

Capítulo 8

Integração Tripla

8.1 Integração Tripla sobre Paralelepípedos

Este capítulo é totalmente análogo ao anterior.

Sejam $R \subset \mathbb{R}^3$ o paralelepípedo retangular definido por $R = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ e a função limitada $w = f(x, y, z)$ definida em R . Consideremos as seguintes partições de ordem n dos intervalos: $[a, b]$, $[c, d]$ e $[p, q]$:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$$

$$p = z_0 < z_1 < \dots < z_n = q.$$

Subdividamos R em n^3 sub-paralelepípedos $R_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$.

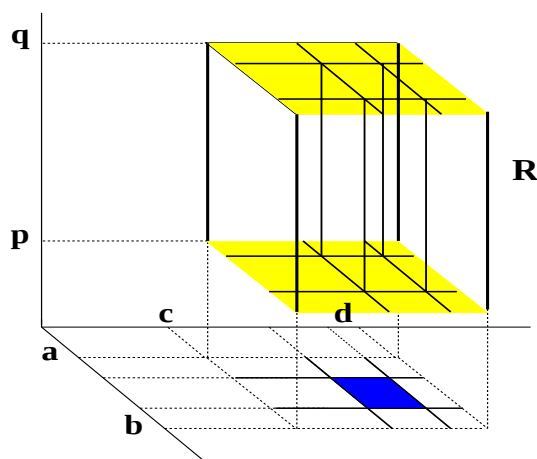


Figura 8.1: Subdivisão de R .

Denotemos por $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $\Delta y = \frac{d-c}{n}$, $\Delta z = \frac{q-p}{n}$. Escolhamos $c_{ijk} \in R_{ijk}$ e formemos a seguinte soma de Riemann:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_{ijk}) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Definição 8.1. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ existe e é independente da escolha dos $c_{ijk} \in R_{ijk}$ e da partição, denominamos este limite de *integral tripla de f sobre R* e a denotamos por:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \iiint_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Em tal caso f é dita **integrável sobre R** .

Teorema 8.1. Se f é contínua em R , então f é integrável sobre R .

Para a prova do teorema veja [EL].

No capítulo anterior vimos que se $f(x, y) \geq 0$ e contínua para todo $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$, a integral dupla $\iint_R f(x, y) \, dx \, dy$ representa o volume do sólido:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in [a, b] \times [c, d], 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Para integrais triplas esta interpretação geométrica não é conveniente, pois o gráfico de f é um subconjunto de $\mathbb{R}^4$ o qual não é possível visualizar.

Mas se $f(x, y, z) = 1$ para todo $(x, y, z) \in R$, $\iiint_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ representa o volume de R (veja o exemplo 1). Isto se justifica, pois a soma de Riemann correspondente:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$$

é a soma dos volumes dos n^3 sub-paralelepípedos formado pela partição; então, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ é exatamente o volume de R .

A integral tripla tem propriedades análogas às das integrais duplas.

Proposição 8.1. Seja $\mathbf{x} = (x, y, z) \in R$.

1. **Linearidade da integral tripla.** Se f e g são funções integráveis sobre R , então para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ é integrável sobre R , e:

$$\iiint_R (\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})) \, dx \, dy \, dz = \alpha \iiint_R f(\mathbf{x}) \, dx \, dy \, dz + \beta \iiint_R g(\mathbf{x}) \, dx \, dy \, dz$$

onde $\mathbf{x} = (x, y, z)$.

2. Se f e g são integráveis sobre R e $g(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$, para todo $\mathbf{x} \in R$, então:

$$\iiint_R g(\mathbf{x}) \, dx \, dy \, dz \leq \iiint_R f(\mathbf{x}) \, dx \, dy \, dz$$

3. Se R é subdividido em k paralelepípedos e f é integrável sobre cada R_i , $i = 1, \dots, k$ então f é integrável sobre R e,

$$\iiint_R f(\mathbf{x}) \, dx \, dy \, dz = \sum_{i=1}^k \iiint_{R_i} f(\mathbf{x}) \, dx \, dy \, dz$$

A prova segue diretamente das definições.

A noção de conteúdo nulo poder ser estendida ao paralelepípedo R de forma completamente análoga ao caso do retângulo; mudando sub-retângulos por sub-paralelepípedos e área por volume. Como antes, o teorema é válido se o conjunto de descontinuidades de f é de conteúdo nulo. Para integrais triplas continua valendo o teorema de Fubini. Agora temos $3! = 9$ possíveis integrais iteradas.

Teorema 8.2. (Fubini) *Seja $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em R . Então:*

$$\begin{aligned} \iiint_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_p^q f(x, y, z) \, dz \right] dy \right] dx \\ &= \int_p^q \left[\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y, z) \, dx \right] dy \right] dz \\ &= \int_c^d \left[\int_a^b \left[\int_p^q f(x, y, z) \, dz \right] dx \right] dy \\ &= \int_a^b \left[\int_p^q \left[\int_c^d f(x, y, z) \, dy \right] dz \right] dx \\ &= \dots \end{aligned}$$

A prova do teorema de Fubini para integrais triplas é completamente análoga à das integrais duplas, que pode ser vista no apêndice.

Exemplo 8.1.

- [1] Calcule $\iiint_R dx \, dy \, dz$, onde $R = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$.

$$\iiint_R dx \, dy \, dz = \int_a^b \left[\int_p^q \left[\int_c^d dy \right] dz \right] dx = (d - c) (q - p) (b - a),$$

que é o volume de R .

