

Teorema da Divergência de Gauss

É possível transformar as integrais triplas em integrais de superfície sobre a superfície de contorno de uma região no espaço, e vice-versa. Essa transformação é de interesse prático, pois frequentemente ocorre que um dos dois tipos de integral é mais simples que o outro. E esse procedimento também ajuda na obtenção de equações fundamentais que regem o escoamento de fluidos, a condução térmica etc., conforme veremos. A transformação é realizada pelo *teorema da divergência*, que envolve o **divergente** de uma função vetorial $\mathbf{F} = [F_1, F_2, F_3] = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$, a saber,

$$(1) \quad \operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \quad (\text{Seção 9.8}).$$

TEOREMA 1

Teorema da Divergência de Gauss (Transformação entre uma Integral Tripla e uma de Superfície)

Consideremos que T seja uma região fechada e limitada no espaço cujo contorno seja uma superfície suave por intervalos e orientável S . Consideremos também que $\mathbf{F}(x, y, z)$ seja uma função vetorial contínua e com derivadas parciais primeiras contínuas em algum domínio contendo T . Então,

$$(2) \quad \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA.$$

Em componentes de $\mathbf{F} = [F_1, F_2, F_3]$ e de um vetor normal unitário exterior $\mathbf{n} = [\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma]$ de S (como na Fig. 250), a fórmula (2) torna-se

$$(2^*) \quad \begin{aligned} \iiint_T \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz \\ = \iint_S (F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta + F_3 \cos \gamma) \, dA \\ = \iint_S (F_1 \, dy \, dz + F_2 \, dz \, dx + F_3 \, dx \, dy). \end{aligned}$$

A prova disso será apresentada após o Exemplo 1. A explicação da expressão “região limitada e fechada” foi dada anteriormente, de “suave por intervalos e orientável” foi fornecida na Seção 10.5, e de “domínio contendo T ”, na nota de rodapé 4 da Seção 10.4, referente ao caso bidimensional.

EXEMPLO 1

Cálculo do Valor de uma Integral de Superfície pelo Teorema da Divergência

Antes de provarmos o teorema, mostremos uma aplicação usual dele. Calculemos o valor de

$$I = \iiint_S (x^3 \, dy \, dz + x^2 y \, dz \, dx + x^2 z \, dx \, dy)$$

onde S é a superfície fechada na Fig. 249, consistindo no cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ ($0 \leq z \leq b$) e nos discos circulares $z = 0$ e $z = b$ ($x^2 + y^2 \leq a^2$).

Solução. $F_1 = x^3$, $F_2 = x^2 y$, $F_3 = x^2 z$. Logo, $\operatorname{div} \mathbf{F} = 3x^2 + x^2 + x^2 = 5x^2$. A forma da superfície sugere que introduzamos as coordenadas polares r , θ definidas por $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ (portanto, as coordenadas cilíndricas r , θ , z). Então, o elemento de volume é $dx \, dy \, dz = r \, dr \, d\theta \, dz$, e obtemos

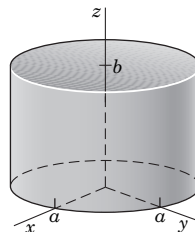


Fig. 249. Superfície S do Exemplo 1

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_T 5x^2 \, dx \, dy \, dz = \int_{z=0}^b \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^a (5r^2 \cos^2 \theta) r \, dr \, d\theta \, dz \\
 &= 5 \int_{z=0}^b \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{a^4}{4} \cos^2 \theta \, d\theta \, dz = 5 \int_{z=0}^b \frac{a^4 \pi}{4} \, dz = \frac{5\pi}{4} a^4 b.
 \end{aligned}$$

PROVA Provemos o teorema da divergência, começando com a primeira equação em (2*). Essa equação é verdadeira se e somente se as integrais de cada componente em ambos os lados forem iguais; isto é,

$$(3) \quad \iiint_T \frac{\partial F_1}{\partial x} \, dx \, dy \, dz = \iint_S F_1 \cos \alpha \, dA,$$

$$(4) \quad \iiint_T \frac{\partial F_2}{\partial y} \, dx \, dy \, dz = \iint_S F_2 \cos \beta \, dA,$$

$$(5) \quad \iiint_T \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dx \, dy \, dz = \iint_S F_3 \cos \gamma \, dA.$$

Primeiramente provemos (5) para uma **região especial** T que seja limitada por uma superfície S orientável e suave por intervalos e que tenha a propriedade segundo a qual qualquer reta paralela a qualquer um dos eixos coordenados e interceptando T possui no máximo *um* segmento de reta (ou um único ponto) em comum com T . Isso implica que T pode ser representada na forma

$$(6) \quad g(x, y) \leq z \leq h(x, y)$$

onde (x, y) varia na projeção ortogonal $\bar{R}$ de T no plano xy . Obviamente, $z = g(x, y)$ representa o “fundo” S_2 de S (Fig. 250), enquanto $z = h(x, y)$ representa o “topo” S_1 de S , podendo haver uma porção vertical restante S_3 de S . (Essa porção S_3 pode degenerar-se em uma curva, como ocorre no caso de uma esfera.)

Para provarmos (5), usamos (6). Como $\mathbf{F}$ é continuamente derivável em algum domínio contendo T , temos

$$(7) \quad \iiint_T \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\bar{R}} \left[\int_{g(x, y)}^{h(x, y)} \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dz \right] dx \, dy.$$

A integração da integral interna $[\cdots]$ fornece $F_3[x, y, h(x, y)] - F_3[x, y, g(x, y)]$. Logo, a integral tripla em (7) é igual a

$$(8) \quad \iint_{\bar{R}} F_3[x, y, h(x, y)] \, dx \, dy - \iint_{\bar{R}} F_3[x, y, g(x, y)] \, dx \, dy.$$

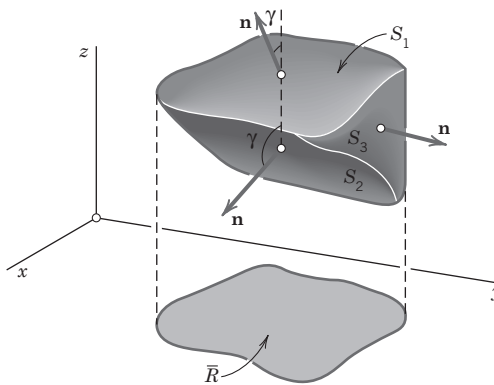


Fig. 250. Exemplo de uma região especial

Mas também obtemos esse mesmo resultado quando calculamos o valor do lado direito de (5); ou seja, [veja também a última linha de (2*)],

$$\begin{aligned}
 \iint_S F_3 \cos \gamma \, dA &= \iint_S F_3 \, dx \, dy \\
 &= + \iint_{\bar{R}} F_3[x, y, h(x, y)] \, dx \, dy - \iint_{\bar{R}} F_3[x, y, g(x, y)] \, dx \, dy,
 \end{aligned}$$

onde a primeira integral sobre $\bar{R}$ fica com um sinal positivo porque $\cos \gamma > 0$ em S_1 na Fig. 250 [como em (5''), veja a Seção 10.6] e a segunda integral fica com um sinal negativo porque $\cos \gamma < 0$ em S_2 . Isso prova (5).

