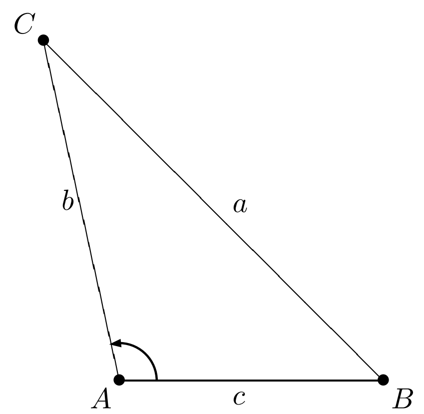
Capítulo 4

Produtos

4.1 Produtos escalares

Neste tópico iremos estudar um novo tipo de operação entre vetores do plano e do espaço. Vamos fazer inicialmente uma consideração geométrica, como segue.

Seja um triângulo ABC com medidas dos lados a, b e c como na figura.



A *lei dos cossenos* da geometria plana estabelece que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$.

Quando o ângulo $\widehat{A}$ é reto, o triângulo é retângulo com catetos b e c e hipotenusa a, e a lei acima se reduz ao Teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$.

Usando linguagem vetorial, podemos considerar os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{BC}$, de modo que $|\vec{u}| = c$, $|\vec{v}| = b$ e $|\vec{w}| = a$.

Temos $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ e portanto $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$.

Podemos reescrever a lei dos cossenos na forma:

$$|\vec{v}-\vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2 - 2|\vec{v}||\vec{u}|\cos\measuredangle(\overbrace{\vec{u}}^{\overrightarrow{AB}}, \overbrace{\vec{v}}^{\overrightarrow{AC}})$$

Assim, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm direções perpendiculares entre si quando $|\vec{v}||\vec{u}|\cos\measuredangle(\vec{u},\vec{v}) = 0$.

O *produto escalar* entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é definido como <u>número real</u> $|\vec{u}||\vec{v}|\cos\measuredangle(\vec{u},\vec{v})$ e é denotado por $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ou $<\vec{u},\vec{v}>$.

Obs: A notação $\vec{u}\cdot\vec{v}$ é mais comum em livros de Cálculo e Física, entquanto que a notação $<\vec{u},\vec{v}>$ aparece nos livros de Álgebra Linear. Nesta disciplina, estaremos usando a notação $\vec{u}\cdot\vec{v}$. Nos comandos de programas de computação algébrica, como o Maple, este produto é chamado de "dot product"(`dotprod` — dot=ponto em inglês).

É claro que se $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ for nulo temos $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Definição: *Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são <u>ortogonais</u> se $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.* Notação: $\vec{u}\perp\vec{v}$

Mais geralmente, o produto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ permite calcular o ângulo entre dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, fazendo $\measuredangle(\vec{u},\vec{v}) = \text{arccos}\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right)$. Convencionamos tomar o ângulo entre dois vetores não nulos sempre entre 0 e π radianos.

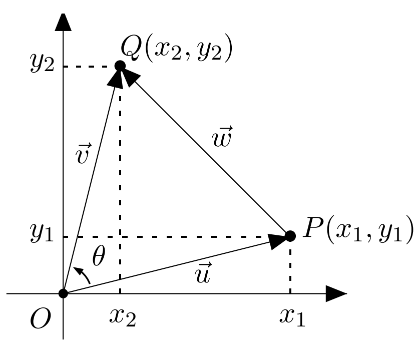
O ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é *agudo* (entre 0 e $\pi/2$) se $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$ e *obtuso* (entre $\pi/2$ e π) se $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$.

4.1.1 Produto escalar em um sistema de coordenadas

O Cálculo do produto escalar entre dois vetores fica extremamente simples se estes vetores são dados em sistemas de coordenadas cartesianas ortogonais.

Se $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ então
$\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1y_1 + x_2y_2$.

<u>Caso do plano $\mathbb{R}^2$:</u>



De fato:

Sejam $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ de modo que $\overrightarrow{OP} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{OQ} = \vec{v}$

Seja θ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Então $\hookrightarrow$

$\vec{w} = \vec{v} - \vec{u} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Escrevendo a lei dos cossenos para o triângulo OPQ, temos

$$\begin{array}{ccccccc} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 & = & [x_1^2 + y_1^2] & + & [x_2^2 + y_2^2] & - & 2\vec{u} \cdot \vec{v} \\ |\overrightarrow{PQ}|^2 & = & |\overrightarrow{OP}|^2 & + & |\overrightarrow{OQ}|^2 & - & 2|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\cos\theta \end{array}$$

Desenvolvendo, temos: $\cancel{x_2^2} - 2x_1x_2 + \cancel{x_1^2} + \cancel{y_2^2} - 2y_1y_2 + \cancel{y_1^2} = \cancel{x_2^2} + \cancel{y_2^2} + \cancel{x_1^2} + \cancel{y_1^2} - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$, donde $-2(x_1x_2 + y_1y_2) = -2\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Logo, $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2$ e $\cos(\theta) = \cos \measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$.

Caso do espaço $\mathbb{R}^3$:

A idéia geométrica é exatamente a mesma. Mostre como exercício que *dados* $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ *e* $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, *o procuto escalar* $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$ *é dado por* $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

4.1.2 Propriedades dos produtos escalares

As seguintes propriedades são elementares e a sua verificação é um exercício.

1. $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$ para todo vetor $\vec{v}$.

   Segue que $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$ para qualquer vetor $\vec{v}$ e a igualdade só se verifica quando $\vec{v} = \vec{0}$.

2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (propriedade comutativa)

3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (propriedade distributiva)

   Para a verificação, utilize coordenadas.

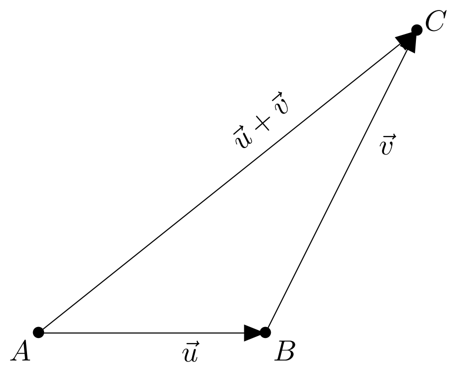
4. $(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$, para escalares λ e vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$.

5. $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$: Desigualdade de Cauchy-Schwarz

   De $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$ segue a *Desigualdade de Cauchy-Schwarz* $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$, já que $|\cos \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})| \leq 1$.

6. $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$: Desigualdade Triangular

   Da desigualdade de Cauchy-Schwarz podemos deduzir a chamada *Desigualdade Triangular*:



$$|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$$

O nome da desigualdade vem da Geometria Euclidiana:

Se A, B e C são vértices de um triângulo, então um lado tem medida de comprimento sempre menor que a soma das medidas dos outros dois lados.