- [2] Calcule $\iiint_R xyz \, dx \, dy \, dz$, onde $R = [0, 1] \times [1, 2] \times [0, 3]$.

$$\iiint_R xyz \, dx \, dy \, dz = \int_1^2 \left[\int_0^1 \left[\int_0^3 xyz \, dz \right] dx \right] dy = \frac{9}{2} \int_1^2 \left[\int_0^1 x y \, dx \right] dy = \frac{27}{8}.$$

- [3] Calcule $\iiint_R \operatorname{sen}(x + y + z) \, dx \, dy \, dz$, onde $R = [0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, \pi]$.

$$\iiint_R \operatorname{sen}(x + y + z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^\pi \left[\int_0^\pi \left[\int_0^\pi \operatorname{sen}(x + y + z) \, dz \right] dx \right] dy = -8.$$

[4] Calcule $\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2 + x y z) dx dy dz$, onde $R = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \iiint_R (x^2 + y^2 + z^2 + x y z) dx dy dz &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \left[\int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2 + x y z) dz \right] dx \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \left(x^2 + y^2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} x y \right) dx \right] dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{2}{3} + \frac{y}{4} + y^2 \right) dy = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

8.2 Integrais Triplas sobre Regiões mais Gerais

8.2.1 7.2.1 Regiões Elementares no Espaço

De forma análoga ao estudado no capítulo das integrais duplas definidas em regiões mais gerais. Consideremos $W \subset \mathbb{R}^3$.

Regiões de tipo I

A região W é do tipo I se pode ser descrita por:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in D, f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\}$$

onde D é a região elementar do plano, projeção de W no plano xy e $f_1, f_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, sendo $f_1 \leq f_2$.

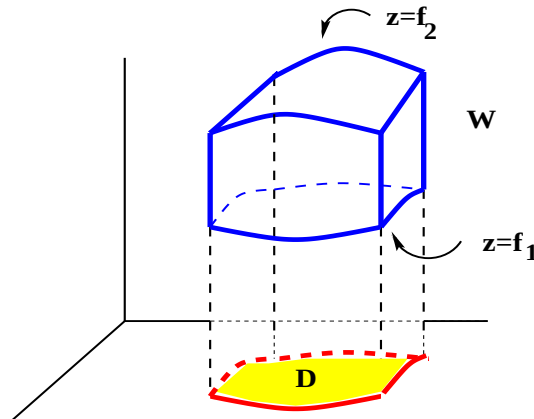


Figura 8.2: Região de tipo I.

Regiões de tipo II

W é do tipo II se pode ser descrita por:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, z) \in D, g_1(x, z) \leq y \leq g_2(x, z)\}$$

onde D é a região elementar do plano, projeção de W no plano xz e $g_1, g_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, sendo $g_1 \leq g_2$.

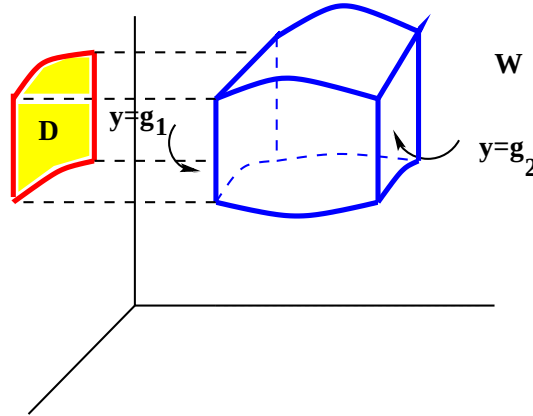


Figura 8.3: Região de tipo II.

Regiões de tipo III

W é do tipo III se pode ser descrita por:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (y, z) \in D, h_1(y, z) \leq x \leq h_2(y, z)\}$$

onde D é a região elementar do plano, projeção de W no plano yz e $h_1, h_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, sendo $h_1 \leq h_2$.

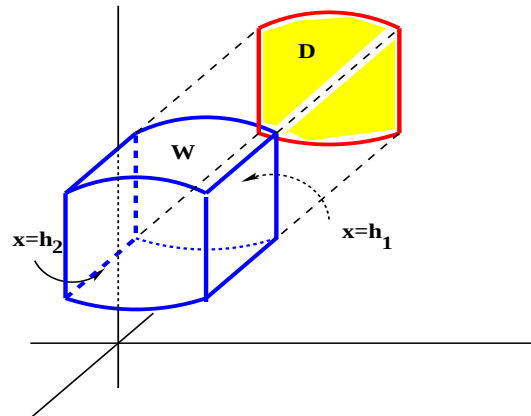


Figura 8.4: Região de tipo III.

A região W é de tipo IV se é do tipo I, ou tipo II, ou tipo III, como por exemplo região limitada por uma esfera, ou por um elipsóide.

Em qualquer dos casos anteriores, W é chamada **região elementar do espaço**. As regiões W são conjuntos fechados e limitados em $\mathbb{R}^3$. Alguns exemplos de regiões elementares:

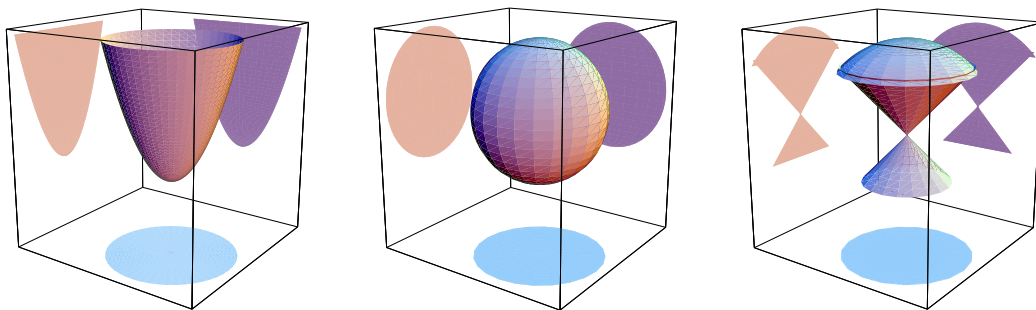


Figura 8.5: Regiões elementares do espaço.

8.3 Extensão da Integral Tripla

Seja W uma região elementar em $\mathbb{R}^3$ tal que $W \subset R$, R um paralelepípedo como antes. Se $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, definamos $f^* : R \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{se } (x, y, z) \in W \\ 0 & \text{se } (x, y, z) \in R - W. \end{cases}$$

Se ∂W tem conteúdo nulo, então, f^* é integrável sobre R e definimos a integral tripla de f sobre W como:

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_R f^*(x, y, z) dx dy dz.$$

Em tal caso dizemos que f é integrável sobre W . A integral não depende da escolha do paralelepípedo R .