As relações (3) e (4) agora são simples conseqüências disso, sendo obtidas simplesmente renomeando-se as variáveis e usando-se o fato de que, por suposição, T possui representações similares a (6), a saber,

$$\tilde{g}(y, z) \leq x \leq \tilde{h}(y, z) \quad \text{e} \quad \tilde{g}(z, x) \leq y \leq \tilde{h}(z, x).$$

Isso prova a primeira equação em (2*) para regiões especiais. E também implica que (2), devido ao lado esquerdo de (2*), é precisamente a definição da divergência, e que os lados direitos de (2) e da primeira equação em (2*) são iguais, conforme se demonstrou na primeira linha de (4) na última seção. Finalmente, a igualdade dos lados direitos de (2) e (2*), na última linha, é explicada por (5) da última seção.

Isso estabelece o teorema da divergência para regiões especiais.

Para uma região T qualquer que possa ser subdividida em um *número finito* de regiões especiais com o uso de superfícies auxiliares, provamos o teorema ao somarmos os resultados de cada parte separadamente; esse procedimento é análogo ao utilizado na prova do teorema de Green na Seção 10.4. As integrais de superfície tomadas sobre as superfícies auxiliares cancelam-se aos pares, e a soma das integrais de superfície restantes é a integral de superfície sobre a totalidade da superfície de contorno S de T ; as integrais triplas calculadas sobre as partes de T dão uma soma que corresponde à integral tripla sobre T .

O teorema da divergência fica então provado para qualquer região limitada que seja de interesse nos problemas práticos. A extensão para uma região T mais geral, do tipo indicado no teorema, exigiria um certo processo de limite, sendo similar ao caso do teorema de Green visto na Seção 10.4. ■

EXEMPLO 2 Verificação do Teorema da Divergência

Calcule o valor de $\iint_S (7x\mathbf{i} - z\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} \, dA$ sobre a esfera S : $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (a) usando (2), (b) diretamente.

Solução. (a) $\operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{div} [7x, 0, -z] = \operatorname{div} [7x\mathbf{i} - z\mathbf{k}] = 7 - 1 = 6$. Resposta: $6 \cdot (4/3)\pi \cdot 2^3 = 64\pi$.

(b) Podemos representar S por (3) da Seção 10.5 (com $a = 2$) e usaremos $\mathbf{n} \, dA = \mathbf{N} \, du \, dv$ [veja (3*) da Seção 10.6]. Dessa forma,

$$S: \quad \mathbf{r} = [2 \cos v \cos u, \quad 2 \cos v \sin u, \quad 2 \sin v].$$

Então,

$$\mathbf{r}_u = [-2 \cos v \sin u, \quad 2 \cos v \cos u, \quad 0]$$

$$\mathbf{r}_v = [-2 \sin v \cos u, \quad -2 \sin v \sin u, \quad 2 \cos v]$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [4 \cos^2 v \cos u, \quad 4 \cos^2 v \sin u, \quad 4 \cos v \sin v].$$

Ora, em S , temos $x = 2 \cos v \cos u$, $z = 2 \sin v$, de modo que $\mathbf{F} = [7x, 0, -z]$ torna-se, em S ,

$$\mathbf{F}(S) = [14 \cos v \cos u, \quad 0, \quad -2 \sin v]$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(S) \cdot \mathbf{N} &= (14 \cos v \cos u) \cdot 4 \cos^2 v \cos u + (-2 \sin v) \cdot 4 \cos v \sin v \\ &= 56 \cos^3 v \cos^2 u - 8 \cos v \sin^2 v. \end{aligned}$$

Em S temos que fazer a integração em u de 0 a 2π . Isso fornece

$$\pi \cdot 56 \cos^3 v - 2\pi \cdot 8 \cos v \sin^2 v.$$

A integral de $\cos v \sin^2 v$ é igual a $(\sin^3 v)/3$, e a integral de $\cos^3 v = \cos v (1 - \sin^2 v)$ é igual a $\sin v - (\sin^3 v)/3$. Em S , temos $-\pi/2 \leq v \leq \pi/2$, de modo que, substituindo esses limites, obtemos

$$56\pi(2 - 2/3) - 16\pi \cdot 2/3 = 64\pi$$

como era esperado. Para ver a importância do teorema de Gauss, compare a quantidade de trabalho anterior com a que tivemos agora. ■

O Divergente e a Invariância de Coordenadas. A divergência (1) foi definida em termos de coordenadas, mas podemos usar o teorema da divergência para mostrar o fato de que $\operatorname{div} \mathbf{F}$ tem um significado independente das coordenadas.

Para este propósito, primeiramente notemos que as integrais triplas têm propriedades muito semelhantes às das integrais duplas na Seção 10.3. Particularmente, o **teorema do valor médio para integrais triplas** estabelece que para qualquer função contínua $f(x, y, z)$ numa região limitada e simplesmente conectada T há um ponto Q : (x_0, y_0, z_0) em T tal que

$$(9) \quad \iiint_T f(x, y, z) \, dV = f(x_0, y_0, z_0)V(T) \quad (V(T) = \text{volume de } T).$$

Nesta fórmula, trocamos os dois lados, dividimos por $V(T)$ e fazemos $f = \operatorname{div} \mathbf{F}$. Então, pelo teorema da divergência, esta última corresponde a uma integral sobre a superfície de contorno $S(T)$ de T ,

$$(10) \quad \operatorname{div} \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{V(T)} \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \frac{1}{V(T)} \iint_{S(T)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA.$$

Agora escolhamos um ponto $P: (x_1, y_1, z_1)$ em T e fazemos T encolher em torno de P de modo que a distância máxima $d(T)$ entre os pontos de T e P vai a zero. Então, $Q: (x_0, y_0, z_0)$ deve aproximar-se de P . Logo, (10) torna-se

$$(11) \quad \operatorname{div} \mathbf{F}(P) = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \frac{1}{V(T)} \iint_{S(T)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA.$$

Isso prova o

TEOREMA 2

Invariância da Divergência

A divergência de uma função vetorial $\mathbf{F}$ com derivadas parciais primeiras contínuas em uma região T independe da escolha particular das coordenadas cartesianas. Para quaisquer P em T , ela é dada por (11).

A Equação (11) é às vezes usada como uma *definição* da divergência. Então a representação (1) em coordenadas cartesianas pode ser obtida a partir de (11).

Aplicações adicionais sobre o teorema da divergência são fornecidas nos problemas propostos e na seção seguinte, cujos exemplos esclarecerão mais a natureza da divergência.

PROBLEMAS PROPOSTOS 10.7

1–8 APLICAÇÃO DAS INTEGRAIS TRIPLAS: DISTRIBUIÇÃO DE MASSA

Encontre a massa total de uma distribuição de massa de densidade σ numa região T no espaço. (Mostre os detalhes do que fizer.)

