*} f(u, v) du dv}$$

Em particular, a área de D é:

$$\boxed{A(D) = |a_1 b_2 - a_2 b_1| A(D^*)}$$

Note que:

$$\begin{cases} u = u(x, y) = \frac{b_2 x - b_1 y}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \\ v = v(x, y) = \frac{-a_2 x + a_1 y}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \end{cases}$$

e que $\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|^{-1}$.

Exemplo 7.3.

[1] Calcule $\iint_D xy \, dx \, dy$, onde D é a região limitada pelas curvas $y = 2x$, $y = x$, $y = 2x - 2$ e $y = x + 1$.

Mudamos para o plano uv fazendo:

$$\begin{cases} x &= u - v \\ y &= 2u - v. \end{cases}$$

A nova região D^* é limitada pelas seguintes curvas: $v = 0$, $v = -2$, $u = 0$ e $u = 1$.

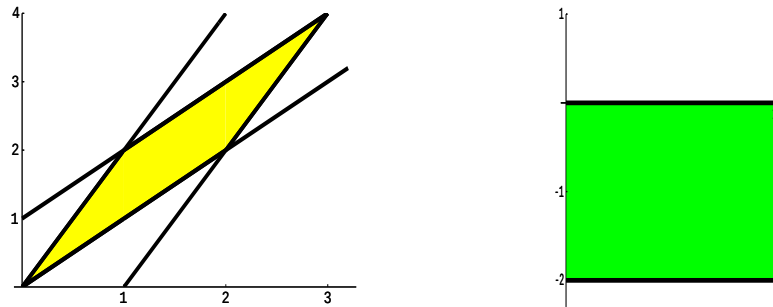


Figura 7.5: Regiões D^* e D , respectivamente.

$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = 1$ e $f(u,v) = (u-v)(2u-v) = 2u^2 - 3uv + v^2$. Então:

$$\iint_D xy \, dx \, dy = \int_0^1 \left[\int_{-2}^0 (2u^2 - 3uv + v^2) \, dv \right] du = 7.$$

[2] Calcule $\iint_D e^{\frac{y-x}{x+y}} \, dx \, dy$, onde D é a região limitada pela curva $y + x = 2$ e pelos eixos coordenados.

A presença dos termos $x + y$ e $x - y$ sugerem a seguinte mudança:

$$\begin{cases} u &= x + y \\ v &= y - x. \end{cases}$$

D é limitada pelas curvas $x = 0$, $y = 0$ e $x + y = 2$; então, D^* é limitada pelas curvas $u = v$, $u = -v$ e $u = 2$, respectivamente.

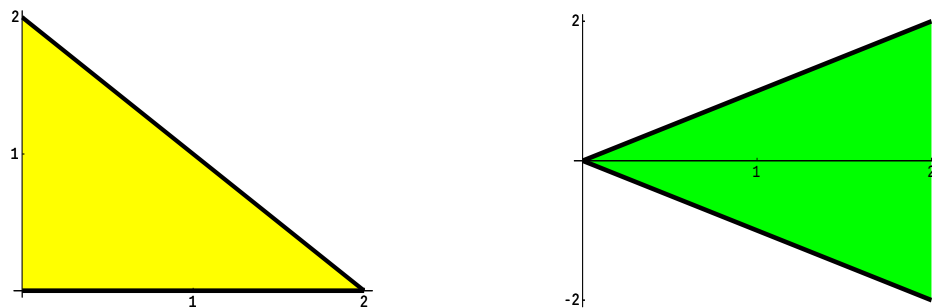


Figura 7.6: Regiões D^* e D , respectivamente.

$\left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| = 2$ e $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \frac{1}{2}$, $f(u,v) = e^{\frac{v}{u}}$; então:

$$\begin{aligned} \iint_D e^{\frac{y-x}{x+y}} dx dy &= \frac{1}{2} \iint_{D^*} e^{\frac{v}{u}} du dv = \frac{1}{2} \int_0^2 \left[\int_{-u}^u e^{\frac{v}{u}} dv \right] du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 u e^{\frac{v}{u}} \Big|_{v=-u}^{v=u} du = \frac{e - e^{-1}}{2} \int_0^2 u du \\ &= e - e^{-1}. \end{aligned}$$

[3] Determine a área da região D limitada pela curva fechada $(2x - 4y + 7)^2 + (x - 5y)^2 = 16$. Considere a mudança:

$$\begin{cases} u = 2x - 4y + 7 \\ v = x - 5y. \end{cases}$$

D^* é a região limitada pela curva $u^2 + v^2 = 16$ que é um círculo centrado na origem e de raio 4.

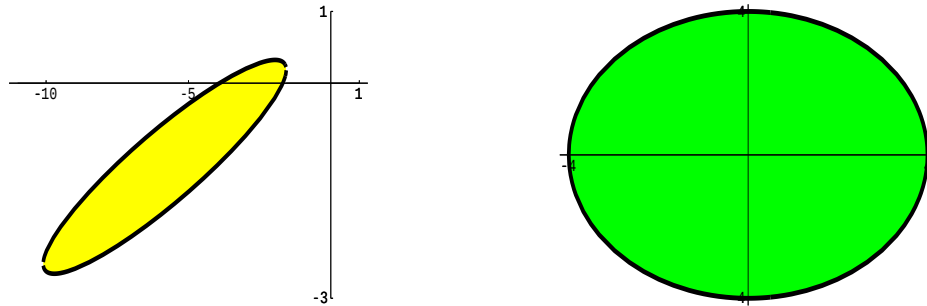


Figura 7.7: Regiões D^* e D , respectivamente.