Proposição 8.2. *Seja $f : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ contínua.*

1. Se W é do tipo I:

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

2. Se W é do tipo II:

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left[\int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x, y, z) dy \right] dx dz$$

3. Se W é do tipo III:

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left[\int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} f(x, y, z) dx \right] dy dz$$

Observe que em todos os casos anteriores D é uma região elementar do plano e, portanto, pode ser do tipo I, II ou III; dependendo do tipo continuamos com a integral dupla.

Volume : Em particular, se $f(x, y, z) = 1$ para todo $(x, y, z) \in W$, então:

$$\boxed{\iiint_W dx \, dy \, dz = V(W)}$$

onde $V(W)$ é o volume de W .

Exemplo 8.2.

[1] Calcule $\mathbf{I} = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{\text{sen}(2z)}{4-z} \, dy \, dz \, dx$.

Note que $\mathbf{I} = \iint_D \left[\int_0^x \frac{\text{sen}(2z)}{4-z} \, dy \right] dz \, dx$, onde $D = \{(x, z) / 0 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq 4 - x^2\}$:

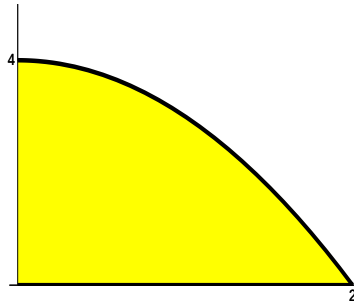


Figura 8.6:

Calculamos primeiro $\int_0^x \frac{\text{sen}(2z)}{4-z} \, dy = \frac{x \text{sen}(2z)}{4-z}$; a seguir, precisamos calcular:

$$\iint_D \frac{x \text{sen}(2z)}{4-z} \, dz \, dx,$$

onde consideramos $D = \{(x, z) / 0 \leq x \leq \sqrt{4-z}, 0 \leq z \leq 4\}$ como uma região de tipo III; logo,

$$\mathbf{I} = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-z}} \frac{x \text{sen}(2z)}{4-z} \, dx \, dz = \int_0^4 \frac{\text{sen}(2z)}{2} \, dz = \frac{1 - \cos(8)}{4}.$$

[2] Calcule o volume do sólido limitado por $z + x^2 = 9$, $z + y = 4$, $y = 0$ e $y = 4$.

O sólido é limitado superiormente por $z = 9 - x^2$ e inferiormente por $z = 4 - y$. W é do tipo I.

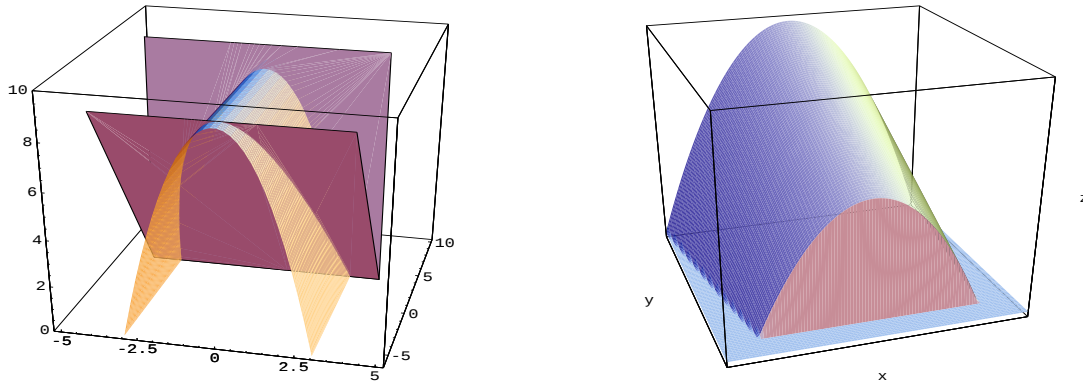


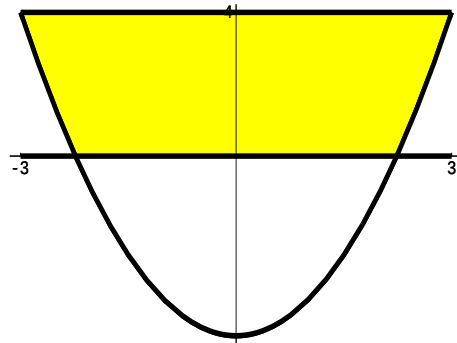
Figura 8.7: Sólido do exemplo [2].

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in D, 4 - y \leq z \leq 9 - x^2\},$$

Determinação de D: A região D é a projeção de W no plano xy ; para determinar D basta eliminarmos z das equações ou, equivalentemente achar a interseção de ambas as superfícies:

$$\begin{cases} z = 9 - x^2 \\ z = 4 - y; \end{cases}$$

obtemos $x^2 = y + 5$ e $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -\sqrt{y+5} \leq x \leq \sqrt{y+5}, 0 \leq y \leq 4\}$.

Figura 8.8: A região D .

Logo, $V(W) = \iiint_W dx dy dz = \int_0^4 \left[\int_{-\sqrt{y+5}}^{\sqrt{y+5}} \left[\int_{4-y}^{9-x^2} dz \right] dx \right] dy$; então:

$$\begin{aligned} V(W) &= \int_0^4 \left[\int_{-\sqrt{y+5}}^{\sqrt{y+5}} (5 - x^2 + y) dx \right] dy = \int_0^4 \left(5x - \frac{x^3}{3} + xy \right) \Big|_{-\sqrt{y+5}}^{\sqrt{y+5}} dy \\ &= \frac{4}{3} \int_0^4 (y+5)^{\frac{3}{2}} dy = \frac{8}{15} (y+5)^{\frac{5}{2}} \Big|_0^4 \\ &= \frac{648}{5} - \frac{40\sqrt{5}}{3} u.v. \end{aligned}$$

[3] Calcule $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$ onde W é limitado por $z = x^2 + y^2$, $z = 2$, no primeiro octante.