Se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ então o lado AC representa o vetor $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$. Então $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = (\vec{u}+\vec{v}) \cdot (\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2$, usando as propriedades distributiva e comutativa do produto escalar e também que $\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{v}|^2$ (exercícios!).

Como $\vec{u}\cdot\vec{v} \leq |\vec{u}\cdot\vec{v}|$ (um número real é menor ou igual a seu módulo) e $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$ (desigualdade de Cauchy-Schwarz), temos:

$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 \leq |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}| + |\vec{v}|^2 = (|\vec{u}| + |\vec{v}|)^2$.

Logo, $|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

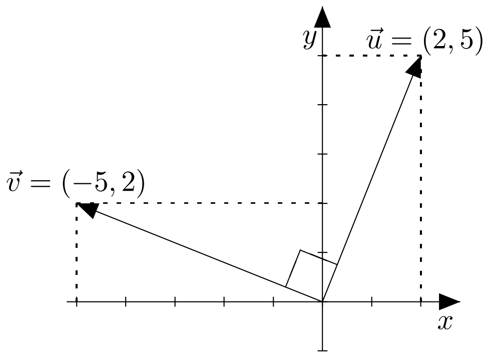
A igualdade se verifica se, e somente se, $|\cos\measuredangle(\vec{u},\vec{v})| = 1$.

Isto significa que ou $\measuredangle(\vec{u},\vec{v}) = 0$ ou $\measuredangle(\vec{u},\vec{v}) = \pi$, e em ambos os casos, temos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos, ou seja, são l.d.

4.1.3 Sobre bases ortonormais e ortogonais

Lembremos que uma base de $\mathbb{R}^2$ é um conjunto de 2 vetores l.i. $\mathcal{B} = \{\vec{u},\vec{v}\}$.

Dizemos que uma base $\mathcal{B}$ é uma <u>base ortogonal</u> se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem ortogonais ($\vec{u} \perp \vec{v}$), isto é, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.



Por exemplo, se $\vec{u} = (2,5)$ e $\vec{v} = (-5,2)$, $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ é uma base ortogonal pois $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-5) + 5 \times 2 = -10 + 10 = 0$ e os vetores não são nulos.
Geometricamente,
$\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ radianos.

Se, além de ortogonais entre si, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem <u>unitários</u>, então a base é dita *ortonormal.*

Por exemplo, $\mathcal{B} = \left\{ \dfrac{(2,5)}{\sqrt{29}}, \dfrac{(2,5)}{\sqrt{29}} \right\}$ formada pelos versores de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ do exemplo anterior, é uma base ortonormal.

Claro que a base canônica $\mathcal{C} = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\} = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

De maneira análoga, uma *base ortogonal* do espaço cartesiano $\mathbb{R}^3$ é um conjnunto de 3 vetores não nulos, dois a dois ortogonais (e consequentemente são l.i.):

$$\mathcal{B} = \{\vec{u}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{u}_2 = (x_2, y_2, z_2), \vec{u}_3 = (x_3, y_3, z_3)\} \text{ satisfazendo } \begin{cases} \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \\ \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = 0 \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = 0 \end{cases}$$

Observação: Podemos mostrar que um conjunto de vetores não nulos e dois a dois ortogonais é l.i.

Provemos para $n = 3$ (espaço). De fato, seja $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ satisfazendo essas condições.

Consideremos uma combinação linear $\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3 = \vec{0}$ e mostremos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, para verificar que são l.i.

Efetuando o produto escalar por $\vec{u}_1$ em ambos os membros da equação, temos $(\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3) \cdot \vec{u}_1 = \vec{0} \cdot \vec{u}_1$, donde $\lambda_1 \overbrace{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}^{|\vec{u}_1|^2} + \lambda_2 \overbrace{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1}^{0} + \lambda_3 \overbrace{\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1}^{0} = \lambda_1 |\vec{u}_1|^2 = 0$, donde $\lambda_1 = 0$ já que $|\vec{u}_1| \neq 0$.

Analogamente, efetuando o produto escalar por $\vec{u}_2$ segue que $\lambda_2 = 0$ e por $\vec{u}_3$, que $\lambda_3 = 0$.

Uma base ortogonal do espaço (cartesiano $\mathbb{R}^3$) é *ortonormal* se os vetores forem <u>2 a 2 ortogonais</u>

e, além disso, unitários.

A base canônica $\mathcal{C} = \{\vec{\imath} = (1,0,0), \vec{\jmath} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ é uma base ortonormal do espaço.

Observação: Se M á uma matriz cujas linhas são as coordenadas dos vetores de uma base ortonormal, em relação a uma base ortonormal, então M é uma matriz cuja transposta é a inversa (ou seja, M é uma *matriz ortogonal*). E vale a reciproca: as linhas de uma matriz ortogonal formam uma base ortonormal, considerando as coordenadas em relação a uma base ortonormal.
Vejamos no caso 2×2: Suponha a base ortonormal $\{\vec{u} = (a,b), \vec{v} = (c,d)\}$, donde $a^2+b^2 = 1 = c^2+d^2$ e $ac+bd = 0$. Então $M \cdot M^t = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Assim, $M^{-1} = M^t$.

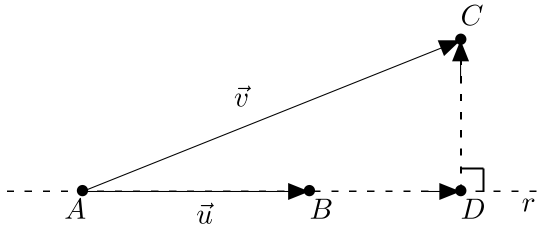
Reciprocamente, se $M \cdot M^t = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, devemos ter $a^2+b^2 = 1 = c^2+d^2$ e $ac+bd = 0$, donde a base $\{\vec{u} = (a,b), \vec{v} = (c,d)\}$ é ortonormal.

O Caso 3×3 é análogo e fica como exercício.
Como exercício, mostre que a base $\{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta), (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\}$ é uma base ortonormal do plano, verificando que a matriz cujas linhas são os vetores é ortogonal. Verifique também que as colunas também formam uma base ortonormal.

4.1.4 Projeção ortogonal

Utilizando produto escalar, podemos definir a *projeção ortogonal* de um vetor $\vec{v}$ na direção de um vetor não nulo $\vec{u}$.

Sejam dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sendo $\vec{u}$ não nulo. Considere as representações geométricas $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Suponhamos inicialmente que A, B e C não sejam colineares.



Pela Geometria Euclidiana, podemos considerar a reta pelo ponto C que é perpendicular à reta suporte de AB, determinando o ponto D como sendo o pé da perpendicular sobre a reta $r(A,B)$.

