Aplicações de Edo's de 1ª Ordem

Lei de Newton do Esfriamento/Aquecimento

A taxa segundo a qual a temperatura de um corpo varia é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio que o rodeia, denominada temperatura ambiente.

Se $T(t)$ representar a temperatura de um corpo no instante t, T_m a temperatura do meio que o rodeia e dT/dt a taxa segundo a qual a temperatura do corpo varia, a lei de Newton do esfriamento/resfriamento é convertida na sentença matemática.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

Onde k é uma constante de proporcionalidade. Em ambos os casos, esfriamento ou aquecimento, se T_m for uma constante, é lógico que $k<0$

Esfriamento de um objeto

Quando um objeto é tirado do forno, sua temperatura é 300ºF. Três minutos mais tarde, sua temperatura é 200ºF. Sabendo que a temperatura do meio é de 70ºF. Determine a função que representa a Temperatura ?

Esfriamento de um objeto

Quando um objeto é tirado do forno, sua temperatura é 300ºF. Três minutos mais tarde, sua temperatura é 200ºF. Sabendo que a temperatura do meio é de 70ºF. Determine a função que representa a Temperatura ?

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 70) \quad , \quad T(0) = 300$$

Esfriamento de um objeto

Quando um objeto é tirado do forno, sua temperatura é 300ºF. Três minutos mais tarde, sua temperatura é 200ºF. Sabendo que a temperatura do meio é de 70ºF. Determine a função que representa a Temperatura ?

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 70) \quad , \quad T(0) = 300$$

Precisamos resolver o problema de valor inicial e determinar o valo de k de tal forma que

T(3) = 200

Esfriamento de um objeto

Quando um objeto é tirado do forno, sua temperatura é 300ºF. Três minutos mais tarde, sua temperatura é 200ºF. Sabendo que a temperatura do meio é de 70ºF. Determine a função que representa a Temperatura ?

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 70) \quad , \quad T(0) = 300$$

Precisamos resolver o problema de valor inicial e determinar o valo de k de tal forma que

T(3) = 200

$$\frac{dT}{(T-70)} = kdt$$

$$\frac{dT}{(T-70)} = kdt$$

$$\ln(T-70) = kt + C$$

$$T - 70 = e^{kt+C}$$

$$T - 70 = e^{kt}.e^{C}$$

$$T - 70 = C_1 e^{kt}$$

$$T = 70 + C_1 e^{kt}$$

Quanto t =0, T=300 e portanto

$$300 = 70 + C_1 e^{k0}$$

$$300 = 70 + C_1$$

$$C_1 = 300 - 70$$

$$C_1 = 230$$

Dessa forma

$$T = 70 + 230e^{kt}$$

E com a medição T(3)=200 leva que

$$200 = 70 + 230e^{k3}$$

$$230e^{k3} = 200 - 70$$

$$230e^{k3} = 130$$

$$e^{k3} = \frac{130}{230}$$

$$\ln e^{k3} = \ln \frac{13}{23}$$

$$3k = \ln \frac{13}{23}$$

$$k = \frac{1}{3} \ln \frac{13}{23}$$

$$k = -0{,}19018$$

Assim , T(t) = 70 +230 $e^{-0{,}19018\,t}$

Crescimento e Decaimento

O problema de Valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = kx, \qquad x(t_0) = x_0$$

Onde k é uma constante de proporcionalidade, serve como modelo para diversos fenômenos envolvendo crescimento ou decaimento. Conhecendo a população em algum instante inicial arbitrário t_0, podemos usar a solução da equação acima para predizer a população no futuro – isto é . Em instantes $t > t_0$.

Em física e química, a equação $\frac{dx}{dt} = kx$ é vista como uma reação de primeira ordem – isto é, uma reação cuja taxa ou velocidade $\frac{dx}{dt}$ é diretamente proporcional à quantidade x de uma substância não transformada ou remanescente no instante t.

A decomposição ou decaimento de U-238 (urânio) por radioatividade em Th-234 (tório) é uma reação de primeira ordem.

Exemplo: Crescimento de Bactérias

Uma cultura tem inicialmente P_0 bactérias. Em $t = 1\ h$, o número medido de bactérias é de $\frac{3}{2}P_0$. Se a taxa de crescimento for proporcional ao número de bactérias presente no instante t, $P(t)$, determine o tempo necessário pras triplicar o número de bactérias.

Solução

Em primeiro lugar, resolvemos a equação diferencial substituindo o símbolo x por P. Tomando $t_0 = 0$, a condição inicial é $P(0) = P_0$. Usamos então a observação empírica de que $P(1) = \frac{3}{2}P_0$ para determinar a constante de proporcionalidade k.

Observe que a EDO $\frac{dP}{dt} = kP$ é ao mesmo tempo separável e linear. Colocando-a na forma padrão de uma EDO Linear de primeira ordem,

$$\frac{dP}{dt} - kP = 0$$

$$\frac{dP}{dt} - kP = 0$$

1) $\int -k\,dt = -\,kt$

2) $\int k\,dt = kt$

3) e^{-kt}

4) e^{kt}

5) $\int 0\,.\,e^{-kt}dt = C$

$$P = e^{kt}[C]$$

Em $t = 0$, temos $P_0 = Ce^0 = C$. Assim sendo, $P(t) = P_0\,e^{kt}$.