Se considerarmos W como região de tipo II, W é definida por $0 \leq y \leq \sqrt{z - x^2}$ e D é a projeção de W no plano xz ; fazendo $y = 0$ obtemos a parábola $z = x^2$ e $z = 2$; logo, D é definida por $0 \leq x \leq \sqrt{z}$ e $0 \leq z \leq 2$.

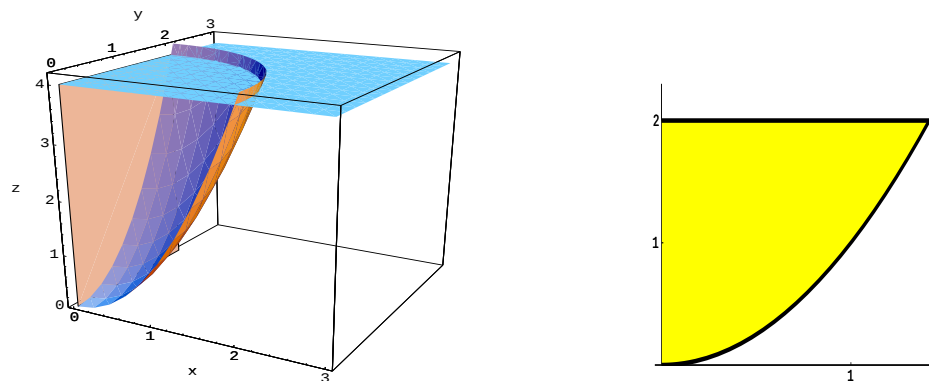


Figura 8.9: O sólido e a região do exemplo [2].

$$\begin{aligned} \iiint_W x \, dx \, dy \, dz &= \int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{z}} \left(\int_0^{\sqrt{z-x^2}} x \, dy \right) dx \right] dz = \int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{z}} (x \sqrt{z-x^2}) \, dx \right] dz = \frac{1}{3} \int_0^2 z^{\frac{3}{2}} \, dz \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{15}. \end{aligned}$$

Capítulo 9

Mudança de Coordenadas

9.1 Introdução

Sejam W^* uma região elementar no espaço e x, y e z as seguintes funções:

$$x, y, z : W^* \longrightarrow \mathbb{R},$$

onde $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ e $z = z(u, v, w)$ são funções contínuas e com derivadas parciais contínuas num paralelepípedo aberto R tal que $W^* \subset R$. Estas três funções determinam uma transformação do espaço uvw no espaço xyz . De fato:

$$T : W^* \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

onde $T(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$.

A transformação T é também denotada por:

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w), \end{cases} \quad (u, v, w) \in W^*$$

Denotemos a imagem de W^* por T como $W = T(W^*)$, contida no espaço xyz .

Definição 9.1.

1. T é **injetiva** em W^* se $T((u_1, v_1, w_1)) = T((u_2, v_2, w_2))$ para todos $(u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2) \in W^*$ implica em $u_1 = u_2, v_1 = v_2$ e $w_1 = w_2$.
2. O determinante **Jacobiano** de T é denotado e definido por:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix},$$

onde as derivadas parciais são calculadas no ponto $(u, v, w) \in W^*$.

Teorema 9.1. *Sejam W e W^* regiões elementares no espaço, T uma transformação de classe C^1 e injetiva em W^* . Suponha que $T(W^*) = W$. Então para toda função integrável f sobre W temos:*

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{W^*} f(u, v, w) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

onde $f(u, v, w) = f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ e $\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right|$ é o valor absoluto do determinante Jacobiano.

Novamente, é possível mostrar que o teorema anterior é ainda válido se T não é injetiva num subconjunto de W^* que seja de conteúdo nulo.

9.2 Coordenadas Cilíndricas

Se $P = (x, y, z)$ é um ponto no espaço xyz , suas coordenadas cilíndricas são (r, θ, z) , onde (r, θ) são as coordenadas polares da projeção de P no plano xy e são definidas por:

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta), \\ y = r \sin(\theta), \\ z = z, \end{cases}$$

ou, explicitamente $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = z$ e:

$$\theta = \begin{cases} \arctg\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x, y > 0, \\ \pi + \arctg\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x < 0, \\ 2\pi + \arctg\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x > 0, y < 0. \end{cases}$$

Se $x = 0$, então $\theta = \frac{\pi}{2}$ quando $y > 0$ e $\theta = \frac{3\pi}{2}$ quando $y < 0$. Se $x = y = 0$, θ não é definido.

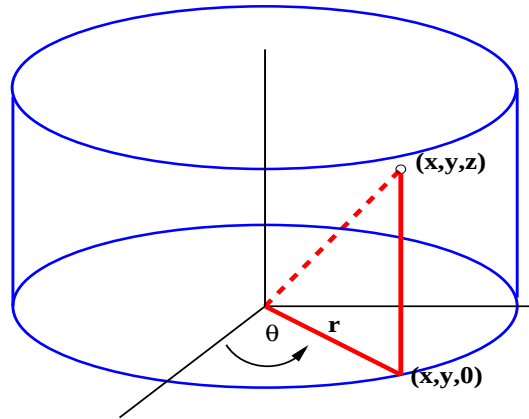


Figura 9.1: Coordenadas cilíndricas.

Esta transformação é injetiva no seguinte subconjunto:

$$\{(r, \theta, z) / r > 0, \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi, z \in (-\infty, +\infty)\}$$

e o jacobiano da transformação é:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r$$

Exemplo 9.1.