O triângulo ADC é retângulo por construção, com ângulo reto em D. Vetorialmente, temos $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$, onde $\overrightarrow{AD}$ é paralelo ao vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ é ortogonal ao vetor $\vec{u}$.

O vetor $\overrightarrow{AD}$ assim obtido é chamado de *projeção ortogonal do vetor* $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ *na direção do vetor* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e é denotado por $Proj_{\vec{u}}^{\vec{v}}$.

Quando A, B e C são coplanares, o próprio vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ é, por si, a sua projeção na direção de $\vec{u}$.

Chamando $Proj_{\vec{u}}^{\vec{v}}$ de $\vec{v}_1$ e $\overrightarrow{DC}$ de $\vec{v}_2$ temos uma decomposição $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ onde $\vec{v}_1$ e $\vec{u}$ são l.d. e $\vec{v}_2 \cdot \vec{u} = 0$ (por serem ortogonais).

Sendo $\vec{v}_1$ e $\vec{u}$ paralelos (isto é, l.d.) existe um escalar λ que satisfaz $\vec{v}_1 = \lambda\vec{u}$. Então podemos escrever $\vec{v} = \lambda\vec{u} + \vec{v}_2$, em que $\lambda\vec{u} = \vec{v}_1 = Proj_{\vec{u}}^{\vec{v}}$.

Fazendo o produto escalar com $\vec{u}$ em ambos os lados da equação, temos
$\vec{v} \cdot \vec{u} = (\lambda\vec{u} + \vec{v}_2) \cdot \vec{u} = \lambda\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v}_2 \cdot \vec{u} = \lambda\vec{u} \cdot \vec{u}$, onde $\vec{u} \cdot \vec{u} \neq 0$.

Logo, o escalar λ que caracteriza a projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ é dado por $\lambda = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}$.

Assim, $Proj_{\vec{u}}^{\vec{v}} = \left(\dfrac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}\right)\vec{u} = \vec{v}_1$. A componente ortogonal $\vec{v}_2$ de $\vec{v}$ é dada por $\vec{v}_2 = \vec{v} - Proj_{\vec{u}}^{\vec{v}}$.

Por exemplo, se $\vec{v} = (2,3,4)$ e $\vec{u} = (1,0,2)$, temos que $|\vec{u}|^2 = 1^2 + 0^2 + 2^2 = 5$ e $\vec{v} \cdot \vec{u} = 2 \times 1 + 3 \times 0 + 4 \times 2 = 10$. Logo, $Proj_{\vec{u}}^{\vec{v}} = \frac{10}{5}\vec{u} = 2(1,0,2) = (2,0,4)$.

Em particular, se $\vec{u}$ for unitário (norma 1), então $Proj_{\vec{u}}^{\vec{v}} = (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u}$.

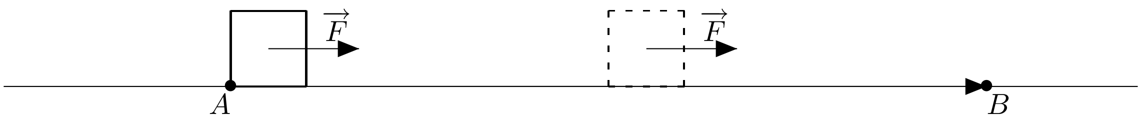
Por exemplo, para $\vec{v} = (x,y,z) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, temos que $Proj_{\vec{\imath}}^{\vec{v}} = [(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}) \cdot \vec{\imath}]\ \vec{\imath} = [x(\vec{\imath} \cdot \vec{\imath}) + y(\vec{\jmath} \cdot \vec{\imath}) + z(\vec{k} \cdot \vec{\imath})]\ \vec{\imath} = x\,\vec{\imath}$, já que $\vec{\imath} \cdot \vec{\imath} = 1$, $\vec{\jmath} \cdot \vec{\imath} = 0$ e $\vec{k} \cdot \vec{\imath} = 0$. Analogamente, $Proj_{\vec{\jmath}}^{\vec{v}} = y\,\vec{\jmath}$ e $Proj_{\vec{k}}^{\vec{v}} = z\,\vec{k}$.

4.1.5 Aplicações na Física

O conceito de projeção ortogonal que acabamos de estudar está ligado a um importante conceito de Física.

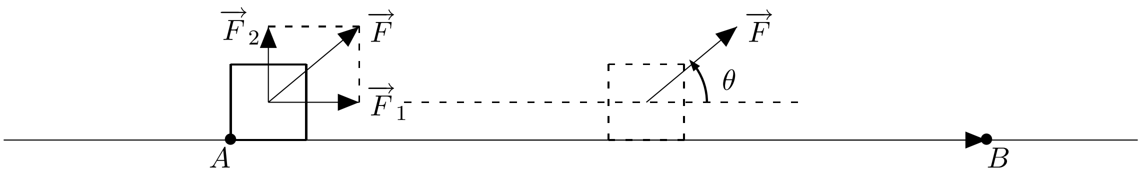
Imaginemos que uma partícula (um corpo) se desloca numa trajetória retilínea, sujeita a uma força $\vec{F}$ constante, na direção e sentido do deslocamento.

Considerando A e B dois pontos desta trajetória, o estabelecimento de um sentido do deslocamento de A para B permite considerar o *vetor deslocamento* representado pelo segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, com $|\overrightarrow{AB}|$ = distância deslocada.



Sendo $\overrightarrow{F}$ um vetor paralelo ao deslocamento, com intensidade constante ($|\overrightarrow{F}|$ constante), o *trabalho realizado por* $\overrightarrow{F}$ *no deslocamento de* A *para* B é definido como $\pm|\overrightarrow{F}||\overrightarrow{AB}|$, onde o sinal é negativo se a força $\overrightarrow{F}$ atua no sentido oposto ao deslocamento. Neste caso, dizemos que $\overrightarrow{F}$ realiza um trabalho contra o deslocamento.

Considere agora uma força $\overrightarrow{F}$ constante, mas de direção não paralela ao vetor $\overrightarrow{AB}$, agindo sobre a partícula (corpo) durante o deslocamento. Seja θ o ângulo que $\overrightarrow{F}$ faz com o deslocamento $\overrightarrow{AB}$.



Neste caso geral, $\overrightarrow{F}$ se decompõe como $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$, em que $\overrightarrow{F_1}$ é a componente paralela ao deslocamento $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{F_2}$ é a componente ortogonal ao deslocamento. A componente $\overrightarrow{F_2}$ não contribui para o trabalho realizado por $\overrightarrow{F}$, e é a componente $\overrightarrow{F_1}$, na direção de $\overrightarrow{AB}$ que o realiza.