- $\sigma = x^2 y^2 z^2$, T é a caixa $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $|z| \leq c$
- $\sigma = x^2 + y^2 + z^2$, T é a caixa $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 9$, $0 \leq z \leq 1$
- $\sigma = \sin x \cos y$, T : $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi - x \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$, $0 \leq z \leq 12$
- $\sigma = e^{-x-y-z}$, T é o tetraedro de vértices $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$
- $\sigma = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2$, T é o cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$, $|z| \leq 2$
- $\sigma = 30z$, T é a região no primeiro octante limitada por $y = 1 - x^2$ e $z = x$. Esboce-a.
- $\sigma = 1 + y + z^2$, T é o cilindro $y^2 + z^2 \leq 9$, $1 \leq x \leq 9$
- $\sigma = x^2 + y^2$, T é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$

9–14 APLICAÇÃO DAS INTEGRAIS TRIPLAS: MOMENTO DE INÉRCIA

$I_x = \iiint_T (y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$ de uma massa de densidade 1 numa região T sobre o eixo x . Encontre I_x quando T for como se segue

- O cubo $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$
- A caixa $0 \leq x \leq a$, $-b/2 \leq y \leq b/2$, $-c/2 \leq z \leq c/2$
- O cilindro $y^2 + z^2 \leq a^2$, $0 \leq x \leq h$
- A esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$

- O cone $y^2 + z^2 \leq x^2$, $0 \leq x \leq h$

- O parabolóide $y^2 + z^2 \leq x$, $0 \leq x \leq h$

- Mostre que, para um sólido de revolução, $I_x = \frac{1}{2}\pi \int_0^h r^4(x) \, dx$. Use isso para resolver os Problemas 11–14.

- Por que, para grandes valores de h , I_x do Problema 13 é maior que I_x do Problema 14? E por que essa desigualdade se inverte para $h = 1$? Dê um motivo físico.

17–25 APLICAÇÃO DO TEOREMA DA DIVERGÊNCIA:

INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA$

Calcule o valor da integral usando o teorema da divergência. (Mostre os detalhes do que fizer.)

- $\mathbf{F} = [x, y, z]$, S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
- $\mathbf{F} = [4x, 3z, 5y]$, S é a superfície do cone $x^2 + y^2 \leq z^2$, $0 \leq z \leq 2$
- $\mathbf{F} = [z - y, y^3, 2z^3]$, S é a superfície de $y^2 + z^2 \leq 4$, $-3 \leq x \leq 3$
- $\mathbf{F} = [3xy^2, yx^2 - y^3, 3zx^2]$, S é a superfície de $x^2 + y^2 \leq 25$, $0 \leq z \leq 2$
- $\mathbf{F} = [\sin y, \cos x, \cos z]$, S é a superfície de $x^2 + y^2 \leq 4$, $|z| \leq 2$
- $\mathbf{F} = [x^3 - y^3, y^3 - z^3, z^3 - x^3]$, S é a superfície de $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$, $z \geq 0$
- $\mathbf{F} = [4x^2, 2x + y^2, x^2 + z^2]$, S é a superfície do tetraedro no Problema 4
- $\mathbf{F} = [4x^2, y^2, -2 \cos \pi z]$, S é a superfície do tetraedro de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$
- $\mathbf{F} = [5x^3, 5y^3, 5z^3]$, S : $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

10.8 Outras Aplicações do Teorema da Divergência

Mostraremos nesta seção que o teorema da divergência tem aplicações fundamentais no escoamento de fluidos, onde ele ajuda a caracterizar as fontes e os sorvedouros de um fluido, no fluxo do calor, onde ele leva à equação

fundamental do calor, e na teoria do potencial, onde fornece as propriedades básicas das soluções da equação de Laplace. Aqui, adotaremos a suposição de que a região T e sua superfície de contorno S são tais que o teorema da divergência se aplica.

EXEMPLO 1 Escoamento de um Fluido. Interpretação Física da Divergência

Usando o teorema da divergência, podemos obter uma interpretação intuitiva do divergente de um vetor. Para esse propósito, consideremos o escoamento de um fluido incompressível (veja a Seção 9.8) de densidade constante $\rho = 1$ e que seja **permanente**, isto é, não varie com o tempo. Esse escoamento é determinado pelo campo do seu vetor velocidade $\mathbf{v}(P)$ em qualquer ponto P .

Consideremos que S seja a superfície de contorno de uma região T no espaço, e que $\mathbf{n}$ seja o vetor normal unitário e exterior a S . Então, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ é a componente normal de $\mathbf{v}$ na direção de $\mathbf{n}$, e $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA|$ é a massa de fluido *saindo de* T (se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} > 0$ em algum P) ou *entrando em* T (se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0$ em P) por unidade de tempo em algum ponto P de S através de uma pequena porção ΔS de S de área ΔA . Logo, a massa total, por unidade de tempo, do fluido que sai de T passando por S dada pela integral de superfície

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA.$$

Dividindo pelo volume V de T , obtemos o **escoamento médio** para fora de T :

$$(1) \quad \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA.$$

Como o escoamento é permanente e o fluido é incompressível, é necessário repor continuamente a quantidade de fluido saindo. Logo, se o valor da integral (1) for diferente de zero, necessariamente ocorrem **fontes** (*fontes positivas ou fontes negativas, chamadas de sorvedouros*) em T , ou seja, pontos onde o fluido é produzido ou desaparece.

Se fizermos T encolher até um ponto fixo P em T , obtemos de (1) a **intensidade da fonte** em P , dada pelo lado direito de (11) na última seção com $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ sendo substituído por $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, ou seja,

$$(2) \quad \operatorname{div} \mathbf{v}(P) = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \frac{1}{V(T)} \iint_{S(T)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA.$$

Logo, o divergente do vetor de velocidade $\mathbf{v}$ de um escoamento incompressível e estacionário corresponde à intensidade da fonte do escoamento no ponto correspondente.

Não há fontes em T se e somente se $\operatorname{div} \mathbf{v}$ é nulo em todos os pontos de T . Logo, para qualquer superfície fechada S em T , temos

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0. \quad \blacksquare$$

EXEMPLO 2 Modelagem do Fluxo do Calor. Equação de Difusão ou do Calor

Experimentos físicos mostram que, num corpo, o calor escapa na direção da temperatura decrescente, e a taxa de fluxo é proporcional ao gradiente da temperatura. Isso significa que a velocidade $\mathbf{v}$ do fluxo térmico num corpo assume a forma

$$(3) \quad \mathbf{v} = -K \operatorname{grad} U$$

onde $U(x, y, z, t)$ é a temperatura, t é o tempo e K é a chamada *condutividade térmica* do corpo; em circunstâncias físicas usuais, K é uma constante. Usando essas informações, obtenha o modelo matemático para o fluxo térmico, dado pela chamada **equação do calor** ou **equação da difusão**.

Solução. Consideremos T uma região no corpo limitada por uma superfície S com um vetor normal unitário exterior $\mathbf{n}$ tal que o teorema da divergência se verifica. Então, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ é a componente de $\mathbf{v}$ na direção de $\mathbf{n}$, e a quantidade de calor deixando T por unidade de tempo é

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA.$$

Essa expressão é obtida de maneira semelhante à integral de superfície correspondente no último exemplo. Usando

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} U) = \nabla^2 U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}$$

(este é o laplaciano; veja (3) na Seção 9.8), temos pelo teorema da divergência e por (3),

$$(4) \quad \begin{aligned} \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA &= -K \iiint_T \operatorname{div}(\operatorname{grad} U) dx dy dz \\ &= -K \iiint_T \nabla^2 U dx dy dz. \end{aligned}$$

Por outro lado, a quantidade total de calor H em T é

$$H = \iiint_T \sigma \rho U dx dy dz$$

onde a constante σ é o calor específico do material do corpo e ρ é a massa específica (= massa por unidade de volume) do material. Logo, a taxa temporal de decréscimo de H é

$$-\frac{\partial H}{\partial t} = - \iiint_T \sigma \rho \frac{\partial U}{\partial t} dx dy dz$$

e esse valor tem que ser igual à quantidade de calor deixando T que havíamos calculado. Portanto, temos de (4),

$$-\iiint_T \sigma \rho \frac{\partial U}{\partial t} dx dy dz = -K \iiint_T \nabla^2 U dx dy dz$$

ou

$$\iiint_T \left(\sigma \rho \frac{\partial U}{\partial t} - K \nabla^2 U \right) dx dy dz = 0.$$

Como isso se verifica para qualquer região T no corpo, o integrando (se contínuo) tem que ser zero em todos os lugares, isto é,

$$(5) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = c^2 \nabla^2 U \quad c^2 = \frac{K}{\sigma \rho}$$

onde c^2 é a chamada *difusividade térmica* do material. Essa equação diferencial parcial é chamada de **equação do calor**, sendo a equação fundamental para a condução térmica. E a prova que obtivemos é outra demonstração eloquente da grande importância do teorema da divergência. No Capítulo 12, veremos métodos para resolver problemas de calor.