[1] O cilindro circular reto C de raio a : $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = a^2, z \in (-\infty, +\infty)\}$. Em coordenadas cilíndricas $x^2 + y^2 = r^2$; logo $r = a$, então:

$$C = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 / r = a, 0 \leq \theta \leq 2\pi, z \in (-\infty, +\infty)\}.$$

[2] O cone com base num disco D de raio 1.5 centrado na origem e altura 3, em coordenadas cilíndricas:

$$z = z, \quad 0 \leq r \leq \frac{3}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

logo, o cone em coordenadas cilíndricas:

$$S = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq r \leq \frac{3}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 < z < 3\}.$$

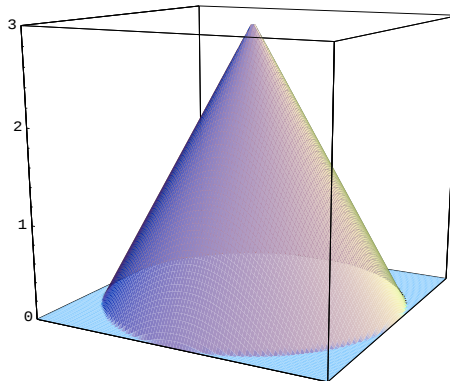


Figura 9.2: O cone do exemplo [2].

Do teorema anterior:

Corolário 9.2. Seja $f(r, \theta, z) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$; então:

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{W^*} r f(r, \theta, z) dr dz d\theta$$

Esta igualdade ainda é válida se $W^* = \{(r, \theta, z) / r \geq 0, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi, z \in (-\infty, +\infty)\}$. Em particular, se $f(x, y, z) = 1$ para todo $(x, y, z) \in W$, então:

$$V(W) = \iiint_{W^*} r dz dr d\theta.$$

Exemplo 9.2.

[1] Determine o volume do sólido limitado por $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ e $z = b$; $a, b \neq 0$.

O sólido W é um cilindro centrado na origem, de raio a e altura z tal que $0 \leq z \leq b$. Usando coordenadas cilíndricas obtemos a nova região W^* definida por: $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq z \leq b$:

$$V(W) = \iiint_W r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^b \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_0^a r \, dr \right] d\theta \right] dz = \pi a^2 b \text{ u.v.}$$

[2] Calcule $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$, onde W é limitado por $x = 0$, $y = 0$, $z = 4$ e $z = x^2 + y^2$.

O sólido W é definido por $x^2 + y^2 \leq z \leq 4$. Usando coordenadas cilíndricas obtemos a nova região W^* definida por: $r^2 \leq z \leq 4$, $0 \leq r \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$; D é a projeção do parabolóide no plano xy , no primeiro quadrante:

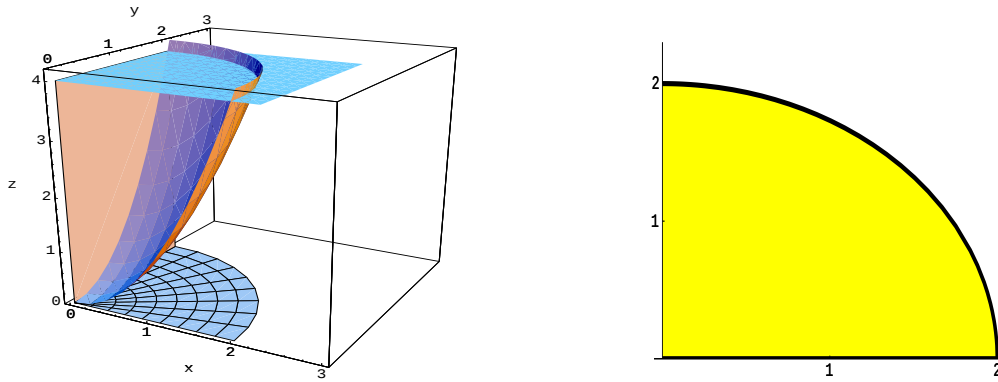


Figura 9.3: O sólido e a região do exemplo [2], respectivamente.

$$\iiint_W x \, dx \, dy \, dz = \iiint_{W^*} r^2 \cos(\theta) \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^2 \left[\int_{r^2}^4 r^2 \cos(\theta) \, dz \right] dr \right] d\theta = \frac{64}{15}.$$

[3] Calcule $\iiint_W \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$, onde W é o sólido limitado por $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1 - x^2 - y^2$ abaixo do plano $z = 4$.

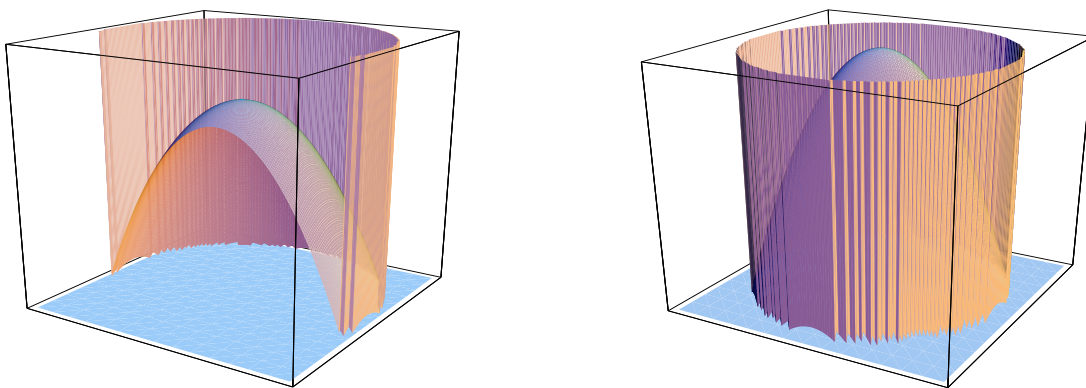
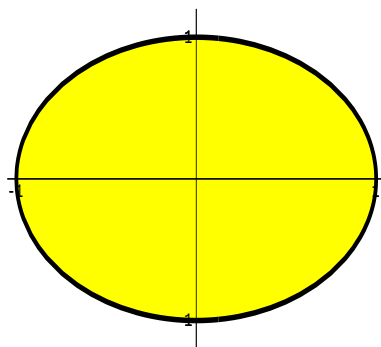


Figura 9.4: Vistas do sólido do exemplo [3].