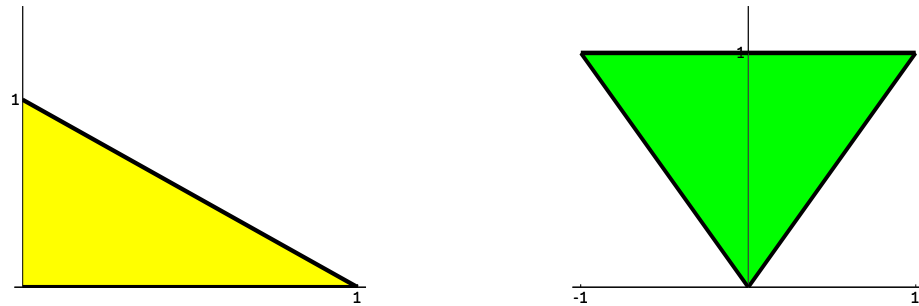
$\left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| = 6$; então $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \frac{1}{6}$ e:

$$A(D) = \frac{1}{6} \iint_{D^*} du dv = \frac{1}{6} A(D^*) = \frac{8}{3} \pi u.a.$$

[4] Calcule $\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy$, onde D é a região limitada pela curva $y + x = 1$ e pelos eixos coordenados.

A presença dos termos $x + y$ e $x - y$ sugerem a seguinte mudança:

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y. \end{cases}$$

Figura 7.8: Regiões D^* e D , respectivamente.

D^* é a região limitada pelas seguintes curvas: $u = v$, $u = -v$ e $v = 1$, $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \frac{1}{2}$ e $f(u, v) = \cos\left(\frac{u}{v}\right)$; então:

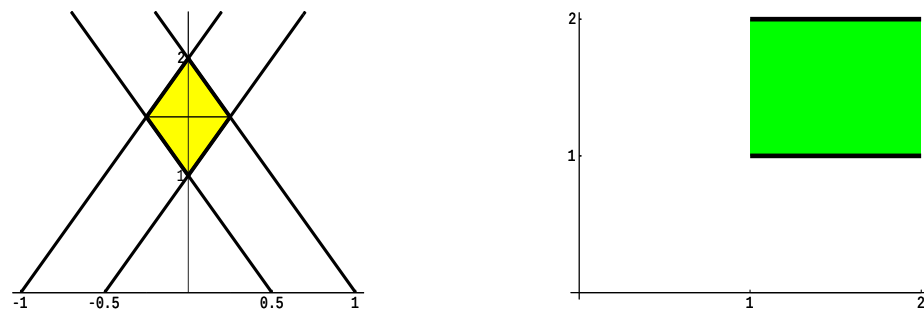
$$\begin{aligned} \iint_D \cos\left(\frac{y-x}{x+y}\right) dx dy &= \frac{1}{2} \iint_{D^*} \cos\left(\frac{u}{v}\right) du dv = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{-v}^v \cos\left(\frac{u}{v}\right) du \right) dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 v (\text{sen}(1) - \text{sen}(-1)) dv = \text{sen}(1) \int_0^1 v dv \\ &= \frac{\text{sen}(1)}{2}. \end{aligned}$$

[5] Calcule $\iint_D \frac{y+2x}{(y-2x)^2} dx dy$, onde D é a região limitada pelas curvas $y-2x=2$, $y+2x=2$, $y-2x=1$ e $y+2x=1$.

A presença dos termos $y+2x$ e $y-2x$ sugerem a seguinte mudança:

$$\begin{cases} u &= y + 2x \\ v &= y - 2x. \end{cases}$$

D^* é a região limitada pelas seguintes curvas: $u = 1$, $u = 2$, $v = 1$ e $v = 2$.

Figura 7.9: Regiões D^* e D , respectivamente.

$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \frac{1}{4}$ e $f(u, v) = \frac{u}{v^2}$; então:

$$\iint_D \frac{y+2x}{(y-2x)^2} dx dy = \frac{1}{4} \iint_{D^*} \frac{u}{v^2} du dv = \frac{1}{4} \int_1^2 \left[\int_1^2 \frac{u}{v^2} du \right] dv = \frac{3}{16}.$$

7.3 Mudança Polar de Coordenadas

Um ponto $P = (x, y)$ em coordenadas retangulares tem coordenadas polares (r, θ) onde r é a distância da origem a P e θ é o ângulo formado pelo eixo dos x e o segmento de reta que liga a origem a P .

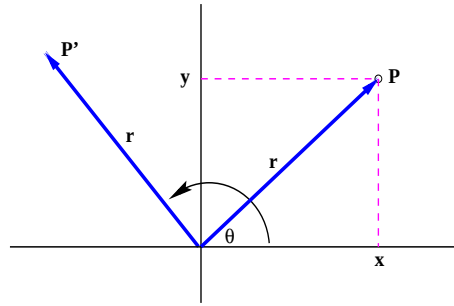


Figura 7.10: Mudança polar de coordenadas.

A relação entre as coordenadas (x, y) e (r, θ) é dada por:

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$, $x \neq 0$.

Esta mudança é injetiva em $D^* = \{(r, \theta) / r > 0, \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi\}$, $\theta_0 = \text{constante}$. Note que a região circular $D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq a^2\}$ corresponde, em coordenadas polares, à região retangular $D^* = \{(r, \theta) / 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} = [0, a] \times [0, 2\pi]$.

Exemplo 7.4.

[1] A cardióide é uma curva de equação cartesiana $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} - y$; em coordenadas polares fica $r = 1 - \sin(\theta)$, $r \geq 0$.

[2] A lemniscata de Bernoulli é uma curva de equação cartesiana $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$; em coordenadas polares fica $r^2 = a^2 \cos(2\theta)$.