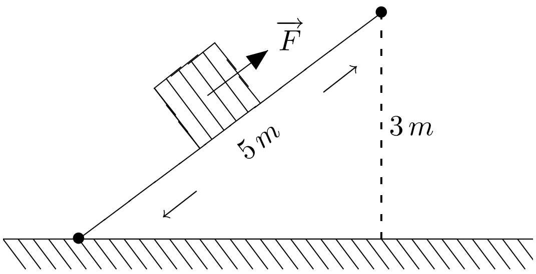
O trabalho realizado por $\overrightarrow{F}$ durante o deslocamento $\overrightarrow{AB}$ é dado por $T = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{F}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta$, onde $\theta = \measuredangle(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{AB})$.

Notemos que, sendo $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$ com $\overrightarrow{F_2} \perp \overrightarrow{AB}$, temos que $T = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{AB}$ que é o trabalho realizado pela $\overrightarrow{F_1}$.

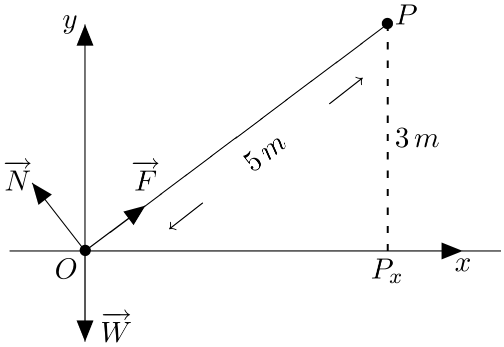
É claro que se θ for obtuso, $\cos\theta < 0$ e teremos que o trabalho é realizado contra o sentido do deslocamento.

Na Física, quando a intensidade da força é medida em N (Newton) e a distância deslocada é medida em m (metros) então o trabalho é uma grandeza escalar medida em J (joules) $= N \times m$.

Exemplo: *Um bloco de massa igual a 10kg vai ser deslocado de baixo para cima em uma rampa inclinada de 5 metros de comprimento, cuja extremidade superior está 3 metros acima do solo. Supondo as superfícies em contato sem atrito, qual é o trabalho que será realizado pela força paralela ao plano inclinado que faz o bloco subir com velocidade constante?* (cf. Halliday-Resnick, Física)



Para modelar a situação-problema de modo que envolva todos os dados apropriadamente, vamos fixar um sistema de coordenadas cartesianas no plano de perfil do problema, reduzindo-o a um problema bi-dimensional.



Considere o seguinte sistema, em que O e P representam as extremidades da rampa e Ox esteja no nível horizontal. Como o movimento rampa acima não é acelerado (observe que o bloco deve subir com velocidade constante), a resultante das forças que atuam sobre o bloco é o vetor nulo, isto é, as forças estâo em equilíbrio. Tais forças são: o peso $\overrightarrow{W}$, a componente $\overrightarrow{F}$ paralela à rampa da força que faz o bloco subir, e a componenente $\overrightarrow{N}$ normal à rampa da dita força.

O peso $\overrightarrow{W}$ é dado por $\overrightarrow{W} = (0. - mg)$, onde m é a massa em kg e $g = 9.8m/s^2$ é a aceleração da gravidade. Logo, $\overrightarrow{W} = (0, -98)$ no sistema fixado.

O equilíbrio das forças implica que devemos ter $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{N} = -\overrightarrow{W}$. A força $\overrightarrow{N}$ não realiza trabalho no sentido do deslocamento $\overrightarrow{OP}$, por ser ortogonal a este. Então o trabalho realizado por $\overrightarrow{F}$ ao subir a rampa de O a P é dado por:

$\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{OP} = (\overrightarrow{F} + \overrightarrow{N}) \cdot \overrightarrow{OP} = (-\overrightarrow{W}) \cdot \overrightarrow{OP} = -(0, -98) \cdot (4, 3) = +294J.$

Obs: Como $|\overrightarrow{OP}| = 5$ e $P = (P_x, 3)$, temos que $P_x = 4$ e portanto, $\overrightarrow{OP} = (4, 3)$.

Isto quer dizer que o trabalho realizado é de 294 joules contra a gravidade.

4.1.6 Coordenadas em relação a uma base ortonormal

Suponhamos que $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ seja uma base ortonormal de um plano (pode ser $\mathbb{R}^2$ ou mesmo um plano contido em $\mathbb{R}^3$).

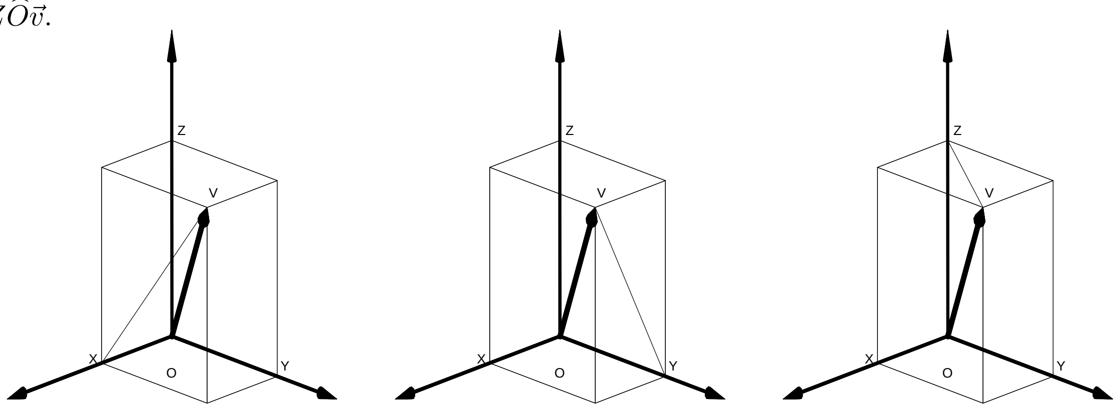
Por exemplo, sejam $\vec{e}_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $\vec{e}_2 = (\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Sendo $\mathcal{B}$ uma base do $\mathbb{R}^2$, todo vetor $\vec{v}$ se escreve como $\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$. Em geral, para encontrar os coeficientes a_1 e a_2 procedíamos à resolução do sistema linear associado ao problema. Mas neste caso, com a base $\mathcal{B}$ ortonormal, este cálculo se simplifica, pois $\vec{v} \cdot \vec{e}_1 = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) \cdot \vec{e}_1 = a_1\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = a_1$ e $\vec{v} \cdot \vec{e}_2 = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) \cdot \vec{e}_2 = a_1\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + a_2\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = a_2$, já que $|\vec{e}_i|^2 = 1$ e $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$

Assim, se $\vec{v} = (x, y)$ (em relação à base canônica), então $\vec{v} = (x\frac{\sqrt{2}}{2} + y\frac{\sqrt{2}}{2}, -x\frac{\sqrt{2}}{2} + y\frac{\sqrt{2}}{2})$ na base $\mathcal{B}$. Por exemplo, se $\vec{v} = \vec{e}_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $\vec{v} = (\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = (1, 0)$ na base $\mathcal{B}$. Analogamente, $\vec{v} = \vec{e}_2 = (0, 1)$ na base $\mathcal{B}$.