W é determinado por $1 - x^2 - y^2 \leq z \leq 4$. A projeção no plano xy é limitada por $x^2 + y^2 \leq 1$.

Figura 9.5: A região D .

Usando coordenadas cilíndricas obtemos a nova região W^* determinada por: $1 - r^2 \leq z \leq 4$, $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$; logo:

$$\iiint_W \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \left[\int_{1-r^2}^4 r^2 \, dz \right] dr \right] d\theta = \frac{12\pi}{5}.$$

[4] Calcule $\iiint_W z \, dx \, dy \, dz$, onde W é limitado por $z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$ e $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

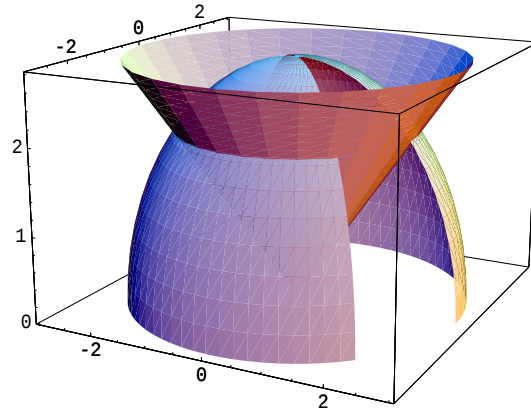


Figura 9.6: O sólido do exemplo [4].

W é determinado por $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{8 - x^2 - y^2}$. A projeção no plano xy é limitada por $x^2 + y^2 \leq 4$. Usando coordenadas cilíndricas obtemos a nova região W^* determinada por: $r \leq z \leq \sqrt{8 - r^2}$, $0 \leq r \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$; logo:

$$\iiint_W z \, dx \, dy \, dz = \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_r^{\sqrt{8-r^2}} r z \, dz \right] d\theta \right] dr = 8\pi.$$

[5] Determine o volume do sólido limitado por uma esfera de raio a .

Pela simetria do sólido calculamos o volume da calota superior da esfera e multiplicamos o resultado por 2. O sólido é definido por $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Usando coordenadas cilíndricas temos que o novo sólido é definido por $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2}$, $0 \leq r \leq a$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$; logo:

$$V(W) = 2 \iiint_W dx \, dy \, dz = 2 \int_0^a \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r \, dz \right] d\theta \right] dr = \frac{4}{3} \pi a^3 u.v.$$

[6] Determine o volume do sólido limitado por $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e $z + 1 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

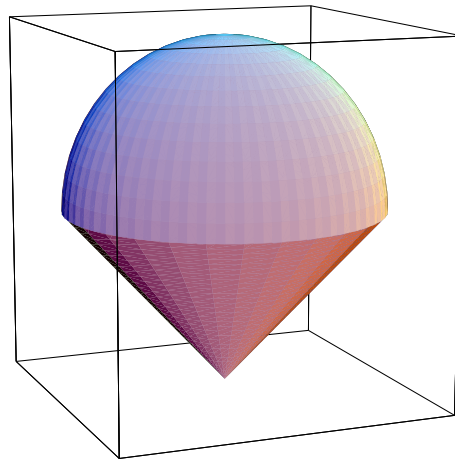


Figura 9.7: O sólido do exemplo [6].

W é definido por $\sqrt{x^2 + y^2} - 1 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Usando coordenadas cilíndricas temos que o novo sólido é definido por $r - 1 \leq z \leq \sqrt{1 - r^2}$, $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$; logo:

$$V(W) = \iiint_W dx dy dz = 2 \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_{r-1}^{\sqrt{1-r^2}} r dz \right] d\theta \right] dr = \pi u.v.$$

[7] Determine o volume do sólido limitado por $z = 9 - x^2 - y^2$ e $z = 1 + x^2 + y^2$.

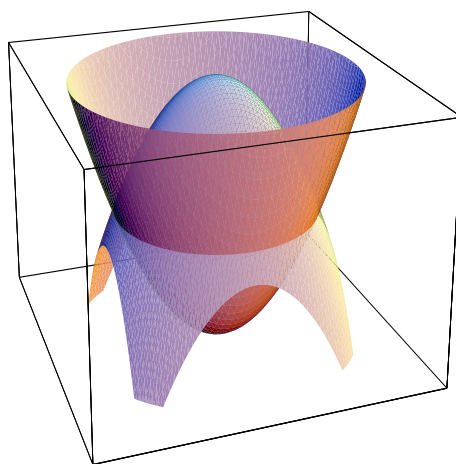


Figura 9.8: O sólido do exemplo [7].

W é definido por $1 + x^2 + y^2 \leq z \leq 9 - x^2 - y^2$. Usando coordenadas cilíndricas temos que o novo sólido é definido por $1 + r^2 \leq z \leq 9 - r^2$, $0 \leq r \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$; logo:

$$V(W) = \iiint_W dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 \left[\int_{1+r^2}^{9-r^2} r dz \right] dr \right] d\theta = 16\pi u.v.$$

9.3 Coordenadas Esféricas

Seja $P = (x, y, z)$ um ponto no espaço xyz . Suas coordenadas esféricas são (ρ, θ, ϕ) onde ρ é a distância do ponto P à origem, θ é o ângulo formado pelo eixo positivo dos x e o segmento de reta que liga $(0, 0, 0)$ a $(x, y, 0)$ e ϕ é o ângulo formado pelo eixo positivo dos z e o segmento de reta que liga P à origem:

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}(\phi) \cos(\theta) \\ y = \rho \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\theta) \\ z = \rho \cos(\phi), \end{cases}$$

onde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq \pi$, o que define uma região no espaço $\rho\theta\phi$.