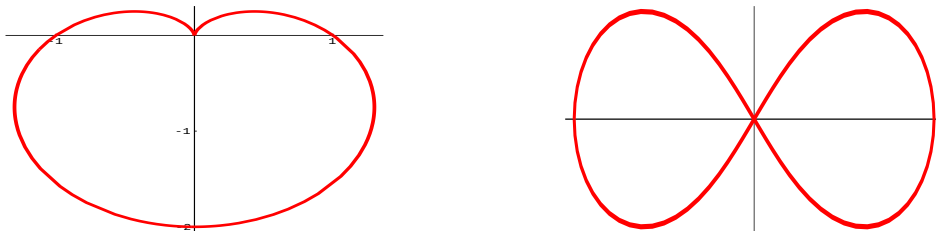


Figura 7.11: Cardióide e lemniscata, respectivamente.

[3] O cilindro circular reto de raio a , em coordenadas cartesianas é definido como o seguinte conjunto $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = a^2, a \geq 0\}$; em coordenadas polares:

$$C = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 / r = a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Calculemos o jacobiano da mudança de coordenadas polares: $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| = r > 0$. Do teorema anterior, segue:

Corolário 7.3. Se $f(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$, então:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} r f(r, \theta) dr d\theta$$

Esta igualdade ainda é válida se $D^* = \{(r, \theta) / r \geq 0, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi\}$.

Em particular a área de D é:

$$A(D) = \iint_D dx dy = \iint_{D^*} r dr d\theta$$

7.3.1 Regiões Limitadas por Círculos

Seja $a > 0$. A região D , limitada pelo círculo $x^2 + y^2 = a^2$, em coordenadas polares é dada por:

$$D^* = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

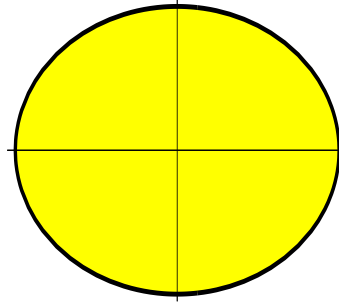


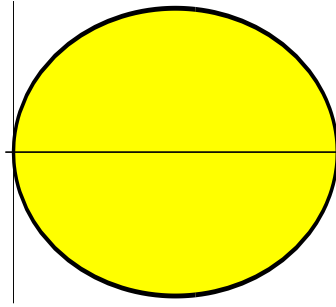
Figura 7.12: A região D .

Neste caso:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^a r f(r, \theta) dr \right] d\theta$$

A região D , limitada pelo círculo $(x - a)^2 + y^2 \leq a^2$, em coordenadas polares é:

$$D^* = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq r \leq 2a \cos(\theta), -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

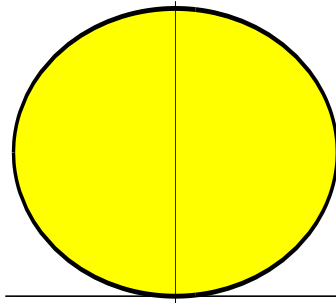
Figura 7.13: A região D .

Neste caso:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2a \cos(\theta)} r f(r, \theta) dr \right] d\theta$$

A região D , limitada pelo círculo $x^2 + (y - a)^2 \leq a^2$, em coordenadas polares é:

$$D^* = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq r \leq 2a \sin(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

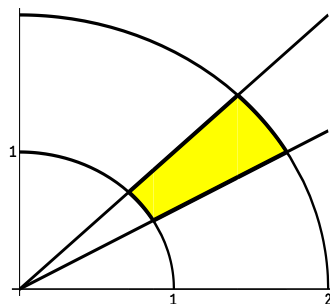
Figura 7.14: A região D .

Neste caso:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^\pi \left[\int_0^{2a \sin(\theta)} r f(r, \theta) dr \right] d\theta$$

Exemplo 7.5.

[1] Calcule $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, onde D é a região limitada pelas curvas $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $y = x$ e $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, no primeiro quadrante.

Figura 7.15: A região D .

Usando coordenadas polares, a nova região D^* no plano $r\theta$ é determinada por:

$$D^* = \{(r, \theta) / 1 \leq r \leq 2, \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}.$$

Como $x^2 + y^2 = r^2$, temos:

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \iint_{D^*} r^3 dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_1^2 r^3 dr \right] d\theta = \frac{5\pi}{16}.$$

[2] Calcule $\iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy$, onde D é a região limitada pelas curvas $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + y^2 = b^2$, ($0 < a < b$).

Usando coordenadas polares temos que D^* está determinada por: $a \leq r \leq b$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Por outro lado, $\ln(x^2 + y^2) = 2 \ln(r)$,

$$\begin{aligned} \iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy &= \iint_{D^*} 2r \ln(r) dr d\theta = 4\pi \int_a^b r \ln(r) dr = \pi (r^2 (2 \ln(r) - 1)) \Big|_a^b \\ &= \pi (2b^2 \ln(b) - 2a^2 \ln(a) + a^2 - b^2). \end{aligned}$$

[3] Determine o volume do sólido situado acima do plano xy e limitado pelos gráficos de $z = x^2 + y^2$ e $x^2 + y^2 = 2y$.

O gráfico de $z = x^2 + y^2$ é um parabolóide centrado na origem e o de $x^2 + y^2 = 2y$ é um cilindro circular reto centrado em $(0, 1, 0)$ e de raio 1, pois, $x^2 + y^2 - 2y = x^2 + (y - 1)^2 - 1$.

