5 APLICAÇÕES

O teorema da Divergência é amplamente usado na física e na engenharia, mais precisamente na eletroestática e na dinâmica de fluídos. Veremos a seguir alguns exemplos de aplicações do teorema em algumas regiões sobre as quais as integrais triplas podem ser calculadas.

Exemplo 5.1. (SWOKOWSKI, 1994) Seja Q a região delimitada pelo cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$ e pelos planos $z = 0$ e $z = 3$. Denotaremos por S a superfície de Q. Se $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$, use o teorema da divergência para calcular

$$\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}ds$$

Resolução. A figura 27 ilustra a superfície S e algumas posições típicas de **n.** Como $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2)$ temos, pelo teorema da divergência

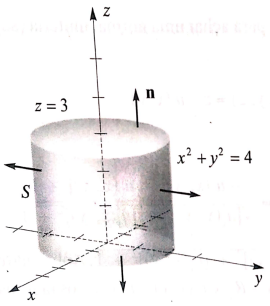
$$\iint_S F \cdot n \; dS = 3 \iiint_Q (x^2 + y^2 + z^2) \; dV.$$

Calculando a integral tripla por coordenadas cilíndricas, temos:

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \; ds &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^3 (r^2 + z^2) r dz dr d\theta \\
&= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[r^2 z + \frac{1}{3} z^3 \right]_0^3 dr d\theta \\
&= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (3r^2 + 9) r dr d\theta \\
&= 3 \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{4} r^4 + \frac{9}{2} r^2 \right]_0^2 d\theta = 3 \int_0^{2\pi} 30 d\theta \\
&= 90 \left[\theta \right]_0^{2\pi} = 180\pi
\end{aligned}$$

□

Figura 27 – Superfície S.



Swokowski (1994, p.618)

Exemplo 5.2. (SILVA; MATOS, 2018) Calcular o fluxo do campo $\mathbf{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xz\vec{k}$, através da fronteira do tetraedro determinados pelos planos coordenados e pelo plano $x + y + z = 1$.

Resolução. Temos que $div(\mathbf{F}) = x$ e se Ω representa a região delimitada pelo tetraedro, usamos o Teorema de Gauss e obtemos

$$\begin{aligned}\iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}) &= \iiint_\Omega div(\mathbf{F})dV = \iiint_\Omega xdxdydz \\ &= \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} xdzdydx = \int_0^1\int_0^{1-x} x(1-x-y)dydx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2dx = \frac{1}{24}.\end{aligned}$$

□

Exemplo 5.3. (SILVA; MATOS, 2018) Seja S a fronteira do sólido Ω, delimitada pelo cilindro $z = 4 - x^2$ e pelos planos $y = 5$, $y = 0$ e $z = 0$. Calcular o fluxo do campo $\mathbf{F} = (x^3 + senz)\vec{i} + (x^2y + cosz)\vec{j} + exp(x^2 + y^2)\vec{k}$, através de S.

Resolução. Primeiro faça um esboço da superfície e de sua orientação. O cálculo direto da integral de superfície é bastante trabalhoso, e ele torna-se mais simples quando usamos o Teorema de Gauss. Como
$L = x^3 + senz$, $M = x^2y + cosz$ e $N = exp(x^2 + y^2)$,
temos que $div\mathbf{F} = L_x + M_y + N_z = 3x^2 + x^2 + 0 = 4x^2$
e do Teorema de Gauss, resulta

$$\iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})dS = 4\iiint_\Omega x^2dxdydz = 4\int_{-2}^2\int_0^{4-x^2}\int_0^5 x^2dydzdx = \frac{512}{3}.$$

□

Exemplo 5.4. (SILVA; MATOS, 2018)(Equação Fundamental da Eletrostática) Consideremos uma superfície fechada S (uma esfera, por exemplo) contendo uma carga pontual q no seu interior, situada no ponto P_0; e representemos por $\mathbf{E}(P)$ o campo elétrico no ponto P de S; produzido pela carga q, como ilustra a Figura 28

Resolução. Se $\mathbf{r} = P_0P$ e $r = |\mathbf{r}|$, como consequência da Lei de Coulomb, temos que

$$\mathbf{E}(P) = kq\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\nabla\phi,$$

onde $\phi = kq/r$ e o potencial eletrostático, e o fluxo do campo $\mathbf{E}$ através de S é, portanto,

$$\iint\limits_S (\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\ dS = kq \iint\limits_S \frac{1}{r^2}(\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\ \mathbf{n})\ dS = kq \iint\limits_S \frac{\cos\alpha dS}{r^2}. \tag{5.1}$$