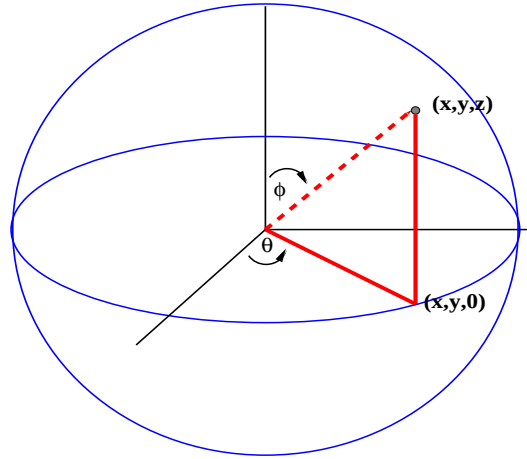


Figura 9.9: Coordenadas esféricas.

O jacobiano da transformação é:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = -\rho^2 \operatorname{sen}(\phi)$$

Exemplo 9.3.

[1] Em coordenadas esféricas uma esfera de raio a é:

$$S = \{(\rho, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3 / \rho = a, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

[2] Os cones circulares com eixos coincidentes com o eixo dos z são caracterizados por:

$$S = \{(\rho, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3 / \rho \in [0, +\infty), \phi = c_0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

onde $c_0 \in \mathbb{R}$.

Casos particulares:

Se $c_0 = 0$ e $\phi = 0$, S representa o semi-eixo positivo dos z .

Se $c_0 = \pi$ e $\phi = \pi$, S representa o semi-eixo negativo dos z .

Se $c_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$, S representa o plano xy .

Se $0 < c_0 < \frac{\pi}{2}$ e $\phi = c_0$, o cone "abre" para cima.

Se $\frac{\pi}{2} < c_0 < \pi$ e $\phi = c_0$, o cone "abre" para baixo.

[3] O sólido limitado por $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ em coordenadas esféricas é dado por:

$$W = \{(\rho, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3 / \rho \in [1, 2], 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

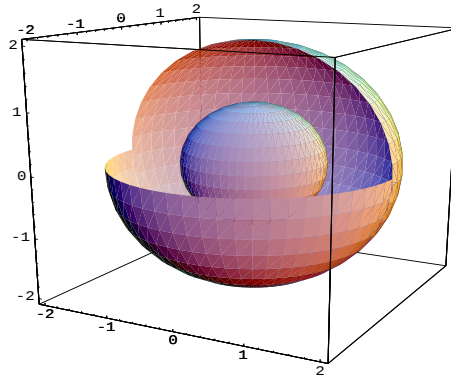


Figura 9.10: Sólido do exemplo [3].

Do teorema anterior:

Corolário 9.3. *Seja $f(\rho, \theta, \phi) = f(\rho \cos(\theta) \sin(\phi), \rho \sin(\theta) \sin(\phi), \rho \cos(\phi))$, então:*

$$\boxed{\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{W^*} \rho^2 \sin(\phi) f(\rho, \theta, \phi) d\rho d\theta d\phi}$$

Esta igualdade ainda é válida se $W^* = \{(\rho, \theta, \phi) / \rho \in [0, +\infty), 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}$. Em particular, se $f(x, y, z) = 1$ para todo $(x, y, z) \in W$, então:

$$\boxed{V(W) = \iiint_{W^*} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\theta d\phi}$$

Exemplo 9.4.

[1] Calcule o volume do sólido limitado por uma esfera de raio a centrada na origem.

$$\begin{aligned} \iiint_W dx dy dz &= \int_0^a \left[\int_0^\pi \left[\int_0^{2\pi} \rho^2 \sin(\phi) d\theta \right] d\phi \right] d\rho = 2\pi \int_0^a \left[\int_0^\pi \rho^2 \sin(\phi) d\phi \right] d\rho \\ &= \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^\pi \sin(\phi) d\phi = \frac{4}{3}\pi a^3 u.v. \end{aligned}$$

[2] Calcule $\iiint_W e^{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} dx dy dz$ onde W é o sólido limitado por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Usando coordenadas esféricas temos $0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq \pi$, que define uma região no espaço $\rho\theta\phi$. Por outro lado $e^{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = e^{\rho^3}$

$$\begin{aligned} \iiint_W e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz &= \int_0^1 \left[\int_0^\pi \left[\int_0^{2\pi} \rho^2 e^{\rho^3} \sin(\phi) d\theta \right] d\phi \right] d\rho \\ &= 2\pi \int_0^1 \left[\int_0^\pi (\rho^2 e^{\rho^3} \sin(\phi)) d\phi \right] d\rho \\ &= 4\pi \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3} d\rho = \frac{4}{3}\pi(e - 1). \end{aligned}$$

[3] Calcule $\iiint_W \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ onde W é o sólido limitado inferiormente por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e superiormente por $x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

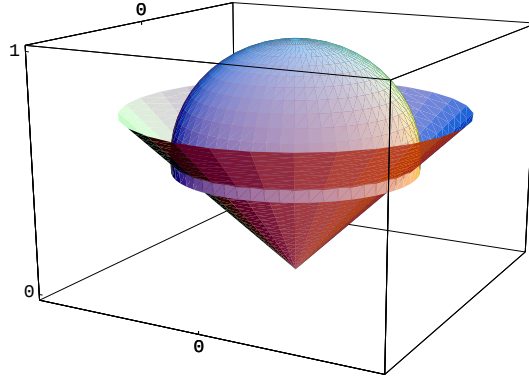


Figura 9.11: Sólido do exemplo [3].

A esfera $x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, em coordenadas esféricas, tem como equação: $\rho = \cos(\phi)$ e o cone: $\phi = \frac{\pi}{4}$; logo, $0 \leq \rho \leq \cos(\phi)$, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$:

$$\begin{aligned} \iiint_W \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^{\cos(\phi)} \left[\int_0^{2\pi} \rho^3 \sen(\phi) d\theta \right] d\rho \right] d\phi = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_0^{\cos(\phi)} \rho^3 \sen(\phi) d\rho \right] d\phi \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4(\phi) \sen(\phi) d\phi = \frac{\pi}{10} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{8} \right). \end{aligned}$$

[4] Calcule $\iiint_W e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$ onde W é o sólido limitado pela esfera centrada na origem de raio 4 e os cones $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ e $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}$.