Em $t = 1$ temos que

$$\frac{3}{2}P_0 = P_0 e^k \quad ou$$

$$e^k = \frac{3}{2}.$$

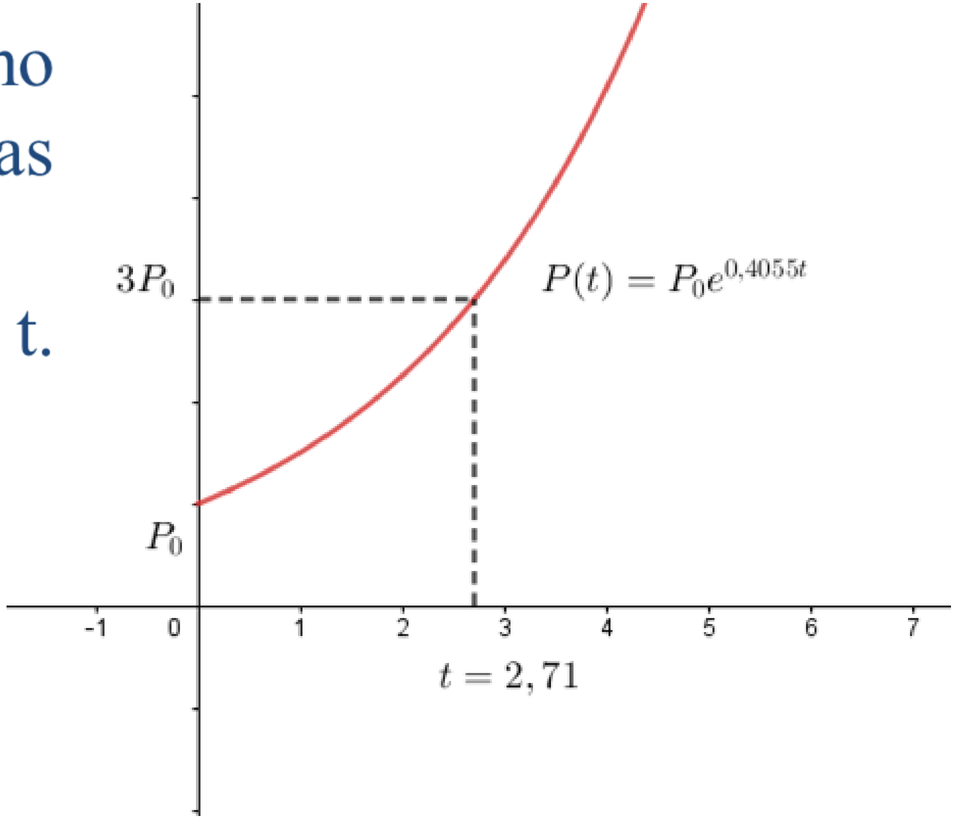
Da última equação, obtemos $k = \ln\frac{3}{2} = 0{,}4055$ e portanto,

$P(t) = P_0 e^{0{,}4055t}$.

Para encontrar o instante no qual o número de bactérias triplicou, resolvemos $3P_0 = P_0 e^{0{,}4055t}$ para t. Segue que

$$0{,}4055t = \ln 3 \;\; ou$$

$$t = \frac{\ln\ 3}{0{,}4055} \approx 2{,}71\ h$$



Exemplo: Meia-vida

Em física, meia-vida é uma medida da estabilidade de uma substância radioativa. A meia-vida é simplesmente o tempo necessário para a metade dos átomos em uma quantidade inicial A_0 desintegrar-se ou transformar-se em átomos de outro elemento. Quanto maior for a meia-vida de uma substância, mais estável ela será.

Por exemplo, a meia-vida do rádio altamente radioativo, Ra-226, é mais ou menos 1700 anos.
Em1700 anos a metas, a metade de uma quantidade Ra-226 é transformada em radônio, Rn-222.

O isótopo de urânio que ocorre mais frequentemente, U-238, tem uma meia-vida de aproximadamente 4,5 bilhões de anos.

Em cerca de 4,5 bilhões de a metade de uma quantidade de U-238 é transformada em chumbo, Pb-206.

Exemplo: Meia-vida do Plutônio

Um reator regenerador converte urânio 238 relativamente estável no isótopo plutônio 239. Depois de 15 anos determinou-se que 0,043% da quantidade inicial A_0 de plutônio desintegrou-se. Ache a meia-vida desse isótopo, se a taxa de desintegração for proporcional à quantidade remanescente.

Solução:

Seja A(t) a quantidade de plutônio remanescente no instante t.

$$\frac{dA}{dt} = kA. \quad A(0) = A_0$$

$$\frac{dA}{dt} = kA. \quad A(0) = A_0$$

$$\frac{dA}{A} = kdt$$

$$\ln A = kt + C$$

$$A = e^{kt+C}$$

$$A = e^{kt}.\,e^{C}$$

$$A(t) = A_0 e^{kt}$$

Se 0,043% dos átomos de A_0 tiverem se desintegrado, restarão 99,957% de substância.

Para encontrar a constante de decaimento k usamos
$0{,}99957\ A_0 = A(15)$.
Ou seja,
$0{,}99957\ A_0 = A_0 e^{15k}$.
$0{,}99957 = e^{15k}$

$$\ln(0{,}99957) = \ln\left(e^{15k}\right)$$
$$\ln(0{,}99957) = 15k$$
$$k = \frac{\ln(0{,}99957)}{15}$$
$$k = -0{,}0002867$$

Portanto a meia-vida corresponde ao valor do tempo no qual $A(t) = \frac{1}{2} A_0$.

$$\frac{1}{2}A_0 = A_0 e^{-0,00002867t}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-0,00002867t}$$

$$\ln\frac{1}{2} = \ln e^{-0,00002867t}$$

$$\ln\frac{1}{2} = -0,00002867t$$

$$t = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{-0,00002867}$$

$$t \approx 24,180\ anos$$