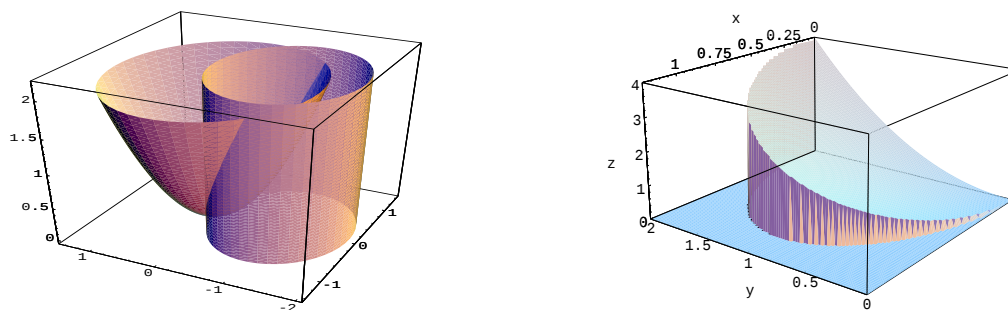


Figura 7.16: O sólido do exemplo [3].

Logo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$, em coordenadas polares é:

$$D^* = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq r \leq 2 \operatorname{sen}(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

O sólido W é limitado superiormente pelo parabolóide. $V = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$. Utilizando coordenadas polares temos $x^2 + y^2 = r^2$ e:

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \iint_{D^*} r^3 dr d\theta = \int_0^\pi \left[\int_0^{2 \operatorname{sen}(\theta)} r^3 dr \right] d\theta = 4 \int_0^\pi \operatorname{sen}^4(\theta) d\theta \\ &= -\operatorname{sen}^3(\theta) \cos(\theta) - \frac{3}{2} \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + \frac{3\theta}{2} \Big|_0^\pi = \frac{3\pi}{2} u.v. \end{aligned}$$

[4] Calcule o volume do sólido limitado externamente por $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ e internamente por $x^2 + y^2 = 9$.

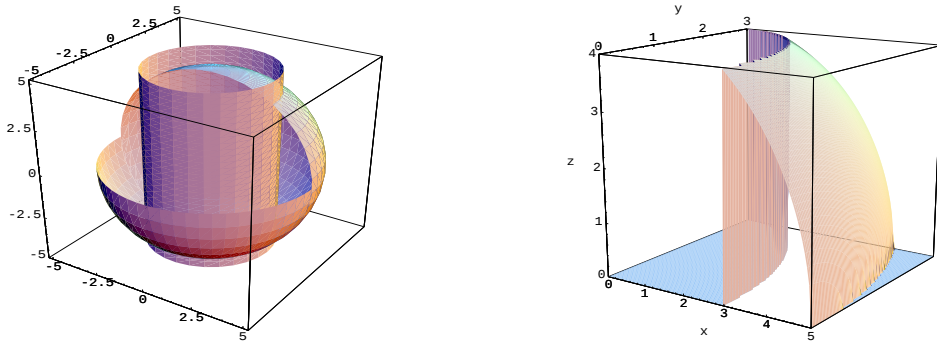


Figura 7.17: O sólido do exemplo [4].

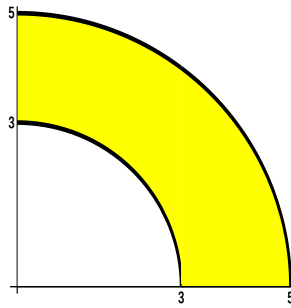


Figura 7.18: A região D .

Pela simetria do sólido, calculamos o volume no primeiro octante e multiplicamos o resultado por 8.

$$V = 8 \iint_D \sqrt{25 - x^2 - y^2} dx dy,$$

onde D é a projeção do sólido no plano xy . Usando coordenadas polares obtemos a nova região D^* definida por: $3 \leq r \leq 5$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $\sqrt{25 - x^2 - y^2} = \sqrt{25 - r^2}$:

$$V = 8 \iint_D \sqrt{25 - x^2 - y^2} dx dy = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_3^5 r \sqrt{25 - r^2} dr \right] d\theta = \frac{256\pi}{3} u.v.$$

[5] Calcule o volume do sólido limitado pelo elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; $a, b, c \neq 0$. Pela simetria do sólido calculamos o volume relativo ao primeiro octante; logo:

$$V = 8c \iint_D \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy.$$

A região D é limitada pela porção de elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ no primeiro quadrante. Usemos primeiramente a seguinte mudança:

$$\begin{cases} x = au \\ y = bv; \end{cases}$$

o determinante Jacobiano da mudança é ab e D^* é limitada por $u^2 + v^2 = 1$. Temos:

$$V = 8c \iint_D \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy = 8abc \iint_{D^*} \sqrt{1 - u^2 - v^2} du dv.$$

Agora, usamos coordenadas polares:

$$\begin{cases} u = r \cos(\theta) \\ v = r \sin(\theta). \end{cases}$$

O determinante Jacobiano é r ; $\sqrt{1 - u^2 - v^2} = \sqrt{1 - r^2}$ e a nova região D^{**} é definida por $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$:

$$V = 8abc \iint_{D^{**}} r \sqrt{1 - r^2} dr d\theta = \frac{4abc\pi}{3} u.v.$$

Em particular, se $a = b = c$ temos uma esfera de raio a e $V = \frac{4\pi a^3}{3} u.v.$

[6] Calcule $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Esta integral é muito utilizada em Estatística. Seja $R = [-a, a] \times [-a, a]$. Então:

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{-a}^a \left[\int_{-a}^a e^{-x^2} e^{-y^2} dy \right] dx = \left[\int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right] \left[\int_{-a}^a e^{-y^2} dy \right].$$

O gráfico de $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ é:

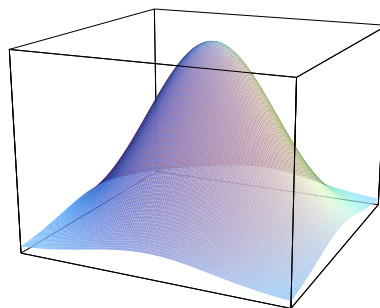


Figura 7.19:

Se denotamos por $L(a) = \int_{-a}^a e^{-u^2} du = 2 \int_0^a e^{-u^2} du$, temos:

$$L^2(a) = \iint_R e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Sejam D e D_1 regiões elementares tais que $D \subset R \subset D_1$ onde D é a região limitada pelo círculo inscrito em R e D_1 é a região limitada pelo círculo circunscrito a R :

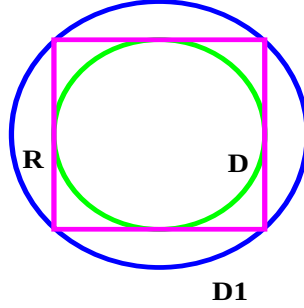


Figura 7.20:

Como $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ é contínua em D_1 e $e^{-(x^2+y^2)} > 0$, para todo x, y ,

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq L^2(a) \leq \iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Usando coordenadas polares, D é definida por $0 \leq r \leq a$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, D_1 é definida por $0 \leq r \leq \sqrt{2}a$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$; $e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}$ e:

$$\int_0^{2\pi} \left[\int_0^a r e^{-r^2} dr \right] d\theta = \pi (1 - e^{-a^2});$$

então,

$$\sqrt{\pi (1 - e^{-a^2})} \leq L(a) \leq \sqrt{\pi (1 - e^{-2a^2})}.$$

Como $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a e^{-u^2} du = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$, temos:

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

[7] Se $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq (x - y)^2 + (x + y)^2 \leq 4, y \leq 0, x + y \geq 0\}$, calcule:

$$\iint_D \frac{e^{\frac{x+y}{x-y}}}{(x-y)^2} dx dy.$$

Usamos mudança linear:

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y. \end{cases}$$

Logo, a nova região D^* é limitada pelas curvas $u^2 + v^2 = 1$, $u^2 + v^2 = 4$, $v \leq u$ e $0 \leq v$:

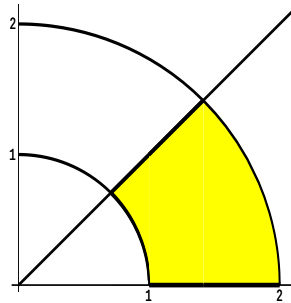


Figura 7.21: Região D .

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 2 \text{ então } \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2} \text{ e}$$

$$\iint_D \frac{e^{\frac{x+y}{x-y}}}{(x-y)^2} dx dy = \frac{1}{2} \iint_{D^*} \frac{e^{\frac{v}{u}}}{u^2} du dv.$$

Usando coordenadas polares obtemos a região D^{**} definida por: $1 \leq r \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$:

$$\frac{1}{2} \iint_{D^*} \frac{e^{\frac{v}{u}}}{u^2} du dv = \frac{1}{2} \iint_{D^{**}} \frac{r e^{tg(\theta)}}{r^2 \cos^2(\theta)} dr d\theta = \frac{\ln(2)}{2} (e - 1).$$

7.3.2 Aplicação

Seja D região do tipo II, limitada por curvas de equações (em forma polar): $r = g(\theta)$ e $r = h(\theta)$ e definida por:

$$D = \{(r, \theta) / g(\theta) \leq r \leq h(\theta), \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\},$$

onde $g, h : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas tais que $0 \leq g(\theta) \leq h(\theta)$.

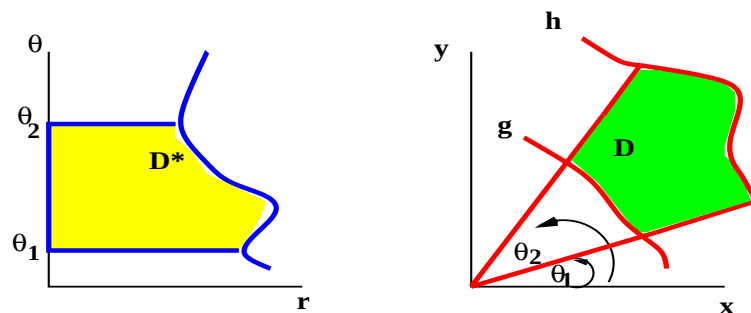


Figura 7.22:

Então:

$$\boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\int_{g(\theta_1)}^{h(\theta_2)} r f(r, \theta) dr \right] d\theta}$$

Em particular, a área de D é:

$$A(D) = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[(h(\theta))^2 - (g(\theta))^2 \right] d\theta$$

Exemplo 7.6.

[1] Calcule o volume do sólido limitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo cilindro $r = 4 \operatorname{sen}(\theta)$, no primeiro octante.

Usando coordenadas polares temos que o cone escreve-se $z = r$; no plano $r \theta$ o cilindro projeta-se no círculo $r = 4 \operatorname{sen}(\theta)$; logo $0 \leq r \leq 4 \operatorname{sen}(\theta)$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

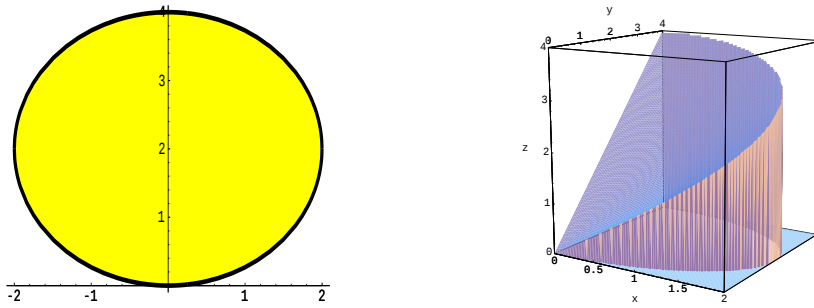


Figura 7.23:

$$V = \iint_{D^*} r^2 dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{4 \operatorname{sen}(\theta)} r^2 dr \right] d\theta = \frac{128}{9} u.v.$$

[2] Calcule a área da região limitada pelo interior do círculo $r = 4 \operatorname{sen}(\theta)$ e pelo exterior do círculo $r = 2$.