Efetivamente, as coordenadas de $\vec{v}$ na base $\mathcal{B}$ são as projeções de $\vec{v}$ sobre os vetores unitários $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$.

Analogamente, se $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ é uma base ortonormal do espaço $\mathbb{R}^3$, as coordenadas de um vetor $\vec{v}$ em relação à base $\mathcal{B}$ são dadas por $(\vec{v} \cdot \vec{e}_1, \vec{v} \cdot \vec{e}_2, \vec{v} \cdot \vec{e}_3)$.

Prosseguindo a idéia desenvolvida no exemplo acima, considere agora um vetor unitário $\vec{v} = (X, Y, Z)$ no espaço $\mathbb{R}^3$ e a base canônica $\mathcal{C} = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$. Sejam ϕ, ψ e θ os ângulos que $\vec{v}$ forma com os vetores $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$, respectivamente, representados nos desenhos abaixo como os ângulos $X\widehat{O}\vec{v}$, $Y\widehat{O}\vec{v}$ e $Z\widehat{O}\vec{v}$.



Como $\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{\imath})\vec{\imath} + (\vec{v} \cdot \vec{\jmath})\vec{\jmath} + (\vec{v} \cdot \vec{k})\vec{k}$, as coordenadas de $\vec{v}$ na base canônica são:

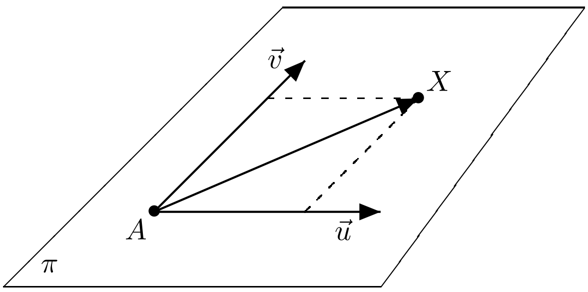
$$\begin{cases} X = \vec{v} \cdot \vec{\imath} = |\vec{v}||\vec{\imath}| \cos\phi = \cos\phi \\ Y = \vec{v} \cdot \vec{\jmath} = |\vec{v}||\vec{\jmath}| \cos\psi = \cos\phi \\ Z = \vec{v} \cdot \vec{k} = |\vec{v}||\vec{k}| \cos\theta = \cos\theta \end{cases}, \quad \text{chamados } \textit{cossenos diretores} \text{ de } \vec{v}.$$

Os cossenos diretores satisfazem a relação $\cos^2\phi + \cos^2\psi + \cos^2\theta = 1$, pois $|\vec{v}| = 1$.

Se $\vec{v} = (x, y, z)$ é um vetor não nulo, então $\vec{v} = |\vec{v}| versor(\vec{v})$. Como as coordenadas de $versor(\vec{v})$ são os cossenos dos ângulos ϕ, ψ e θ que $\vec{v}$ forma com os vetores da base canônica, segue que $x = |\vec{v}| \cos\phi$, $y = |\vec{v}| \cos\psi$ e $z = |\vec{v}| \cos\theta$.

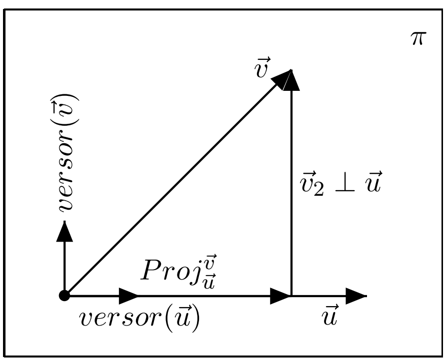
4.1.7 Bases ortogonais de planos no espaço

Consideremos um plano π dado pela equação vetorial $\pi : X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, com $\vec{u}$, $\vec{v}$ l.i., como na figura.



Como qualquer ponto $X \in \pi$ satisfaz a propriedade que $\overrightarrow{AX}$ seja uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, dizemos que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é uma base de vetores do plano π, ou simplesmente, uma base de π.

A questão que colocamos agora é: como obter uma base de vetores de π que seja ortogonal? Se isto for obtido, então podemos obter uma base ortonormal de π, considerando os versores da base ortogonal obtida.



De projeções ortogonais, temos que $\vec{v} = Proj_{\vec{u}}^{\vec{v}} + \vec{v}_2$, onde $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$ e $Proj_{\vec{u}}^{\vec{v}} = \lambda\vec{u}$, com $\lambda = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}$. Então, $\vec{v}_2 = \vec{v} - \lambda\vec{u}$ é uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sendo portanto um vetor do plano e $\{\vec{u}, \vec{v}_2\}$ é l.i. por serem ortogonais. Portanto $\{\vec{u}, \vec{v}_2\}$ é uma base ortogonal que gera o mesmo plano π.

Como dito anteriormente, $\mathcal{B} = \left\{ \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}, \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right\}$ é uma base ortonormal de π.

Exemplo: Dado o plano $\pi : X = (1,2,1)+\lambda(1,0,3)+\mu(-1,1,,2),\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$, os vetores $\vec{u} = (1,0,3)$ e $\vec{v} = (-1,1,2)$ são vetores geradores l.i. de π (formam uma base de π).

Temos que $\vec{v} \cdot \vec{u} = (1,0,3) \cdot (-1,1,2) = 1 \times (-1) + 0 \times 1 + 3 \times 2 = -1 + 6 = 5$ e $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = (1,0,3) \cdot (1,0,3) = 1^2 + 3^2 = 10$.

Assim $Proj_{\vec{u}}^{\vec{v}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}\vec{u} = \frac{5}{10}(1,0,3) = \frac{1}{2}(1,0,3) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})$ e portanto $\vec{v}_2 = \vec{v} - Proj_{\vec{u}}^{\vec{v}} = (-1,1,2) - (\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}) = (-\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2})$.

Se queremos apenas que $\vec{v}_2$ esteja no plano e seja ortogonal a $\vec{u}$, podemos tomar qualquer múltiplo do vetor encontrado, por exemplo, $\vec{v}_2 = (-3,2,1) = 2(-\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2})$ Observe que $\vec{u} \cdot \vec{v}_2 = (1,0,3) \cdot (-3,2,1) = 0$, confirmando o perpendicularismo.