A equação do calor é também denominada **equação de difusão**, pois ela também modela os processos de difusão dos movimentos das moléculas, tendendo a nivelar as diferenças de densidade e pressão nos gases e líquidos.

Se o fluxo térmico não depende do tempo, dizemos tratar-se de um **fluxo de calor permanente**. Então, $\partial U / \partial t = 0$, de modo que (5) se reduz à *equação de Laplace* $\nabla^2 U = 0$. Encontramos essa equação nas Seções 9.7 e 9.8, e agora veremos que o teorema da divergência acrescenta fundamentais referentes à natureza das soluções dessa equação. ■

Teoria do Potencial. Funções Harmônicas

A teoria de soluções da **equação de Laplace**

$$(6) \quad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

é chamada de **teoria do potencial**. Dizemos que uma solução de (6) com derivadas parciais de segunda ordem **contínuas** é uma **função harmônica**. Essa continuidade é necessária para a aplicação do teorema da divergência na teoria do potencial, onde o teorema desempenha um papel-chave, que desejamos investigar mais a fundo. Outros detalhes sobre a teoria do potencial serão apresentados nos Capítulos 12 e 18.

EXEMPLO 3 Uma Propriedade Básica das Soluções da Equação de Laplace

No teorema da divergência, os integrandos são $\text{div } \mathbf{F}$ e $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ (Seção 10.7). Se $\mathbf{F}$ é o gradiente de uma função escalar, digamos, $\mathbf{F} = \text{grad } f$, então $\text{div } \mathbf{F} = \text{div } (\text{grad } f) = \nabla^2 f$; veja (3) da Seção 9.8. Além disso, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{n} \cdot \text{grad } f$. Esta é a derivada direcional de f na direção normal exterior a S , que é a superfície de contorno da região T no teorema. Essa derivada é chamada de **derivada normal** (exterior) de f , sendo denotada por $\partial f / \partial n$. Portanto, a fórmula no teorema da divergência torna-se

$$(7) \quad \iiint_T \nabla^2 f dV = \iint_S \frac{\partial f}{\partial n} dA.$$

Este é o análogo tridimensional de (9) na Seção 10.4. Em decorrência das suposições do teorema da divergência, isso fornece o seguinte resultado: ■

TEOREMA 1 Uma Propriedade Básica das Funções Harmônicas

Consideremos que $f(x, y, z)$ seja uma função harmônica em algum domínio D no espaço, que S seja qualquer curva fechada, suave por intervalos e orientável em D , e que toda a região que essa superfície engloba pertença a D . Então, a integral da derivada normal de f calculada sobre S é nula. (Em relação à expressão "suave por intervalos", veja a Seção 10.5.)

EXEMPLO 4 Teoremas de Green

Consideremos que f e g sejam funções escalares tais que $F = f \text{ grad } g$ satisfaça as suposições do teorema da divergência em alguma região T . Então,

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F} &= \text{div } (f \text{ grad } g) \\ &= \text{div} \left(\left[f \frac{\partial g}{\partial x}, f \frac{\partial g}{\partial y}, f \frac{\partial g}{\partial z} \right] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} + f \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial z} + f \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \right) \\
&= f \nabla^2 g + \text{grad } f \cdot \text{grad } g.
\end{aligned}$$

Além disso, como f é uma função escalar,

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} \\
&= \mathbf{n} \cdot (f \text{ grad } g) \\
&= (\mathbf{n} \cdot \text{grad } g) f.
\end{aligned}$$

Ora, $\mathbf{n} \cdot \text{grad } g$ é a derivada direcional $\partial g / \partial n$ de g na direção normal exterior a S . Logo, a fórmula no teorema da divergência torna-se a “primeira fórmula de Green”

$$(8) \quad \iiint_T (f \nabla^2 g + \text{grad } f \cdot \text{grad } g) dV = \iint_S f \frac{\partial g}{\partial n} dA.$$

Dizemos que a fórmula (8) juntamente com as suposições correspondem à *primeira forma do teorema de Green*.

Trocando f e g de posição, obtemos uma fórmula similar. Subtraindo essa fórmula de (8), encontramos

$$(9) \quad \iiint_T (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV = \iint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dA.$$

Esta é a chamada **segunda fórmula de Green** ou (junto com as pressuposições) a *segunda forma do teorema de Green*. ■

EXEMPLO 5 Unicidade das Soluções da Equação de Laplace

Consideremos que f seja harmônica em um domínio D e que f seja nula em todos os lugares numa curva suave por intervalos, fechada e orientável S em D , superfície esta abrangendo toda uma região que pertence a D . Logo, $\nabla^2 g$ é zero em T e a integral de superfície em (8) vale zero, de modo que (8) com $g = f$ fornece

$$\iiint_T \text{grad } f \cdot \text{grad } f dV = \iint_T |\text{grad } f|^2 dV = 0.$$

Como f é harmônica, $\text{grad } f$ e, portanto, $|\text{grad } f|$ são contínuos em T e em S e, uma vez que $|\text{grad } f|$ é não-negativo, para fazer com que a integral sobre T seja nula, $\text{grad } f$ tem que ser o vetor nulo em todos os lugares de T . Logo, $f_x = f_y = f_z = 0$ e f é constante em T e, por causa da continuidade, é igual ao seu valor nulo em S . Isso prova o seguinte teorema:

TEOREMA 2 Funções Harmônicas

Consideremos que $f(x, y, z)$ seja harmônica em algum domínio D e nula em todos os pontos de uma superfície suave por intervalos, fechada e orientável S em D , e que toda a região que essa superfície engloba pertença a D . Então, f é identicamente nula em T .

Esse teorema tem uma consequência importante. Consideremos que f_1 e f_2 sejam funções que satisfaçam as suposições do Teorema 1 e assumam os mesmos valores em S . Então, sua diferença $f_1 - f_2$ satisfaz essas suposições e tem valor nulo em todas as partes de S . Logo, o Teorema 2 implica que

$$f_1 - f_2 = 0 \quad \text{em toda } T,$$

e temos o seguinte resultado fundamental:

TEOREMA 3 Teorema da Unicidade para a Equação de Laplace

Consideremos que T seja uma região que satisfaça as suposições do teorema da divergência e que $f(x, y, z)$ seja uma função harmônica num domínio D que contém T e sua superfície de contorno S . Então, f é determinada unicamente em T pelo seus valores em S .