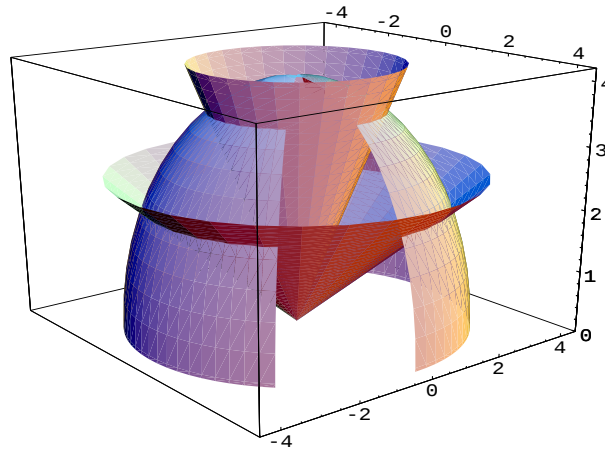


Figura 9.12: Sólido do exemplo [4].

Usando coordenadas esféricas a equação da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ é $\rho = 4$ e as dos cones

$z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ e $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}$ são, $\phi = \frac{\pi}{6}$ e $\phi = \frac{\pi}{3}$, respectivamente; logo, a região no espaço $\rho\theta\phi$ é definida por: $0 \leq \rho \leq 4$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $\frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}$:

$$\iiint_W e^{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left[\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\int_0^4 \rho^2 e^{\rho^3} \operatorname{sen}(\phi) d\rho \right] d\phi \right] d\theta = \frac{\pi}{3} (\sqrt{3} - 1)(e^{64} - 1).$$

9.4 Exercícios

1. Calcule as seguintes integrais:

- | | |
|--|---|
| (a) $\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ | (d) $\int_0^4 \int_0^\pi \int_0^{1-x} x^2 \operatorname{sen}(y) dz dx dy$ |
| (b) $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2 y^2 z^2 dx dy dz$ | (e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^y \int_0^{\frac{1}{y}} \operatorname{sen}(y) dz dx dy$ |
| (c) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x dz dy dx$ | (f) $\int_{-2}^1 \int_0^x \int_0^y x^2 z^4 dz dy dx$ |

2. Considere o sólido limitado por $x + y + z = 3$, $x + y - z = 1$ e os planos coordenados. Calcule o volume do sólido, fazendo:

- | | |
|---|---|
| (a) $\int \left[\int \left[\int dz \right] dy \right] dx$ | (c) $\int \left[\int \left[\int dy \right] dx \right] dz$ |
| (b) $\int \left[\int \left[\int dx \right] dy \right] dz$ | (d) $\int \left[\int \left[\int dx \right] dz \right] dy$ |

3. Faça a mudança de variável necessária para calcular as seguintes integrais:

- | |
|---|
| (a) $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^4 x dz dy dx.$ |
| (b) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dz dy dx.$ |
| (c) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_1^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} x dz dy dx.$ |
| (d) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz dy dx.$ |

4. Calcule:

- (a) $\iint_W x dx dy dz$, onde W é o sólido limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ e pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$.

- (b) $\iint_W x \, dx \, dy \, dz$, onde W é o sólido limitado pelo parabolóide $x = 4z^2 + 4y^2$ e pelo plano $x = 4$.
- (c) $\iint_W 6xy \, dx \, dy \, dz$, onde W está acima da região plana limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$ e abaixo do plano $z = 1 + x + y$.
- (d) $\iint_W xy \, dx \, dy \, dz$, onde W é o tetraedro de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 3)$.

5. Determine o volume:

- (a) do sólido limitado pelo cilindro $x = y^2$ e pelos planos $z = 0$ e $x + z = 1$.
- (b) do sólido limitado pelo cilindro $y = \cos(x)$ e pelos planos $z = y$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ e $z = 0$.

6. O **valor médio** de uma função $w = f(x, y, z)$ sobre a região W é definido por:

$$V_M = \frac{1}{\text{vol}(W)} \iiint_W f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Determine o valor médio da função $f(x, y, z) = xyz$ sobre o cubo com lados de comprimento L que está no primeiro octante com um vértice na origem e arestas paralelas aos eixos coordenados.

7. Calcule, usando coordenadas cilíndricas:

- (a) $\iiint_W \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$, onde W é a região contida dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ e entre os planos $z = -5$ e $z = 4$.
- (b) $\iiint_W (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$, onde W é o cone $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$.
- (c) $\iiint_W (1 + \sqrt{x^2 + y^2}) \, dx \, dy \, dz$, onde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$.

8. Calcule, usando coordenadas esféricas:

- (a) $\iiint_W \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$, onde W é limitado por abaixo pelo cone $\rho = \frac{\pi}{6}$ e acima pela esfera $\rho = 2$.
- (b) $\iiint_W (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$, onde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
- (c) $\iiint_W \frac{dx \, dy \, dz}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}$, onde W é o sólido limitado pelas esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, ($a < b$).
- (d) $\iiint_W \frac{dx \, dy \, dz}{z^2}$, onde W é o sólido limitado pelas superfícies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

(e) $\iiint_W \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$, onde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, 1 \leq z\}$.

9. Calcule o volume do sólido limitado:

- (a) Por $z = 4 - x^2 - y^2$ e pelo plano xy .
- (b) Por $z = x^2 + y^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
- (c) Por $z = x^2 + 9y^2$ e $z = 18 - x^2 - 9y^2$.
- (d) Por $z = 2x^2 + 2y^2$ e $z = 48 - x^2 - y^2$.

10. Calcule $\iiint_W \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx \, dy \, dz$, onde $a, b, c > 0$ e o sólido definido por:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}.$$

11. Calcule $\iiint_W x y z \, dx \, dy \, dz$, onde W é formado pelo primeiro octante do elipsóide do exercício anterior, $(x, y, z \geq 0)$.