Se representarmos por $d\omega$ a área elementar sobre a esfera unitária, teremos $d\omega = \dfrac{cos\alpha dS}{r^2}$ e a partir de (5.1) obtemos a seguinte relação:

$$\iint\limits_S (\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\ dS = kq \iint\limits_S \frac{\cos\alpha dS}{r^2}\ dS = kq \iint\limits_S\ d\omega = 4k\pi q.$$

No caso de uma distribuição de carga Q, com densidade $\rho(x, y, x)$, a carga total na região Ω, delimitada por S, é

$$Q = \iiint\limits_\Omega \rho(x, y, z)dV$$

e o fluxo do campo elétrico será

$$\iint\limits_S (\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\ dS = 4k\pi Q = 4k\pi \iiint\limits_\Omega \rho(x, y, z)dV. \tag{5.2}$$

Comparando (5.2) com a Fórmula de Gauss, obtemos

$$\iiint\limits_\Omega [4k\pi - div(\mathbf{E})]\ dV = 0,$$

de onde resulta a Equação Fundamental da Eletrostática

$$div(\mathbf{E}) = 4k\pi\rho. \tag{5.3}$$

Se ϕ representa o potencial eletrostático no ponto P_0, isto é,

$$\phi(P_0) = k \iint\limits_S \frac{\rho}{r}\ dS \tag{5.4}$$

então $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ e obtemos de (5.3)

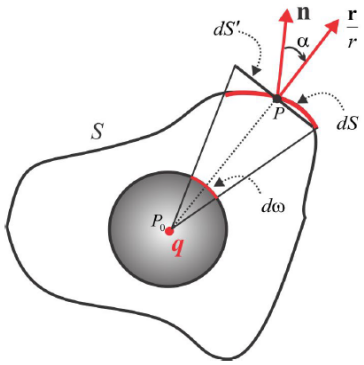
$$\Delta\phi = div(\Delta\phi) = -div(\mathbf{E}) = -4k\pi\rho,$$

de onde resulta a equação de Poisson para o potencial:

$$\Delta\phi = -4k\pi\rho.$$

□

Figura 28 – Fluxo do campo elétrico.



Silva e Matos (2018, p.266)

Exemplo 5.5. (SILVA; MATOS, 2018) Calcular o potencial eletrostático e o campo elétrico, em um ponto $P(0;0;\xi)$ do eixo z, devido a uma distribuição uniforme de carga elétrica no disco $S : x^2 + y^2 \leq a^2; z = 0$:

Resolução. Segue de (5.4) que o potencial eletrostático no ponto $P(\theta, \eta, \xi)$ devido a distribuição de carga de densidade $\rho(x, y, z)$ sobre o disco S é

$$\phi(\delta, \eta, \xi) = \iint_S \frac{\rho(x, y, z)}{r}\, dS,$$

$$r = \sqrt{(\delta - x)^2 + (\eta - y)^2} + (\xi - z)^2,$$

e admitindo que a densidade ρ seja constante, o potencial no potencial no ponto $(0, 0, \xi)$ do eixo z será:

$$\begin{aligned}
\phi(0,0,\xi) &= \iint_S \frac{\rho dS}{\sqrt{x^2+y^2+\xi^2}} = \rho \iint_{x^2+y^2\leq a^2} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+\xi^2}} \\
&= \rho \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{r dr d\theta}{\sqrt{r^2+\xi^2}} \\
&= 2\pi\rho \int_{\xi^2}^{a^2+\xi^2} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = 2\pi\rho \left[\sqrt{a^2+\xi^2} - |\xi|\right].
\end{aligned}$$

□

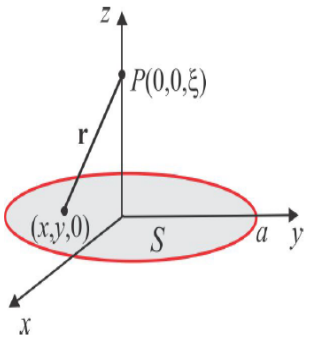
O campo elétrico no ponto P pode ser calculado diretamente, usando a Lei de Coulomb:

$$\mathbf{E} = \iint_S k\rho \frac{r}{r^3} dS$$

ou usando o potencial, como faremos neste caso:

$$\mathbf{E}(0,0,\xi) = -\nabla\phi(0,0,\xi) = -2\pi\rho \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\sqrt{a^2+\xi^2} - |\xi|\right]\mathbf{k} = -2\pi\rho\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+\xi^2}} - \frac{1}{|\xi|}\right]\mathbf{k}.$$

Figura 29 – Distribuição de carga sobre o disco.