Então, uma base ortonormal de π pode ser obtida como $\mathcal{B} = \left\{ \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}, \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right\}$, ou seja, $\mathcal{B} = \left\{ \frac{(1,0,3)}{\sqrt{10}}, \frac{(-3,2,1)}{\sqrt{14}} \right\}$.

Observação: Quando somente a direção do vetor importa, como no caso $\vec{v}_2$ acima, a troca por um múltiplo pode ser muito útil para simplificar as contas futuras, como para encontrar o versor.

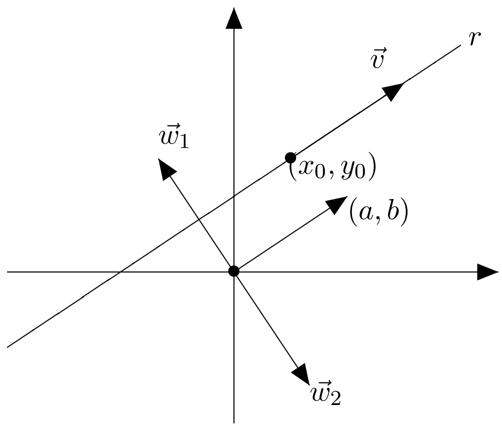
4.1.8 Retas perpendiculares no plano

Considere uma reta no plano $\mathbb{R}^2$ dada pela equação vetorial $r : X = (x_0, y_0) + t(a,b),\ t \in \mathbb{R}$.

A direção de r é dada pelo vetor não nulo $\vec{v} = (a,b) \neq (0,0)$. Uma reta $s : X = P + \lambda\vec{w},\ \lambda \in \mathbb{R}$, é uma *reta perpendicular* a r se o vetor direção $\vec{w}$ for ortogonal a $\vec{v}$ (claro que $\vec{w} \neq \vec{0}$).

Como obter vetores $\vec{w}$ ortogonais a $\vec{v}$? Ora, se $\vec{w} = (c,d)$ é ortogonal a $\vec{v} = (a,b)$, então devemos ter $\vec{w} \cdot \vec{v} = (c,d) \cdot (a,b) = ac + bd = 0$. Temos infinitas soluções $\vec{w} = (c,d)$ para o problema, todos múltiplos de $(-b,a)$.

De fato, se $a \neq 0$, a equação $ac + bd = 0$ fornece que $c = -\frac{b}{a}d$, isto é, para cada $d \neq 0$ valor de c fica determinado. Uma escolha natural é tomar $d = a$ e então $c = -b$, obtendo $\vec{w}_1 = (-b,a)$. Ou então, $d = -a$ e $c = b$, obtendo $\vec{w}_2 = (b,-a) = -\vec{w}_1$. Para $d \neq 0$, escrevendo $d = at$, $t \in R$, segue que $c = -bt$ e tem-se então todos os $\vec{w} \perp \vec{v}$ são da forma $\vec{w} = (c,d) = (-bt, at)$. O caso $a = 0$, fica como exercício.



Interprete geometricamente as escolhas naturais $\vec{w}_1 = (-b, a)$ e $\vec{w}_2 = (b, -a)$, olhando na figura. É claro que dado $\vec{v} = (a, b) \neq (0, 0)$ existe uma única direção ortogonal a $\vec{v}$ gerada por $\vec{w}_1$ (ou $\vec{w}_2 = -\vec{w}_1$).

Vimos no capítulo anterior, que para obtermos a equação geral da reta $r : (x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b)$, $t \in \mathbb{R}$, consideramos que $\{(x - x_0, y - y_0), (a, b)\}$ é l.d. e portanto $\begin{Vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ a & b \end{Vmatrix} = 0$, donde $b(x-x_0)-a(y-y_0) = 0$ e portanto uma equação geral da reta fica: $r : bx-ay-(bx_0-ay_0) = 0$. Temos também que qualquer outra equação geral que define a mesma reta é múltipla desta equação.

Assim, se $Ax + By + C = 0$ define a reta r, o vetor $\vec{w} = (A, B)$ é perpendicular a r, ou seja, a direção de r é dada por $\vec{v} = (a, b) = (B, -A)$. E consequentemente, $Bx - Ay + D = 0$ é uma reta perpendicular a r.

A forma mais simples de obter a equação geral da reta r que passa por $A = (x_0, y_0)$ e é perpendicular a $\vec{w} = (a, b)$ é lembrar que se $X = (x, y) \in r$, $\overrightarrow{AX} \perp \vec{w}$. Assim, $(x-x_0, y-y_0)\cdot(a, b) = a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

Exercícios:

1. Se $\vec{v} = (a, b) = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{w}_1 = (-b, a) = \overrightarrow{BC}$, onde A, B e C são pontos num terreno plano, quando uma pessoa vai andando de A até B e depois, de B até C, significa que no ponto B está virando à direita ou à esquerda?

   Sugestão: Represente graficamente um vetor genérico $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (a, b)$ e seu ortogonal $\vec{w}_1 = (-b, a)$ a partir de B e faça uma análise visual.

2. Dada a reta $r : \begin{cases} x = 2 + 5\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, obter as equações paramétricas da reta s perpendi-

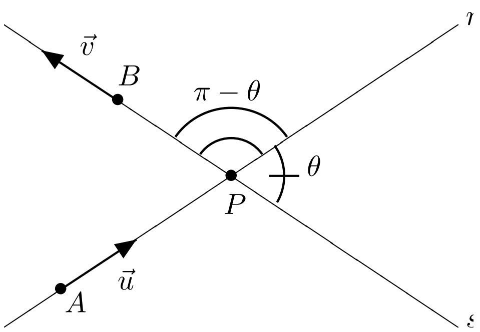
cular a r que passa pelo ponto $P = (1, -5)$. Encontre o ponto de intersecção das retas.

3. Verifique a reta do exercício anterior satisfaz a equação $3(x-2) - 5(y+1) = 0$.

4.1.9 Ângulo entre duas retas

Consideremos inicialmente duas retas concorrentes (no plano ou no espaço) $\begin{cases} r : X = A + \lambda\vec{u}, \ \lambda \in R \\ s : X = B + \mu\vec{v}, \ \mu \in R \end{cases}$

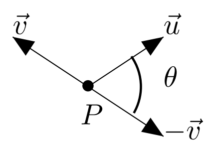
Só para relembrar: estamos considerando o caso em que r e s são coplanares e não paralelas, isto é, $\{\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\}$ l.d. e $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ l.i. Então existe P, ponto de intersecção.



As retas formam em P dois ângulos, suplementares entre si, isto é, θ e $\pi - \theta$, como na figura. Quando $\theta = \pi - \theta$ ocorre o perpendicularismo entre as retas, $\theta = \frac{\pi}{2}$.
Quando não são perpendiculares, um dos ângulos é agudo e o outro obtuso.