O problema de determinar uma solução u de uma equação diferencial parcial em uma região T tal que u assumam valores dados numa superfície de limite S de T é chamado de **problema de Dirichlet**⁸. Portanto, podemos reformular o Teorema 3 do seguinte modo:

⁸ PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805–1859), matemático alemão, estudou em Paris com Cauchy e outros e sucedeu Gauss em Göttingen em 1855. Tornou-se conhecido por suas importantes pesquisas sobre séries de Fourier (ele conheceu Fourier pessoalmente) e teoria dos números.

TEOREMA 3*

Teorema da Unicidade para o Problema de Dirichlet

Se as suposições do Teorema 3 são satisfeitas e o problema de Dirichlet para a equação de Laplace tem uma solução em T , logo essa solução é única.

Esses teoremas evidenciam a extrema importância do teorema da divergência na teoria do potencial. ■

PROBLEMAS PROPOSTOS 10.8

- (Funções harmônicas)** Verifique o Teorema 1 para $f = 2x^2 + 2y^2 - 4z^2$ e sendo S a superfície do cubo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.
- (Funções harmônicas)** Verifique o Teorema 1 para $f = y^2 - x^2$ e a superfície de um cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 5$.
- (Primeira fórmula de Green)** Verifique (8) para $f = 3y^2$, $g = x^2$ e S sendo a superfície do cubo no Problema 1.
- (Primeira fórmula de Green)** Verifique (8) para $f = x$, $g = y^2 + z^2$ e S sendo a superfície da caixa $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$.
- (Segunda fórmula de Green)** Verifique (9) para os dados do Problema 3.
- (Segunda fórmula de Green)** Verifique (9) para $f = x^4$, $g = y^2$ e o cubo do Problema 1.
- (Volume como uma integral de superfície)** Mostre que uma região T com uma superfície de contorno S tem o volume

$$V = \frac{1}{3} \int_S r \cos \phi \, dA$$

onde r é a distância entre um ponto variável P : (x, y, z) em S e a origem O e onde ϕ é o ângulo entre a reta orientada OP e a normal exterior a S em P . (Faça um esboço.)

- Encontre o volume de uma esfera de raio a usando a fórmula do Problema 7.
- Mostre que uma região T com uma superfície de contorno S tem o volume

$$\begin{aligned} V &= \int_S \int x \, dy \, dz \\ &= \int_S \int y \, dz \, dx \end{aligned}$$

$$= \int_S \int z \, dx \, dy$$

$$= \frac{1}{3} \int_S (x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy).$$

- PROJETO DE EQUIPE. Teorema da Divergência e Teoria do Potencial.** As Equações (7)–(9) e os Teoremas 1–3 evidenciam a importância do teorema da divergência na teoria do potencial. Para enfatizar isso ainda mais, considere as funções f e g que sejam harmônicas em algum domínio D contendo uma região T com a superfície de contorno S tal que T satisfaça as suposições do teorema da divergência. Prove e ilustre com exemplos que:

$$(a) \int_S g \frac{\partial g}{\partial n} \, dA = \int_T \int |\text{grad } g|^2 \, dV.$$

(b) Se $\partial g / \partial n = 0$ em S , então g é constante em T .

$$(c) \int_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dA = 0.$$

(d) Se $\partial f / \partial n = \partial g / \partial n$ em S , então $f = g + c$ em T , onde c é uma constante.

(e) O laplaciano pode ser representado *independentemente dos sistemas de coordenadas* na forma

$$\nabla^2 f = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \frac{1}{V(T)} \int_S \frac{\partial f}{\partial n} \, dA$$

onde $d(T)$ é a distância máxima entre os pontos de uma região T limitada por $S(T)$ e o ponto no qual o laplaciano é avaliado, e $V(T)$ é o volume de T .

10.9 Teorema de Stokes

Tendo visto a grande utilidade do teorema da divergência de Gauss, passaremos agora para o segundo “grande” teorema deste capítulo, o teorema de Stokes, que transforma integrais de linha em integrais de superfície e vice-versa. Logo, ele generaliza o teorema de Green da Seção 10.4. O teorema de Stokes envolve o rotacional

$$(1) \quad \text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \quad (\text{veja Seção 9.9}).$$

TEOREMA 1

Teorema de Stokes⁹**(Transformação entre Integrais de Superfície e Integrais de Linha)**

Consideremos S uma superfície orientada e suave por intervalos no espaço e que o contorno de S seja formado por uma curva fechada, simples e suave por intervalos. Consideremos também que $\mathbf{F}(x, y, z)$ seja uma função vetorial contínua que possua derivadas parciais primeiras contínuas em um domínio no espaço contendo S . Então,

(2)

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dA = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(s) \, ds.$$

Aqui, $\mathbf{n}$ é um vetor normal unitário a S e, dependendo de $\mathbf{n}$, a integração em torno de C é realizada no sentido mostrado na Fig. 251. Além disso, $\mathbf{r}' = d\mathbf{r}/ds$ é o vetor tangente unitário e s é o comprimento de arco de C .

Em componentes, a fórmula (2) torna-se

$$(2^*) \quad \iint_R \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) N_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) N_2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) N_3 \right] du \, dv = \oint_{\bar{C}} (F_1 \, dx + F_2 \, dy + F_3 \, dz).$$

Aqui, $\mathbf{F} = [F_1, F_2, F_3]$, $\mathbf{N} = [N_1, N_2, N_3]$, $\mathbf{n} \, dA = \mathbf{N} \, du \, dv$, $\mathbf{r}' \, ds = [dx, dy, dz]$ e R é a região com a curva de contorno $\bar{C}$ no plano uv que corresponde a S representada por $\mathbf{r}(u, v)$.

A prova segue após o Exemplo 1

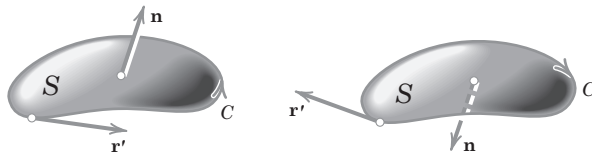
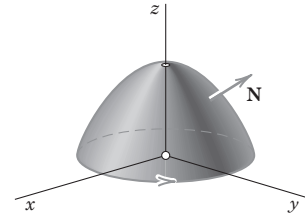


Fig. 251. Teorema de Stokes

Fig. 252. Superfície S do Exemplo 1

EXEMPLO 1 Verificação do Teorema de Stokes

Antes de provarmos o teorema de Stokes, vamos primeiramente nos acostumar a ele, verificando-o para $\mathbf{F} = [y, z, x]$ e sendo S um parabolóide (Fig. 252)

$$z = f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2), \quad z \geq 0.$$

Solução. A curva C , orientada como na Fig. 252, é a circunferência $\mathbf{r}(s) = [\cos s, \sin s, 0]$. Seu vetor tangente unitário é $\mathbf{r}'(s) = [-\sin s, \cos s, 0]$. A função $\mathbf{F} = [y, z, x]$ em C é $\mathbf{F}(\mathbf{r}(s)) = [\sin s, 0, \cos s]$. Logo,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(s)) \cdot \mathbf{r}'(s) \, ds = \int_0^{2\pi} [(\sin s)(-\sin s) + 0 + 0] \, ds = -\pi.$$

Consideremos agora a integral de superfície. Temos que $F_1 = y$, $F_2 = z$, $F_3 = x$, de modo que, em (2*), obtemos

$$\text{rot } \mathbf{F} = \text{rot } [F_1, F_2, F_3] = \text{rot } [y, z, x] = [-1, -1, -1].$$

Um vetor normal a S é $\mathbf{N} = \text{grad } (z - f(x, y)) = [2x, 2y, 1]$. Logo, $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} = -2x - 2y - 1$. Ora, $\mathbf{n} \, dA = \mathbf{N} \, dx \, dy$ (veja (3*) na Seção 10.6 com x, y no lugar de u, v). Usando as coordenadas polares r, θ , definidas por $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ e representando por R a projeção de S sobre o plano xy , obtemos, portanto,

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dA = \iint_R (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dx \, dy = \iint_R (-2x - 2y - 1) \, dx \, dy$$

⁹ Sir GEORGE GABRIEL STOKES (1819–1903), matemático e físico irlandês, que se tornou catedrático em Cambridge em 1849. Também é conhecido por suas importantes contribuições à teoria das séries infinitas e à do escoamento viscoso (equações de Navier-Stokes), geodésica e óptica.

