

Introdução

Já vimos que integrais duplas podem ser usadas para calcular volumes.

Elas também podem ser usadas para determinar a área de uma região plana.

Na aula de hoje, outras aplicações das integrais duplas. Entre elas:

- ▶ Densidade de massa;
- ▶ Momentos e centro de massa;
- ▶ Momento de inércia;
- ▶ Probabilidade;
- ▶ Valor esperado.

Densidade de Massa

Suponha que uma lâmina ocupe uma região D do plano xy e que sua **densidade** (em unidades de massa por unidade de área) no ponto $(x, y) \in D$ é $\rho(x, y)$, em que ρ é uma função contínua. Após calcular um limite semelhante ao usado na dedução das integrais duplas, concluímos que a **massa total** m da lâmina é dada por

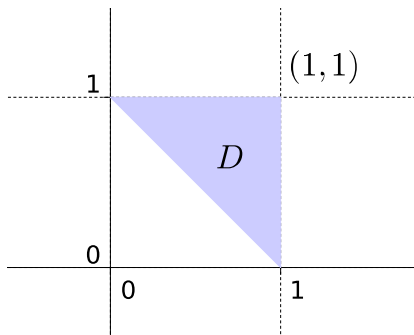
$$m = \iint_D \rho(x, y) dA.$$

De um modo semelhante, podemos considerar que uma carga elétrica está distribuída sobre uma região D e a densidade de carga é dada por $\sigma(x, y)$ em um ponto $(x, y) \in D$. Nesse caso, a **carga total** Q é dada por

$$Q = \iint_D \sigma(x, y) dA.$$

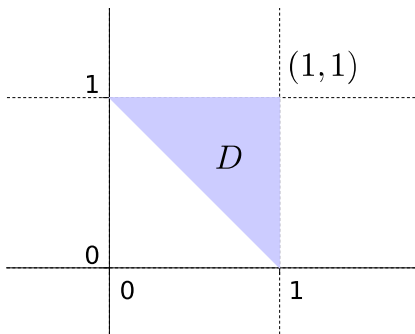
Exemplo 1

Uma carga está distribuída na região triangular D abaixo de modo que a densidade de carga em (x, y) é $\sigma(x, y) = xy$, medida em coulombs por metro quadrado (C/m^2). Determine a carga total.



Exemplo 1

Uma carga está distribuída na região triangular D abaixo de modo que a densidade de carga em (x, y) é $\sigma(x, y) = xy$, medida em coulombs por metro quadrado (C/m^2). Determine a carga total.



Resposta:

$$Q = \frac{5}{24} C.$$

Momentos e Centro de Massa

Suponha que uma lâmina ocupe uma região D e que tenha $\rho(x, y)$ como função densidade. O **momento** da lâmina inteira **em relação ao eixo x** é

$$M_x = \iint_D y \rho(x, y) dA.$$

Analogamente, o **momento em relação ao eixo y** é

$$M_y = \iint_D x \rho(x, y) dA.$$

Finalmente, as coordenadas do **centro de massa** $(\bar{x}, \bar{y})$ são

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) dA \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dA,$$

em que a massa m é dada por

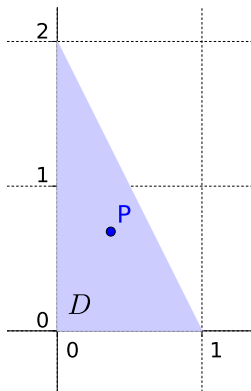
$$m = \iint_D \rho(x, y) dA.$$



O equilíbrio ocorre no centro de massa!

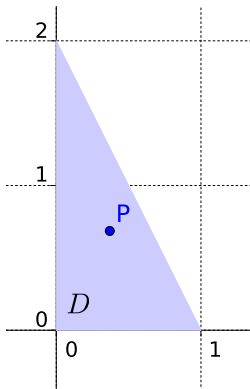
Exemplo 2

Determine a massa e o centro de massa de uma lâmina triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$, se a função densidade é $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$.



Exemplo 2

Determine a massa e o centro de massa de uma lâmina triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$, se a função densidade é $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$.



Resposta: A massa é $m = \frac{8}{3}$ e o centro de massa é $(\frac{3}{8}, \frac{11}{16})$.