Neste caso, convenciona-se definir o *ângulo entre duas retas concorrentes* como sendo o ângulo agudo no ponto de intersecção.

Os ângulos que se formam em P são: o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e o ângulo entre $\vec{u}$ e $-\vec{v}$, tendo em vista que $\vec{v}$ ou $-\vec{v}$ determina a direção de s.



A fórmula $\cos\measuredangle(\vec{u}, \pm\vec{v}) = \pm\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$ mostra que $\arccos\left(\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}\right)$ determina o ângulo agudo entre as retas pois $\cos\theta = -\cos(\pi - \theta) \Rightarrow |\cos\theta| = |\cos\cos(\pi - \theta)|$.

Exemplo: *Calcular o ângulo entre* $r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -1 - 5\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $s : X = (1, 2, 4) + \beta(0, -1, -2)$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Primeiro, pode-se verificar (exercício!) que as retas são de fato coplanares, mostrando que $\{\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\}$ é l.d., onde $A = (2, 3, -1)$, $B = (1, 2, 4)$, $\vec{u} = (1, 1, -5)$ e $\vec{v} = (0, -1, -2)$.

Na verdade, $B \in s \cap r$, pois quando $\lambda = -1$ na equação de r, temos $(x, y, z) = (2, 3, -1) + (-1)(1, 1, -5) = (1, 2, 4)$ que é o ponto $B \in s$. Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.i., as retas se encontram unicamente em B.

O ângulo entre r e s em B é dado por $\arccos\left(\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}\right)$ onde $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 1, -5) \cdot (0, -1, 2) = 1 \times 0 + 1 \times (-1) + (-5) \times (2) = -11 < 0$, $|\vec{u}| = \sqrt{1 + 1 + 25} = \sqrt{27}$ e $|\vec{v}| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$.

Como $\vec{u} \cdot \vec{v}$ é negativo, o ângulo entre os vetores é obtuso. Por isso o ângulo entre r e s é dado pelo $\measuredangle(\vec{u}, -\vec{v})$, isto é, basta considerarmos o valor absoluto de $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

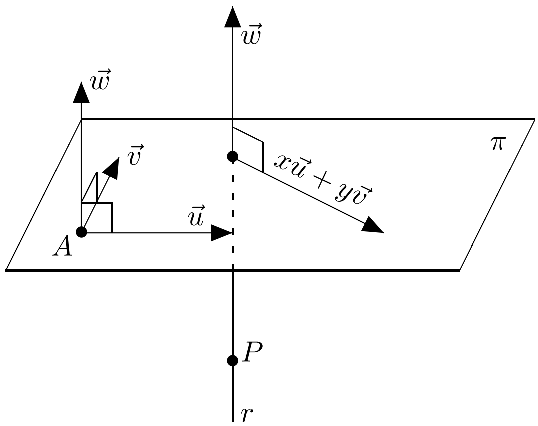
Assim, $\measuredangle(r, s) = \arccos \frac{|-11|}{\sqrt{27}\sqrt{5}} = \arccos \frac{11}{\sqrt{27}\sqrt{5}}$.

Observação: Considere por exemplo as retas $r : \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 \end{cases}$ e $s : (x, y, z) = (\mu, 2, 0)$, $\mu \in \mathbb{R}$.
O vetor diretor de r é $\vec{\jmath} = (0, 1, 0)$ e o de s é $\vec{\imath} = (1, 0, 0)$, e são claramente ortogonais ($\vec{\jmath} \cdot \vec{\imath} = 0$). Mas retas são reversas, e portanto, as retas são ditas ortogonais (e não perpendiculares). Duas retas concorrentes formando ângulo retao são ditas perpendiculares.
Em geral, se duas retas sao reversas, ou se diz que elas não formam ângulo já que não são concorrentes, ou, dependendo do contexto, convenciona-se que o ângulo entre elas é o ângulo entre duas retas concorrentes, cada uma delas paralela a uma das retas dadas. neste último caso, o ângulo entre as retas reversas pode ser dada pelos vetores diretores.

4.1.10 Retas perpendiculares a planos

Uma reta r é perpendicular a um plano π se for ortogonal a todas as retas do plano. Ou seja, $r : X = P + \lambda\vec{w}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ é perpendicular a um plano π se $\vec{w}$ for ortogonal a todas as direções $\vec{v}$ do plano π.

Dado um plano $\pi : X = A + t\vec{u} + s\vec{v}$, $t, s \in \mathbb{R}$, para que um vetor $\vec{w}$ seja ortogonal a todas as direções do plano, basta que $\vec{w}$ seja ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. De fato, qualquer vetor do plano é combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é, é da forma $x\vec{u} + y\vec{v}$, com $x, y \in \mathbb{R}$. Assim, se $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$, tem-se que $\vec{w}$ é ortogonal a todos os vetores do planos, pois $\vec{w}\cdot(x\vec{u}+y\vec{v}) = \vec{w}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{v} = 0+0 = 0$. Tal vetor $\vec{w}$ é chamado *vetor normal* ao plano π.



Então, vamos ao problema de encontrar um vetor $\vec{w} = (a,b,c)$ ortogonal a π, encontrando um vetor ortogonal a $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$ e a $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$.

Como $\vec{w}\cdot\vec{u} = 0$ e $\vec{w}\cdot\vec{v} = 0$, o seguinte sistema linear nas variáveis a, b e c deve ser satisfeito:

$$\begin{cases} u_1a+u_2b+u_3c = 0 \\ v_1a+v_2b+v_3c = 0 \end{cases}.$$

Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.i., o sistema tem grau de liberdade 1, o que implica que todas as soluções (a,b,c) são múltiplos de um vetor $\vec{w}_1$.

Por exemplo, se $\pi : X = (5,3,7)+t(1,-1,1)+s(2,2,-1)$, $t,s\in\mathbb{R}$, procuramos $w = (a,b,c)$ tal que $\vec{w}\cdot(1,-1,1) = a-b+c = 0$ e $\vec{w}\cdot(2,3,-1) = 2a+3b-c = 0$, ou seja, $\vec{w} = (a,b,c)$ deve ser solução do sistema linear homogêneo $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Escalonando: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$ temos que o sistema original é equivalente ao sistema $\begin{cases} a+\frac{1}{4}c = 0 \\ b-\frac{3}{4}c = 0 \end{cases}$