A expressão “curvas e superfícies suaves por intervalos” é definida nas Seções 10.1 e 10.5.

$$\begin{aligned}
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 (-2r(\cos \theta + \sin \theta) - 1)r \, dr \, d\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(-\frac{2}{3}(\cos \theta + \sin \theta) - \frac{1}{2} \right) d\theta = 0 + 0 - \frac{1}{2}(2\pi) = -\pi.
\end{aligned}$$

PROVA Provemos o teorema de Stokes. Obviamente, (2) se verifica caso as integrais de cada componente em ambos os lados de (2*) sejam iguais; isto é,

$$(3) \quad \iint_R \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} N_2 - \frac{\partial F_1}{\partial y} N_3 \right) du \, dv = \oint_{\bar{C}} F_1 \, dx$$

$$(4) \quad \iint_R \left(-\frac{\partial F_2}{\partial z} N_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x} N_3 \right) du \, dv = \oint_{\bar{C}} F_2 \, dy$$

$$(5) \quad \iint_R \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} N_1 - \frac{\partial F_3}{\partial x} N_2 \right) du \, dv = \oint_{\bar{C}} F_3 \, dz.$$

Provemos isso primeiro para uma superfície S que pode ser representada simultaneamente nas formas

$$(6) \quad (a) \, z = f(x, y), \quad (b) \, y = g(x, y), \quad (c) \, x = h(y, z)$$

Provemos (3) usando (6a). Fazendo $u = x$, $v = y$, temos de (6a)

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}(x, y) = [x, y, f(x, y)] = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f\mathbf{k}$$

e, em (2) da Seção 10.6, por cálculo direto,

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = [-f_x, -f_y, 1] = -f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Note que $\mathbf{N}$ é um vetor normal superior a S , visto que ele tem uma componente z positiva. Além disso, $R = S^*$, a projeção de S sobre o plano xy , com a curva de contorno $\bar{C} = C^*$ (Fig. 253). Logo, o lado esquerdo de (3) é

$$(7) \quad \iint_{S^*} \left[\frac{\partial F_1}{\partial z} (-f_y) - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right] dx \, dy.$$

Consideremos agora o lado direito de (3). Transformamos essa integral de linha sobre $\bar{C} = C^*$ numa integral dupla sobre S^* aplicando o teorema de Green [fórmula (1) da Seção 10.4 com $F_2 = 0$]. Isso fornece

$$\oint_{C^*} F_1 \, dx = \iint_{S^*} -\frac{\partial F_1}{\partial y} \, dx \, dy.$$

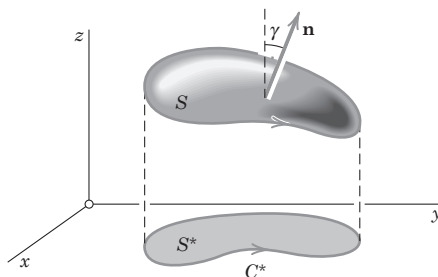


Fig. 253. Prova do Teorema de Stokes

Aqui, $F_1 = F_1(x, y, f(x, y))$. Daí, pela regra da cadeia (veja também o Problema 10 em Problemas Propostos 9.6),

$$-\frac{\partial F_1(x, y, f(x, y))}{\partial y} = -\frac{\partial F_1(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial F_1(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \quad [z = f(x, y)].$$

Vemos que o lado direito disso é igual ao integrando em (7). Isso prova (3). As relações (4) e (5) seguem-se da mesma forma, se usarmos (6b) e (6c), respectivamente. Por adição, obtemos (2*). Isso prova o teorema de Stokes para uma superfície S que pode ser representada simultaneamente nas formas (6a), (6b) e (6c).

Assim como na prova do teorema da divergência, nosso resultado pode ser imediatamente estendido às superfícies S que podem ser decompostas num número finito de superfícies, onde cada uma delas seja do tipo que consideramos. Essa situação encerra a maior parte dos casos de interesse prático. A prova para o caso de uma superfície mais geral S satisfazendo as suposições do teorema requer o uso de limites e é similar à situação vista no caso do teorema de Green na Seção 10.4. ■

EXEMPLO 2 Teorema de Green no Plano como um Caso Especial do Teorema de Stokes

Considere que $\mathbf{F} = [F_1, F_2] = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}$ seja uma função vetorial derivável continuamente num domínio no plano xy contendo uma região fechada, limitada e simplesmente conectada S cujo contorno C é uma curva fechada, simples e suave por intervalos. Então, de acordo com (1),

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Logo, a fórmula no teorema de Stokes agora assume a forma

$$\iint_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \oint_C (F_1 dx + F_2 dy).$$

Isso mostra que o teorema de Green no plano (Seção 10.4) é um caso especial do teorema de Stokes (que precisávamos para provar o último!). ■

EXEMPLO 3 Cálculo do Valor de uma Integral de Linha pelo Teorema de Stokes

Calcule o valor de $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' ds$, onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 4$, $z = -3$, orientado no sentido anti-horário como visto por uma pessoa de pé na origem, e adotando-se um sistema dextrogiro de coordenadas cartesianas.

$$\mathbf{F} = [y, \quad xz^3, \quad -zy^3] = y\mathbf{i} + xz^3\mathbf{j} - zy^3\mathbf{k}.$$

Solução. Como uma superfície S limitada por C , podemos considerar o disco circular plano $x^2 + y^2 \leq 4$ no plano $z = -3$. Então, $\mathbf{n}$ no teorema de Stokes aponta na direção positiva de z ; daí, $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. Então, $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}$ é simplesmente a componente de $\text{rot } \mathbf{F}$ na direção positiva de z . Como $\mathbf{F}$ com $z = -3$ tem as componentes $F_1 = y$, $F_2 = -27x$, $F_3 = 3y^3$, obtemos, portanto, que

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = -27 - 1 = -28.$$

Logo, a integral sobre S no teorema de Stokes é igual a -28 vezes a área 4π do disco S . Isso fornece a resposta $-28 \cdot 4\pi = -112\pi \approx -352$. Confirme isso por cálculo direto, que requer um pouco mais de trabalho. ■

EXEMPLO 4 Significado Físico do Rotacional no Movimento de Fluidos. Circulação.