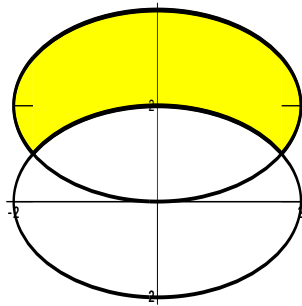


Figura 7.24:

Os círculos se intersectam em: $\theta = \frac{\pi}{6}$ e $\theta = \frac{5\pi}{6}$ e:

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (16 \operatorname{sen}^2(\theta) - 4) d\theta = \left(\frac{2\pi}{3} + 2\sqrt{3} \right) u.a.$$

[3] Calcule a área da região limitada por $r = 2(1 + \operatorname{sen}(\theta))$.

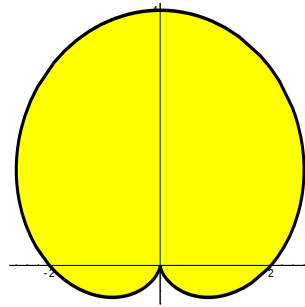


Figura 7.25:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi. \text{ Logo: } A(D) = 2 \int_0^{2\pi} (1 + \text{sen}(\theta))^2 d\theta = 6\pi \text{ u.a.}$$

[4] Calcule a área da região limitada por $r = \text{sen}(3\theta)$.

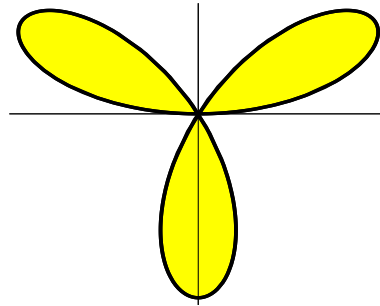


Figura 7.26:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi. \text{ Logo: } A(D) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(3\theta) d\theta = \frac{\pi}{2} \text{ u.a.}$$

7.4 Outras Aplicações da Integral Dupla

Como em uma variável, outras aplicações, além do cálculo de volumes, podem ser definidas através de integrais duplas, tais como, massa total, centro de massa e momento de inércia.

7.4.1 Massa Total

Suponha que uma lâmina fina tem a forma de uma região elementar D e consideremos que a massa está distribuída sobre D com densidade conhecida, isto é, existe uma função $z = f(x, y) > 0$ em D que representa a massa por unidade de área em cada ponto $(x, y) \in D$. Se a lâmina é feita de material homogêneo, a densidade é constante. Neste caso a massa total da lâmina é o produto da densidade pela área da lâmina. Quando a densidade f varia de ponto a ponto em D e f é uma função integrável sobre D , a massa total $M(D)$ de D é dada por:

$$M(D) = \iint_D f(x, y) dx dy$$

7.4.2 Momento de Massa

O momento de massa de uma partícula em torno de um eixo é o produto de sua massa pela distância (na perpendicular) ao eixo. Então, os momentos de massa da lâmina D em relação ao eixo dos x e dos y são respectivamente:

$$M_x = \iint_D y f(x, y) dx dy, \quad M_y = \iint_D x f(x, y) dx dy$$

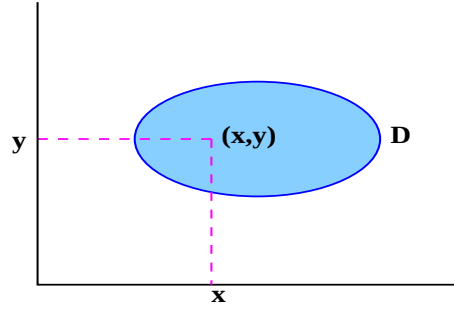


Figura 7.27:

7.4.3 Centro de Massa

O centro de massa da lâmina é definido por $(\bar{x}, \bar{y})$, onde:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M(D)}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M(D)}$$

Fisicamente $(\bar{x}, \bar{y})$ é o ponto em que a massa total da lâmina poderia estar concentrada sem alterar seu momento em relação a qualquer dos eixos. Se $f(x, y) = k$, ($k > 0$) em todo D , $(\bar{x}, \bar{y})$ é chamado centróide de D . Neste caso o centro de massa é o centro geométrico da região D .

Exemplo 7.7.

[1] Calcule o centro de massa do retângulo $[0, 1] \times [0, 1]$ se a densidade é dada pela função: $f(x, y) = e^{x+y}$. A massa total de $D = [0, 1] \times [0, 1]$ é:

$$M(D) = \int_0^1 \left[\int_0^1 e^{x+y} dx \right] dy = e^2 - 2e + 1.$$

Os momentos de massa respectivos são:

$$M_x = \int_0^1 \left[\int_0^1 y e^{x+y} dx \right] dy = e - 1 \quad \text{e} \quad M_y = \int_0^1 \left[\int_0^1 x e^{x+y} dx \right] dy = e - 1$$

e o centro de massa de D é $(\frac{1}{e-1}, \frac{1}{e-1})$.

[2] Determine o centro de massa da região limitada por um semicírculo D de raio a centrado na origem, sabendo que sua densidade em cada ponto é proporcional à distância do ponto à origem.

