

Cálculo Diferencial e Integral IV



EQUAÇÃO DIFERENCIAL (ED)

Chamamos de **equação diferencial** toda equação em que aparece pelo menos uma derivada ou diferencial da função incógnita.

Exemplos:

$$\frac{dy}{dx} + x^2 y^3 = 0$$

$$(x^2 + y^2)dx + (x + y)dy = 0$$

$$y'' + (y')^3 = \text{sen}x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

EQUAÇÕES DIF. ORDINÁRIAS E PARCIAIS

Uma **Eq. Dif. Ordinária (EDO)** envolve funções de uma variável e suas derivadas, enquanto uma **Eq. Dif. Parcial** envolve funções de muitas variáveis e suas derivadas.

Exemplos:

$$\frac{dy}{dx} + x^2 y^3 = 0$$

→ EDO

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

→ EDP

ORDEM E GRAU DE UMA EQ. DIFERENCIAL

Vamos considerar as equações abaixo:

$$1) \frac{dy}{dx} = 3x - 1 \quad \rightarrow 1^{\text{a}} \text{ ordem e } 1^{\circ} \text{ grau}$$

$$2) x dy - y dx = 0 \quad \rightarrow 1^{\text{a}} \text{ ordem e } 1^{\circ} \text{ grau}$$

$$3) \left(x - \frac{d^3 y}{dx^3} \right)^2 - y \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(1 + x \frac{d^4 y}{dx^4} \right)^3 \quad \rightarrow 4^{\text{a}} \text{ ordem e } 3^{\circ} \text{ grau}$$

$$4) \left(x - y \frac{d^3 y}{dx^3} \right)^2 = 1 + \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^4 \quad \rightarrow 3^{\text{a}} \text{ ordem e } 2^{\circ} \text{ grau}$$

SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL

Consideremos a equação diferencial $y'' + 4y = 0$.

Será que $y = \cos 2x - 3\sin 2x$ é solução da Equação diferencial dada?

Precisamos determinar a segunda derivada e substituir na equação diferencial, verificando se realmente será uma identidade.

Equação diferencial $y'' + 4y = 0$.

$$y = \cos 2x - 3\sin 2x$$

TIPOS DE SOLUÇÃO DE UMA EQ.DIFERENCIAL

Solução geral

é a solução que contém tantas constantes arbitrárias quantas são as unidades da ordem da equação.

Exemplos: $y(x) = x^2 + C$

$$y(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2x}$$

Solução particular

é toda solução obtida da solução geral, quando atribuímos valores particulares às constantes.

PROBLEMA DE VALOR INICIAL

Seja $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$ a solução geral da eq. Dif.
 $y'' + 5y' + 6y = 0$.

Encontre a solução do problema de valor inicial (PVI) considerando $y(0) = 2$ e $y'(0) = 3$.

➤ **Vamos encontrar o valor das constantes C_1 e C_2 .**

Seja $y(0) = 2$, onde $t = 0$ e $y = 2$.

$$y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} \Rightarrow 2 = C_1 e^{-2(0)} + C_2 e^{-3(0)} \Rightarrow \boxed{2 = C_1 + C_2}$$

Seja $y'(0) = 3$, onde $t = 0$ e $y' = 3$.

$$y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} \Rightarrow y' = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t}$$

$$3 = -2C_1 e^{-2(0)} - 3C_2 e^{-3(0)} \Rightarrow \boxed{3 = -2C_1 - 3C_2}$$

Vamos resolver o sistema de equações.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ -2C_1 - 3C_2 = 3 \end{cases}$$

$$C_1 = 9 \quad e \quad C_2 = -7$$

Logo, a solução particular será: **$y = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$**

EQUAÇÃO DE VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

Chamamos equação de variáveis separáveis a equação do tipo $M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$, onde $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são

- funções de uma única variável,
- produtos com fatores de uma única variável,
- constantes.

1. Resolver a eq. diferencial de variáveis separáveis

$$\frac{dy}{dx} = 3x - 1$$

2. Resolver a eq. diferencial de variáveis separáveis
 $y \, dx - x \, dy = 0$.

2. Resolver a eq. diferencial de variáveis separáveis
 $y \, dx - x \, dy = 0$.

Para separarmos as variáveis, precisamos
dividir a equação por xy .

$$\frac{y}{xy} dx - \frac{x}{xy} dy = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} dx - \frac{1}{y} dy = 0$$

$$\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{y} dy = 0 \Rightarrow \ln|x| - \ln|y| = C$$

Utilizando as propriedades de Log, teremos:

$$\ln \left| \frac{x}{y} \right| = C \Rightarrow \left| \frac{x}{y} \right| = e^C \Rightarrow \frac{x}{y} = \pm e^C \Rightarrow \frac{x}{y} = K$$

$$yK = x \Rightarrow y = x/k$$

Cálculo Diferencial e Integral IV

Atividades



1. Resolver a eq. diferencial de variáveis separáveis

$$dx + e^{3x} dy = 0$$

1. Resolver a eq. diferencial de variáveis separáveis

$$dx + e^{3x} dy = 0 \Rightarrow \frac{dx}{e^{3x}} + \frac{e^{3x} dy}{e^{3x}} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{e^{3x}} + dy = 0$$

$$\int e^{-3x} + \int dy = 0 \Rightarrow -\frac{e^{-3x}}{3} + y = k \Rightarrow y = \frac{e^{-3x}}{3} + k$$

EXERCÍCIOS

2. Resolver a eq. diferencial de variáveis separáveis

$$y' = \frac{y+1}{x}$$

EXERCÍCIOS

2. Resolver a eq. diferencial de variáveis separáveis

$$y' = \frac{y+1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x} \Rightarrow xdy - (y+1)dx = 0$$

$$\frac{xdy}{x.(y+1)} - \frac{(y+1)dx}{x.(y+1)} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y+1} - \frac{dx}{x} = 0$$

$$\int \frac{dy}{y+1} - \int \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \ln |y+1| - \ln |x| = k$$

$$\ln \left| \frac{y+1}{x} \right| = k \Rightarrow \left| \frac{y+1}{x} \right| = e^k \Rightarrow \frac{y+1}{x} = \pm e^k$$

$$\frac{y+1}{x} = \pm e^k \Rightarrow \frac{y+1}{x} = k_1 \Rightarrow y+1 = x.k_1$$

Logo, $y = k_1 x - 1$