Considere que S_{r_0} seja um disco circular de raio r_0 e centro P limitado pela circunferência C_{r_0} (Fig. 254), e que $\mathbf{F}(Q) \equiv \mathbf{F}(x, y, z)$ seja uma função vetorial continuamente derivável num domínio contendo S_{r_0} . Então, pelo teorema de Stokes e pelo teorema do valor médio para as integrais de superfície (veja a Seção 10.6),

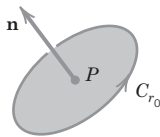


Fig. 254.
Exemplo 4

$$\oint_{C_{r_0}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' ds = \iint_{S_{r_0}} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA = (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}(P^*) A_{r_0}$$

nas quais A_{r_0} é a área de S_{r_0} e P^* é um ponto adequado de S_{r_0} . Isso pode ser escrito como

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}(P^*) = \frac{1}{A_{r_0}} \oint_{C_{r_0}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' ds.$$

No caso do movimento de um fluido com o vetor velocidade $\mathbf{F} = \mathbf{v}$, a integral

$$\oint_{C_{r_0}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}' ds$$

é chamada de **circulação** do fluxo em torno de C_{r_0} . Ela mede o grau com que o movimento do fluido correspondente é uma rotação ao redor da circunferência C_{r_0} . Se agora fizermos r_0 se aproximar de zero, constatamos que

$$(8) \quad (\text{rot } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}(P) = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{1}{A_{r_0}} \oint_{C_{r_0}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}' ds;$$

ou seja, a componente do rotacional na direção normal positiva pode ser considerada como a **circulação específica** (circulação por unidade de área) do fluxo na superfície no ponto correspondente. ■

EXEMPLO 5 Trabalho Realizado no Deslocamento em Torno de uma Curva Fechada

Encontre o trabalho realizado pela força $\mathbf{F} = 2xy^3 \sin z \mathbf{i} + 3x^2y^2 \sin z \mathbf{j} + x^2y^3 \cos z \mathbf{k}$ no deslocamento em torno da curva de interseção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ com o cilindro $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

Solução. Esse trabalho é dado pela integral de linha do teorema de Stokes. Ora, $\mathbf{F} = \text{grad } f$, onde $f = x^2y^3 \sin z$ e $\text{rot } (\text{grad } f) = \mathbf{0}$ (veja (2) na Seção 9.9), de modo que $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = 0$ e o trabalho é 0 pelo teorema de Stokes. Isso concorda com o fato de que o campo nesse caso é conservativo (definição na Seção 9.7). ■

Teorema de Stokes Aplicado à Independência do Caminho

Na Seção 10.2, enfatizamos que o valor de uma integral de linha em geral depende não apenas da função a ser integrada e das extremidades A e B do caminho de integração C , mas também da escolha particular de um caminho de A a B . No Teorema 3 da Seção 10.2, provamos que, se uma integral de linha

$$(9) \quad \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz)$$

(envolvendo funções F_1, F_2, F_3 contínuas e com derivadas parciais primeiras contínuas) é independente do caminho num domínio D , então $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ em D . E, na Seção 10.2, afirmamos inversamente que o fato de que $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ em todos os lugares em D implica a independência do caminho de (9) em D , desde que D seja *simplesmente conectado*. Uma prova disso necessita do teorema de Stokes e pode agora ser dada como se segue.

Consideremos que C seja qualquer caminho fechado em D . Como D é simplesmente conectado, podemos encontrar uma superfície S em D limitada por C . O teorema de Stokes se aplica e fornece

$$\oint_C (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' ds = \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA$$

para a direção apropriada em C e um vetor normal $\mathbf{n}$ em S . Como $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ em D , a integral de superfície e, portanto, a integral de linha, valerão zero. Isso e o Teorema 2 da Seção 10.2 implicam que a integral (9) é independente do caminho em D . Isso completa a prova.

PROBLEMAS PROPOSTOS 10.9

1–8 INTEGRAÇÃO DIRETA DAS INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE

Avalie a integral $\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA$ diretamente para $\mathbf{F}$ e S dados.

- $\mathbf{F} = [4z^2, 16x, 0]$, $S: z = y$ ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$)
- $\mathbf{F} = [0, 0, 5x \cos z]$, $S: x^2 + y^2 = 4, y \geq 0, 0 \leq z \leq \frac{1}{2}\pi$
- $\mathbf{F} = [-e^y, e^z, e^x]$, $S: z = x + y$ ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$)
- $\mathbf{F} = [3 \cos y, \cosh z, x]$, S é o quadrado $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, z = 4$
- $\mathbf{F} = [e^{2z}, e^z \sin y, e^z \cos y]$, $S: z = y^2$ ($0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 1$)
- $\mathbf{F} = [z^2, x^2, y^2]$, $S: z^2 = x^2 + y^2, y \geq 0, 0 \leq z \leq 2$
- $\mathbf{F} = [z^2, \frac{3}{2}x, 0]$, S é o quadrado $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, z = 1$
- $\mathbf{F} = [y^3, -x^3, 0]$, $S: x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$
- Verifique o teorema de Stokes para $\mathbf{F}$ e S no Problema 7.
- Verifique o teorema de Stokes para $\mathbf{F}$ e S no Problema 8.

11–18 CÁLCULO DO VALOR DE $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' ds$

Calcule estas integrais de linha pelo teorema de Stokes, no sentido horário como visto por uma pessoa de pé na origem, para as seguintes $\mathbf{F}$ e C . Suponha que as coordenadas cartesianas sejam dextrogras. (Mostre os detalhes.)

- $\mathbf{F} = [-3y, 3x, z]$, C é a circunferência $x^2 + y^2 = 4, z = 1$
- $\mathbf{F} = [4z, -2x, 2x]$, C é a interseção de $x^2 + y^2 = 1$ e $z = y + 1$
- $\mathbf{F} = [y^2, x^2, -x, +z]$, em torno do triângulo de vértices $(0, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1)$
- $\mathbf{F} = [y, xy^3, -zy^3]$, C é o círculo $x^2 + y^2 = a^2, z = b$ ($b > 0$)
- $\mathbf{F} = [y, z^2, x^3]$, C como no Problema 12
- $\mathbf{F} = [x^2, y^2, z^2]$, C é a interseção de $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $z = y^2$
- $\mathbf{F} = [\cos \pi y, \sin \pi y, 0]$, em torno do retângulo de vértices $(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)$
- $\mathbf{F} = [z, x, y]$, C como no Problema 13
- (Não-aplicabilidade do teorema de Stokes)** Calcule o valor de $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}' ds$, $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)^{-1}[-y, x]$, $C: x^2 + y^2 = 1, z = 0$, orientada no sentido horário. Por que o teorema de Stokes não pode ser aplicado? Que resultado (falso) ele forneceria?
- PROJETO ESCRITO. Grad, Div, Rot em Conexão com as Integrais.** Faça uma lista de idéias e de resultados sobre esses tópicos vistos neste capítulo. Veja se consegue rearranjar ou combinar as partes do seu material. Então subdivida-o entre 3–5 partes e resolva os detalhes de cada uma. Não inclua as provas, mas apenas exemplos simples e típicos de sua própria escolha, que permitam uma melhor compreensão do material.

QUESTÕES E PROBLEMAS DE REVISÃO DO CAPÍTULO 10

- Liste os tipos de integrais neste capítulo e como os teoremas integrais relacionam alguns deles.
- De que modo o trabalho de uma força variável pode ser expresso por uma integral?
- Diga de memória como você faz para calcular o valor de uma integral de linha e de uma integral dupla.
- O que você se lembra sobre a independência do caminho? Por que ela é importante?
- De que modo usamos o teorema de Stokes em conexão com a independência do caminho?
- Dê a definição de rotacional. Por que ele é importante neste capítulo?
- Como podemos transformar uma integral dupla ou uma integral de superfície em uma integral de linha?
- O que é orientação de uma superfície? Qual é o seu papel em conexão com as integrais de superfície?