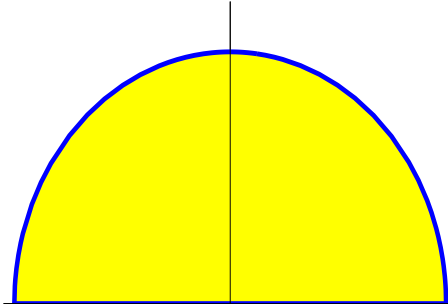


Figura 7.28:

$f(x, y) = k \sqrt{x^2 + y^2}$. Calculamos a massa total usando coordenadas polares. A nova região D^* é definida por: $0 \leq r \leq a$ e $0 \leq \theta \leq \pi$; $\sqrt{x^2 + y^2} = r$:

$$M(D) = k \int_0^\pi \left[\int_0^a r^2 dr \right] d\theta = \frac{k \pi a^3}{3}.$$

Os momentos de massa respectivos são:

$$M_x = \int_0^a \left[\int_0^\pi r^3 \cos(\theta) d\theta \right] dr = 0 \quad \text{e} \quad M_y = \int_0^a \left[\int_0^\pi r^3 \sin(\theta) d\theta \right] dr = \frac{a^4}{2};$$

o centro de massa de D é $(0, \frac{3a}{2k\pi})$.

[3] Determine o centróide da região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4x - x^2$.

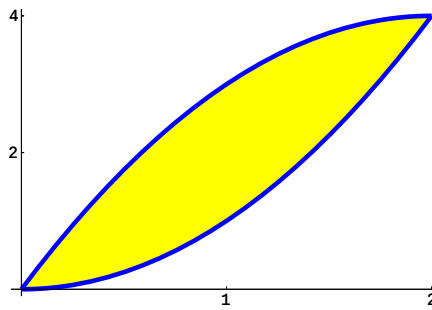


Figura 7.29:

Neste caso $f(x, y) = 1$ para todo $(x, y) \in D$, onde:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4x - x^2\}$$

e $M(D) = A(D) = \frac{8}{3}$. Esta área já foi calculada anteriormente.

$$M_x = \int_0^2 \left[\int_{x^2}^{4x-x^2} y dy \right] dx = \frac{16}{3} \quad \text{e} \quad M_y = \int_0^2 \left[\int_{x^2}^{4x-x^2} x dy \right] dx = \frac{8}{3};$$

o centróide de D é $(2, 1)$.

[4] Determine o centro de massa da região limitada pelas curvas $y = x + x^2$, $y = 0$ e $x = 2$ se a densidade em cada ponto é $f(x, y) = \frac{y}{1+x}$.

$$\begin{aligned} M(D) &= \int_0^2 \left[\int_0^{x(x+1)} \frac{y}{1+x} dy \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (x^3 + x^2) dx = \frac{10}{3}, \\ M_x &= \int_0^2 \left[\int_0^{x(x+1)} \frac{y^2}{1+x} dy \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (x^4 + x^3) dx = \frac{412}{45}, \\ M_y &= \int_0^2 \left[\int_0^{x(x+1)} \frac{xy}{1+x} dy \right] dx = \frac{1}{3} \int_0^2 (x^5 + 2x^4 + x^3) dx = \frac{26}{5}; \end{aligned}$$

o centro de massa de D é $(\frac{39}{25}, \frac{206}{75})$.

7.4.4 Momento de Inércia

Sejam L uma reta no plano, D uma lâmina como antes e $\delta(x, y) = d((x, y), L)$, onde d é a distância no plano e $(x, y) \in D$.

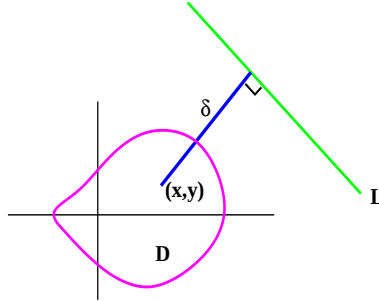


Figura 7.30:

Se $f(x, y)$ é a densidade em cada ponto de D , o momento de inércia da lâmina em relação à reta L é:

$$I_L = \iint_D \delta^2(x, y) f(x, y) dx dy$$

Em particular, se L é o eixo dos x :

$$I_x = \iint_D y^2 f(x, y) dx dy$$

Se L é o eixo dos y :

$$I_y = \iint_D x^2 f(x, y) dx dy$$

O momento de inércia polar em relação à origem é:

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_D (x^2 + y^2) f(x, y) dx dy$$

O momento de inércia de um corpo em relação a um eixo é sua capacidade de resistir à aceleração angular em torno desse eixo.

Exemplo 7.8.

[1] Determine o momento de inércia polar da região limitada pelas curvas $y = e^x$, $x = 1$, $y = 0$ e $x = 0$, se a densidade em cada ponto é $f(x, y) = xy$.

$$I_x = \iint_D xy^3 dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^{e^x} xy^3 dy \right] dx = \frac{1}{64}(3e^4 + 1),$$

$$I_y = \iint_D yx^3 dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^{e^x} yx^3 dy \right] dx = \frac{1}{16}(e^2 + 3);$$

logo, o momento de inércia polar é:

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{1}{64}(3e^4 + 4e^2 + 13).$$

[2] Uma lâmina fina com densidade constante k é limitada por $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + y^2 = b^2$, ($0 < a < b$). Calcule o momento de inércia polar da lâmina.