Silva e Matos (2018, p.267)

Exemplo 5.6. (THOMAS, 2009) Seja D uma região no espaço limitada por uma superfície fechada e orientada S. Se $v(x, y, z)$ é o campo de velocidade de um fluído que escoa através de D, $\delta = \delta(t, x, y, z)$ é a densidade do fluído em (x, y, z) no tempo t, e $\mathbf{F} = \delta\mathbf{v}$, então a **equação da continuidade** da hidrodinâmica afirma que

$$\nabla \cdot \mathbf{F} + \frac{\partial \delta}{\partial t} = 0$$

Se as funções envolvidas têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas, a equação evolui naturalmente a partir do teorema da divergência, como veremos a seguir.

Resolução. Primeiro, a integral

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\theta$$

é a taxa na qual a massa deixa D através de S (deixa porque $\mathbf{n}$ é a normal exterior). Para saber por que, considere um pedaço de área sobre a superfície conforme figura 30.

Em um curto intervalo de tempo Δt, o volume ΔV do fluído que escoa através do pedaço é aproximadamente igual ao volume de um cilindro com área de base Δv e altura $(v\Delta) \cdot \mathbf{n}$, onde v é um vetor velocidade com origem em um ponto do pedaço:

$$\Delta\ t$$

A massa desse volume de fluído é de cerca de

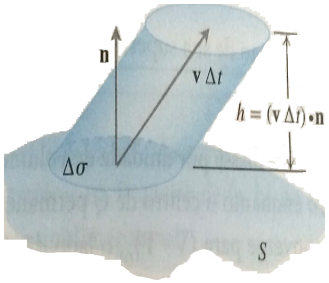
$$\Delta V \approx \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\ \Delta\ \theta$$

$$\Delta m \approx \delta\mathbf{v} \cdot n\Delta\theta\Delta\ t$$

assim a taxa à qual a massa escoa para fora de D através do pedaço é de cerca de

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} \approx \delta v \cdot n\Delta\theta$$

Figura 30 – Volume do Cilindro



Fonte: Thomas (2009, p. 541)

Isso leva a aproximação

$$\frac{\sum \Delta m}{\Delta t} \approx \sum \Delta V \cdot \mathbf{n} \Delta\theta$$

como uma estimativa da taxa média à qual a massa escoa através de S. Por fim, fazendo $\Delta\theta \longrightarrow 0$ e $\Delta t \longrightarrow 0$, temos a taxa instantânea à qual a massa deixa D através de S como

$$\frac{dm}{dt} = \iint_S \delta v \cdot \mathbf{n} \; d\theta$$

a qual para o nosso escoamento específico é

$$\frac{dm}{dt} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \; n \; d\theta$$

Agora, seja B uma esfera sólida centrada em um ponto Q no escoamento. O valor médio de $\nabla \cdot \mathbf{F}$ sobre B é

$$\frac{1}{volume\ de\ B} \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$

É uma consequência da continuidade do divergente que $\nabla \cdot \mathbf{F}$ realmente assuma esse valor em algum ponto P em B. Assim,

$$(\nabla \cdot \mathbf{F})_p = \frac{1}{volume\ de\ B} \iiint_B \nabla \cdot \; \mathbf{F} \; dV = \frac{\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\theta}{volume\ de\ B}$$

$$= \frac{taxa\ \text{à}\ qual\ a\ massa\ deixa\ B\ ao\ longo\ de\ superfície\ S}{volume\ de\ B}$$

A fração à direita descreve diminuição de massa por unidade de volume. Agora, faça o raio de B tender a zero enquanto o centro de Q permanece fixo. O lado esquerdo da equação acima converge para $(\nabla \cdot \mathbf{F})_Q$, o lado direito para $(-\partial\delta/\partial t)_Q$. A igualdade desses dois limites é a equação da continuidade

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -\frac{\partial\theta}{\partial t}$$

A equação da continuidade "explica"$\nabla \cdot \mathbf{F}$: o divergente de F em um ponto é a taxa à qual a densidade do fluido está diminuindo lá. O teorema da divergência

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \ n \ d\theta = \iiint_D \nabla \cdot \ \mathbf{F} \ dV$$

agora diz que a diminuição líquida na densidade do fluido na região D se deve à massa transportada através da superfície S. Assim, o teorema é uma afirmação sobre a conservação da massa.