9. Enuncie de memória o teorema da divergência e suas aplicações.
10. Enuncie a equação de Laplace. Onde, na física, ela é importante? Quais propriedades de suas soluções foram por nós discutidas?

11–20 INTEGRAIS DE LINHA $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ (INTEGRAIS DE TRABALHO)

Avalie, com $\mathbf{F}$ e C conforme dadas, pelo método que mais lhe pareça adequado. Lembre-se de que, se $\mathbf{F}$ é uma força, a integral fornece o trabalho realizado em um deslocamento ao longo de C . (Mostre os detalhes.)

11. $\mathbf{F} = [x^2, y^2, z^2]$, C é o segmento retilíneo de $(4, 1, 8)$ a $(0, 2, 3)$
12. $\mathbf{F} = [\cos z, -\sin z, -x \sin z, -y \cos z]$, C é o segmento retilíneo de $(-2, 0, \frac{1}{2}\pi)$ a $(4, 3, 0)$
13. $\mathbf{F} = [x - y, 0, e^z]$, C : $y = 3x^2$, $z = 2x$ para x de 0 a 2.
14. $\mathbf{F} = [yz, 2xz, xy]$, C é a circunferência $x^2 + y^2 = 9$, $z = 1$ no sentido anti-horário
15. $\mathbf{F} = [-3y^3, 3x^3 + \cos y, 0]$, C é a circunferência $x^2 + y^2 = 16$, $z = 0$ no sentido anti-horário
16. $\mathbf{F} = [\sin \pi y, \cos \pi y, \sin \pi x]$, C é o contorno de $0 \leq x \leq 1/2$, $0 \leq y \leq 2$, $z = 2x$
17. $\mathbf{F} = [9z, 5x, 3y]$, C é a elipse $x^2 + y^2 = 9$, $z = x + 2$
18. $\mathbf{F} = [\cosh x, e^{4y}, \tan z]$, C : $x^2 + y^2 = 4$, $z = x^2$. (Esboce C .)
19. $\mathbf{F} = [z^2, x^3, y^2]$, C : $x^2 + y^2 = 4$, $x + y + z = 0$
20. $\mathbf{F} = [x^2, y^2, y^2x]$, C é a hélice $\mathbf{r} = [2 \cos t, 2 \sin t, 6t]$ de $(2, 0, 0)$ a $(0, 2, 3\pi)$

21–25 INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE, CENTRO DE GRAVIDADE

Encontre as coordenadas $\bar{x}, \bar{y}$ do centro de gravidade de uma massa de densidade $f(x, y)$ na região R . (Esboce R . Mostre os detalhes.)

21. $f = 2xy$, R é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$
22. $f = 1$, R : $0 \leq y \leq 1 - x^2$
23. $f = 1$, R : $x^2 + y^2 \leq a^2$, $y \geq 0$
24. $f = x^2 + y^2$, R : $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
25. $f = 2x^2$, R é a região abaixo de $y = x + 2$ e acima de $y = x^2$.

26–35 INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA$

Calcule o valor destas integrais diretamente ou, se possível, pelo teorema da divergência. (Mostre os detalhes.)

26. $\mathbf{F} = [2x^2, 4y, 0]$, S : $x + y + z = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$
27. $\mathbf{F} = [y, -x, 0]$, S : $3x + 2y + z = 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$
28. $\mathbf{F} = [x - y, y - z, z - x]$, S a esfera de raio 5 e centro 0
29. $\mathbf{F} = [y^2, x^2, z^2]$, S é a superfície de $x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq 5$
30. $\mathbf{F} = [y^3, x^3, 3z^2]$, S é a porção do parabolóide $z = x^2 + y^2$, $z \leq 4$
31. $\mathbf{F} = [\sin^2 x, -y \sin 2x, 5z]$, S é a superfície da caixa $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $|z| \leq c$
32. $\mathbf{F} = [1, 1, a]$, S : $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$, $z \geq 0$
33. $\mathbf{F} = [x, xy, z]$, S : $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq h$
34. $\mathbf{F}$ como no Problema 33, S é o contorno completo de $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq h$
35. $\mathbf{F} = [e^y, 0, ze^x]$, S é o retângulo de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 0)$, $(0, 0, 5)$, $(1, 2, 5)$

RESUMO DO CAPÍTULO 10

Cálculo Integral Vetorial. Teoremas Integrais

O Capítulo 9 estendeu o cálculo *diferencial* para vetores, isto é, para as funções vetoriais $\mathbf{v}(x, y, z)$ ou $\mathbf{v}(t)$. Similarmente, este Capítulo 10 estende o cálculo *integral* para as funções vetoriais. Este assunto envolve as *integrais de linha* (Seção 10.1), *integrais duplas* (Seção 10.3), *integrais de superfície* (Seção 10.6) e *integrais triplas* (Seção 10.7) e os três “grandes” teoremas de transformação dessas integrais em outras, a saber, o teorema de Green (Seção 10.4), de Gauss (Seção 10.7) e de Stokes (Seção 10.9).

O análogo da integral definida do cálculo é uma **integral de linha** (Seção 10.4)

$$(1) \quad \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$$

onde C : $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)] = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ ($a \leq t \leq b$) é uma curva no espaço (ou no plano). Fisicamente, (1) pode representar o trabalho realizado por uma força (variável) em um deslocamento. Outros tipos de integrais de linha e suas aplicações também são discutidos na Seção 10.1.

A **independência do caminho** de uma integral de linha em um domínio D significa que a integral de uma dada função sobre qualquer caminho C com extremidades P e Q tem o mesmo valor para todos os caminhos de P a Q que se situam em D ; aqui, P e Q são fixos. Uma integral (1) é independente do caminho em D se e somente se a forma diferencial $F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$, com F_1, F_2, F_3 contínuos, for **exata** em D (Seção 10.2). Além disso, se $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{F} = [F_1, F_2, F_3]$, tiver derivadas parciais primeiras contínuas num domínio *simplesmente conectado* D , logo a integral (1) independe do caminho em D (Seção 10.2).

Teoremas Integrais. A fórmula do **teorema de Green no plano** (Seção 10.4)

$$(2) \quad \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C (F_1 dx + F_2 dy)$$

transforma **integrais duplas** sobre uma região R no plano xy em integrais de linha sobre a curva de contorno C de R , e vice-versa. Sobre outras formas de (2), veja a Seção 10.4.

Similarmente, a fórmula do **teorema da divergência de Gauss** (Seção 10.7)

$$(3) \quad \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA$$

transforma **integrais triplas** sobre uma região T no espaço em integrais de superfície sobre a superfície de limite S de T , e vice-versa. A fórmula (3) implica as **fórmulas de Green**

$$(4) \quad \iiint_T (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dV = \iint_S f \frac{\partial g}{\partial n} \, dA,$$

$$(5) \quad \iiint_T (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) \, dV = \iint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) \, dA.$$

Finalmente, a fórmula do **teorema de Stokes** (Seção 10.9)

$$(6) \quad \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dA = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(s) \, ds$$

transforma **integrais de superfície** sobre uma superfície S em integrais de linha sobre a curva de contorno C de S e vice-versa.