Usando coordenadas polares, a nova região é definida por: $a \leq r \leq b$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e o momento de inércia polar é:

$$I_0 = k \int_0^{2\pi} \left[\int_a^b r^3 dr \right] d\theta = \frac{k(b^4 - a^4)\pi}{2}.$$

7.5 Exercícios

1. Calcule $\iint_R f(x, y) dx dy$, se:

- (a) $f(x, y) = x^2 y^3$ e $R = [0, 1] \times [0, 1]$
- (b) $f(x, y) = (x + y)^2 (x^2 - y^2)$ e $R = [0, 1] \times [0, 1]$
- (c) $f(x, y) = x^2 + 4y$ e $R = [0, 2] \times [0, 3]$
- (d) $f(x, y) = \frac{x^2}{y^2 + 1}$ e $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$
- (e) $f(x, y) = e^{xy} (x^2 + y^2)$ e $R = [-1, 3] \times [-2, 1]$
- (f) $f(x, y) = xy - y^2$ e $R = [0, 5] \times [0, 4]$
- (g) $f(x, y) = 5xy^2$ e $R = [1, 3] \times [1, 4]$
- (h) $f(x, y) = 2x + c^2 y$ e $R = [-2, 2] \times [-1, 1]$
- (i) $f(x, y) = x^2 - y^2$ e $R = [1, 2] \times [-1, 1]$.

2. Calcule o volume do sólido limitado superiormente pelo gráfico da função e inferiormente pelo retângulo dado:

- (a) $z = \sqrt{9 - y^2}$ e $R = [0, 4] \times [0, 2]$
- (b) $z = x^2 + y^2$ e $R = [-2, 2] \times [-3, 3]$
- (c) $z = y^2 - x^2$ e $R = [-1, 1] \times [1, 3]$
- (d) $z = 2x + 3y + 6$ e $R = [-1, 2] \times [2, 3]$
- (e) $z = a \cos(2\theta) + b \operatorname{sen}(2\alpha)$ e $R = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$
- (f) $z = x \operatorname{sen}(y)$ e $R = [0, \pi] \times [0, \pi]$

3. Calcule as seguintes integrais mudando a ordem de integração:

- (a) $\int_0^1 \left[\int_y^1 t g(x^2) dx \right] dy$
- (b) $\int_1^2 \left[\int_1^x \frac{x^2}{y^2} dy \right] dx$
- (c) $\int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2} dy \right] dx$
- (d) $\int_0^1 \left[\int_x^1 \operatorname{sen}(y^2) dy \right] dx$
- (e) $\int_0^1 \left[\int_{3y}^y e^{x^2} dx \right] dy$
- (f) $\int_0^3 \left[\int_{y^2}^9 y \cos(x^2) dx \right] dy$

4. Calcule as seguintes integrais sabendo que D é limitada pelas curvas dadas:

- (a) $\iint_D y dx dy; y = 2x^2 - 2, y = x^2 + x$
- (b) $\iint_D xy dx dy; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x, y \geq 0$
- (c) $\iint_D x dx dy; x - y^2 = 0, x = 1$
- (d) $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + 1}; y - x^2 = 0, y = 1$
- (e) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy; y = 0, y = x - 1 \text{ e } x = 1, x = 0$
- (f) $\iint_D e^{x+y} dx dy; y = 0, y = x \text{ e } x - 1 = 0$
- (g) $\iint_D x \cos(y) dx dy; y = 0, y = x^2 \text{ e } x = 1$
- (h) $\iint_D 4y^3 dx dy; y = x - 6 \text{ e } y^2 = x$
- (i) $\iint_D (y^2 - x) dx dy; y^2 = x \text{ e } x = 3 - 2y^2$

- (j) $\iint_D (x^2 + 2y) dx dy; y = 2x^2 \text{ e } y = x^2 + 1$
 (k) $\iint_D (1 + 2x) dx dy; x = y^2 \text{ e } y + x = 2$
 (l) $\iint_D dx dy; y^2 = x^3 \text{ e } y = x$

5. Determine o volume dos seguintes sólidos:

- (a) Limitado superiormente por $z = x^2 + y^2$ e inferiormente pela região limitada por $y = x^2$ e $x = y^2$.
 (b) Limitado superiormente por $z = 3x^2 + y^2$ e inferiormente pela região limitada por $y = x$ e $x = y^2 - y$.
 (c) Limitado por $y^2 + z^2 = 4$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$, no primeiro octante.
 (d) Limitado por $z = x^2 + y^2 + 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y = 1$.
 (e) Limitado por $x^2 + y^2 = 1$, $y = z$, $x = 0$ e $z = 0$, no primeiro octante.

6. Calcule a área das regiões limitadas pelas seguintes curvas:

- (a) $y = x^2$, $y = 2x + \frac{5}{4}$
 (b) $y = -x^2 - 4$, $y = -8$
 (c) $y = 5 - x^2$, $y = x + 3$
 (d) $x = y^2$, $y = x + 3$, $y = -2$, $y = 3$
 (e) $y^3 = x$, $y = x$
 (f) $y = -x^2 - 1$, $y = -2x - 4$
 (g) $x = y^2 + 1$, $y + x = 7$
 (h) $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 14$

7. Determine o centro de massa da lâmina plana R , no plano xy e densidade dada f :

- (a) R é limitado por $x^2 + y^2 = 1$ no primeiro quadrante e $f(x, y) = xy$
 (b) R é limitado por $y = x$ e $y = x^2$ e $f(x, y) = x^2 + y^2$

8. Definimos o **valor médio** de f sobre a região D por:

$$V_M = \frac{1}{A} \iint_D f(x, y) dx dy,$$

onde A é a área de D . Calcule V_M se:

- (a) $f(x, y) = x^2$, e D do retângulo de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 2)$ e $(0, 2)$
 (b) $f(x, y) = x^2 y^2$ e D do retângulo de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 2)$ e $(0, 2)$
 (c) $f(x, y) = x^2 y^2$ e D do triângulo de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, e $(0, 2)$
 (d) $f(x, y) = x^2 y^2$ e D do triângulo de vértices $(-1, 0)$, $(1, 0)$, e $(0, 1)$