Momento de Inércia

Suponha que uma lâmina ocupe uma região D e que tenha $\rho(x, y)$ como função densidade. O **momento de inércia** da lâmina **em relação ao eixo x** é

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dA.$$

Analogamente, o **momento de inércia em relação ao eixo y** é

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dA.$$

Finalmente, o **momento de inércia em relação a origem**, também chamado **momento polar de inércia**,

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA.$$

Observe que $I_0 = I_x + I_y$.



Samuel Dixon usa o momento de inércia de uma vara longa para ajuda-lo a manter o equilíbrio enquanto cruza o rio Niagara em 1890.

Exemplo 3

Determine o momento de inércia I_x , I_y e I_0 do disco homogêneo D com densidade $\rho(x, y) = \rho$, centro na origem e raio a .

Exemplo 3

Determine o momento de inércia I_x , I_y e I_0 do disco homogêneo D com densidade $\rho(x, y) = \rho$, centro na origem e raio a .

Resposta:

$$I_0 = \frac{\pi \rho a^4}{2}, \quad I_x = I_y = \frac{\pi \rho a^4}{4}.$$

Probabilidade

Considere um par de variáveis aleatórias X e Y . Por exemplo, X e Y podem representar o tempo de vida de dois componentes de uma máquina ou a altura e o peso de um indivíduo.

A **função densidade conjunta** de X e Y é uma função f de duas variáveis tais que a probabilidade de que (X, Y) esteja em uma região D seja

$$P[(X, Y) \in D] = \iint_D f(x, y) dA.$$

Em particular, a função densidade conjunta satisfaz

$$f(x, y) \geq 0 \quad \text{e} \quad \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dA = 1,$$

em que a integral dupla sobre $\mathbb{R}^2$ é definida em termos das seguintes integrais impróprias:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dA = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy.$$

Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias com funções densidades f_X e f_Y , respectivamente. Dizemos que X e Y são **variáveis aleatórias independentes** se a função densidade conjunta for o produto das densidades individuais, ou seja,

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

Exemplo 4

O gerente de um cinema determina que o tempo médio de espera na fila para pessoas comprarem entrada para o filme da semana seja de 10 minutos e que o tempo médio que levam para comprar pipoca seja de 5 minutos. Supondo que o tempo de espera sejam independentes, determine a probabilidade de um espectador esperar menos de 20 minutos até se dirigir a seu assento.

Função Densidade Exponencial

O tempo de espera é modelado através da função

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{1}{\mu} e^{-t/\mu}, & t \geq 0, \end{cases}$$

em que μ é o tempo médio de espera.

Exemplo 4

O gerente de um cinema determina que o tempo médio de espera na fila para pessoas comprarem entrada para o filme da semana seja de 10 minutos e que o tempo médio que levam para comprar pipoca seja de 5 minutos. Supondo que o tempo de espera sejam independentes, determine a probabilidade de um espectador esperar menos de 20 minutos até se dirigir a seu assento.

Função Densidade Exponencial

O tempo de espera é modelado através da função

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{1}{\mu} e^{-t/\mu}, & t \geq 0, \end{cases}$$

em que μ é o tempo médio de espera.

Resposta: $P[X + Y \leq 20] = 1 + e^{-4} - 2e^{-2} \approx 0.7476.$

Valor Esperado

Se X e Y são variáveis aleatórias com função densidade conjunta f , definimos a **média** X e a **média** Y , também chamados **valores esperados** de X e Y , como

$$\mu_X = \iint_{\mathbb{R}^2} xf(x, y) dA \quad \text{e} \quad \mu_Y = \iint_{\mathbb{R}^2} yf(x, y) dA.$$

Observe a semelhança das expressões para μ_X e μ_Y com os momentos M_X e M_Y de uma lâmina com função densidade ρ .

Exemplo 5

Uma fábrica produz rolamentos de forma cilíndrica tais que

- ▶ O diâmetro X tem distribuição normal com média 4,0cm e desvio padrão 0,01cm,
- ▶ O comprimento Y tem distribuição normal com média 6,0cm e desvio padrão 0,01cm.

Supondo que X e Y sejam independentes, determine a probabilidade de um rolamento escolhido aleatoriamente da linha de produção ter comprimento ou diâmetro que difiram dos valores médios em mais que 0,02cm.

Distribuição Normal

A função densidade de uma variável aleatória com distribuição normal é

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(t-\mu)^2/(2\sigma^2)},$$

em que μ é sua média e σ é seu desvio padrão.