□

Exemplo 5.7. Encontre o fluxo exterior líquido do campo

$$\mathbf{F} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\rho^3},$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

através da fonteira da região $D : 0 < a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2$.

Resolução. O fluxo pode ser calculado integrando-se $\nabla \cdot \mathbf{F}$ sobre D. Temos

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-1}{2}}(2x) = \frac{x}{\rho}$$

e

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x\rho^{-3}) = \rho^{-3} - 3x\rho^{-4}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3x^2}{\rho^5}$$

Analogamente,

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3y^2}{\rho^5}$$

e

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3z^2}{\rho^5}$$

Portanto,

$$div\mathbf{F} = \frac{3}{\rho^3} - \frac{3}{\rho^5}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{3}{\rho^3} - \frac{3r^2}{\rho^5} = 0$$

e

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV = 0$$

Dessa forma, a integral de $\nabla \cdot F$ sobre D é zero e o fluxo exterior líquido através da fronteira de D é zero. Há mais a aprender com esse exemplo. O fluxo que deixa D através da esfera interior S_a é o oposto do fluxo que deixa D através da esfera exterior S_b (porque a soma desses fluxos é zero.) Assim, o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S_a no sentido que se afasta da origem é igual ao fluxo de $\mathbf{F}$ através de S_b no sentido que se afasta da origem. Assim, o fluxo de $\mathbf{F}$ através de uma esfera centrada na origem é independente do raio da esfera.

Qual é esse fluxo? Para encontrá-lo, calculamos diretamente a integral de fluxo. A normal unitária exterior sobre a esfera de raio a é

$$\mathbf{n} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{a}$$

Portanto, sobre a esfera,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{a^3} \cdot \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{a} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^4} = \frac{a^2}{a^4} = \frac{1}{a^2}$$

e

$$\iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot \ n \ d\theta = \frac{1}{a^2} \iint_{S_a} d\theta = \frac{1}{a^2}(4\pi \ a^2) = 4\pi$$

O fluxo exterior de $\mathbf{F}$ através de qualquer esfera centrada na origem é 4π □

Exemplo 5.8. Há ainda mais a aprender com o exemplo 5.7. Em eletromagnetismo, o campo elétrico criado por uma carga pontual q localizada na origem é

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\mathbf{r}|^2}\left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\rho^3}$$

onde ϵ_0 é uma constante física, $\mathbf{r}$ é o vetor posição do ponto (x,y,z) e $\rho = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Na notação do exemplo 5.7,

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\mathbf{F}$$

Os cálculos no Exemplo 5.7 mostram que o fluxo exterior de $\mathbf{E}$ através de qualquer esfera centrada na origem é q/ϵ_0, mas esse resultado não está restrito a esferas. O fluxo exterior de $\mathbf{E}$ através de qualquer superfície fechada S que engloba a origem (e à qual o teorema da divergência se aplica) é também q/ϵ_0. Para sabermos por que, temos apenas que imaginar uma esfera grande S_a centrada na origem e englobando a superfície S. Como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\nabla \cdot \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

quando $\rho > 0$, a integral de $\nabla \cdot \mathbf{E}$ sobre a região D entre S e S_a é zero. Assim, pelo teorema da divergência,

$$\iint_{\partial D} \mathbf{E} \cdot \ n \ d\theta = 0$$

e o fluxo de E através de S no sentido que se afasta da origem deve ser o mesmo que o fluxo de E através de S_a no sentido que se afasta da origem, o qual é $q|\epsilon_0$. Essa afirmação, chamada Lei de Gauss, também se aplica a distribuição de cargas mais gerais que aquelas consideradas aqui, como pode ver em quase todos os textos de físicas.

Lei de Gauss:

$$\iint_S \mathbf{E} \ \cdot \ n \ d\theta = \frac{q}{\epsilon_0}$$