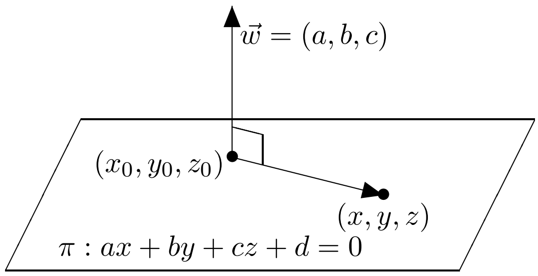
Logo temos que $(a,b,c) = (-\frac{1}{4}c, \frac{3}{4}c, c)$ e portanto, introduzindo o parâmetro t em c $(c = t)$, temos que $(a, b, c) = (-\frac{1}{4}t, \frac{3}{4}t, t) = t(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1)$. Ou seja, os vetores normais a π são múltiplos de $\vec{w}_1 = (-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1)$. Ou de $(-1, 3, 4)$

No capítulo anterior, vimos que utilizando o fato que $X = (x, y, z) \in \pi \iff \{(X - A), \vec{u}, \vec{v}\} l.d.$ encontramos a equação geral do plano π fazendo o determinante $\begin{Vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{Vmatrix} = 0.$

No exemplo, $\begin{Vmatrix} x-5 & y-3 & z-7 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{Vmatrix} = (x-5)\begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix} - (y-3)\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix} + (z-7)\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix} =$ $-(x-5) + 3(y-3) + 4(z-7) = 0.$

Essa equação diz que o vetor $\vec{w} = (-1, 3, 4)$ é ortogonal a todos os vetores $\overrightarrow{AX}$, onde $X \in \pi$, ou seja $\vec{w}$ é vetor normal a π.

Ou seja, dado $A = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{w} = (a, b, c)$, a equação do plano π passando por A e tendo $\vec{w}$ como vetor normal é dado por $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, que significa exatamente $\vec{w} \cdot \overrightarrow{AX} = 0$ para todo $X \in \pi$. Continuando os cálculos, $ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = ax + by + cz + d = 0$, fazendo $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$.



Distância de ponto a plano

Como aplicação, vamos encontrar a distância do ponto $P = (1, 1, 1)$ ao plano $\pi : 2x - 3y + 4z - 10 = 0$. Sabemos que a distância procurada é a distância de P ao pé da perpendicular a π por P. Para isso, tomamos a reta $r : (x, y, z) = (1, 1, 1) + t(2, -3, 4)$, perpendicular ao plano π, já que sua direção é dada por $\vec{w} = (2, -3, 4)$ que é o vetor normal de π. O ponto $Q = (1 + 2t_0, 1 - 3t_0, 1 + 4t_0)$ de r que pertence ao plano π satisfaz a equação $2(1 + 2t_0) - 3(1 - 3t_0) + 4(1 + 4t_0) - 10 = 0$, donde $29t_0 = 10 - 2 + 3 - 4 = 7$ e portanto $t_0 = \dfrac{7}{29}$. Assim, $Q = (1 + 2\frac{7}{29}, 1 - 3\frac{7}{29}, 1 + 4\frac{7}{29})$ e $distancia(P, \pi) = |PQ| = |2\frac{7}{29}, -3\frac{7}{29}, 4\frac{7}{29}) = \frac{7}{29}|(2, -3, 4)| = \dfrac{7\sqrt{29}}{29}$.

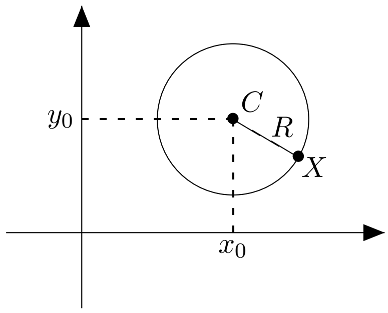
Outra opção para encontrar a distância é calcular a projeção ortogonal de um vetor $\overrightarrow{AP}$, onde A é qualquer ponto do plano, sobre o vetor normal ao plano. Se o plano é dado pela equação geral, o vetor normal aparece explicitamente e fica portanto o trabalho de encontrar um ponto do plano e efeturar a projeção. No exemplo acima, para calcular a distância do ponto $P = (1, 1, 1)$ ao plano $\pi : 2x - 3y + 4z - 10 = 0$, temos inicialmente que $\vec{w} = (2, -3, 4)$ é o vetor normal e o ponto $A = (5, 0, 0) \in \pi$ pode ser facilmente calculado fazendo $y = z = 0$. Logo $d(P, \pi) = |Proj_{\vec{w}}^{\overrightarrow{AP}}| = \dfrac{|(\overrightarrow{AP} \cdot \vec{w})|}{|\vec{w}|} = \dfrac{(-4, 1, 1) \cdot (2, -3, 4)}{\sqrt{29}} = \dfrac{7\sqrt{29}}{29}$.

Se o plano é dado pela equação vetorial, o ponto A é explícito, mas será necessário calcular o vetor normal, antes de efetuar a projeção.

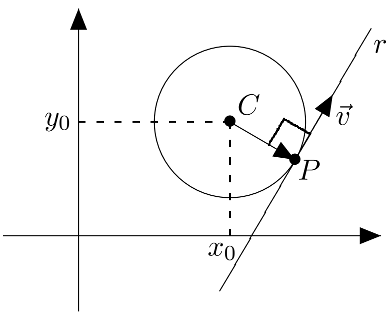
4.1.11 Retas tangentes à circunferência no plano

Uma circunferência de centro C e raio R é uma curva plana (isto é, contida num plano), cujos pontos distam R do centro C. Consideremos aqui as circunferências no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

Dado $C = (x_0, y_0)$ e um raio $R > 0$, um ponto $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ pertence à circunferência de centro C e raio R se $|\overrightarrow{CX}|^2 = (X - C) \cdot (X - C) = R^2$, donde $\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2}$ é a equação da circunferência.



Uma reta r é *tangente à circunferência* S se a intercepta num único ponto P. Além disso, por ser uma circunferência, o raio CP da circunferência é normal à reta de tangência r.



Então, a equação vetorial da reta tangente à circunferência pelo ponto P é dada por $r : X = P + \lambda\vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, onde $\vec{v} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$. E se $\overrightarrow{CP} = (a, b)$, a equação geral da reta tangente é $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$, onde $P = (x_1, y_1)$.

Use esta idéia para resolver os seguintes exercícios:

1. Encontrar a equação da circunferência de centro $(2,3)$ e raio 5. Ache os pontos de intersecção da circunferência com o eixo Ox. Encontre as equações das retas tangentes nesses pontos.

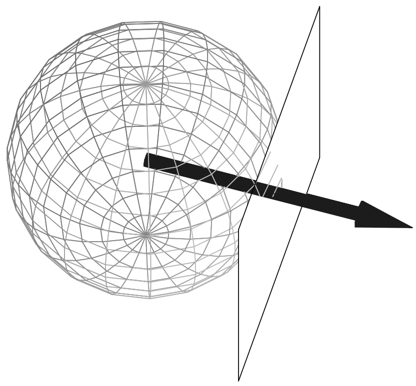
2. Dado $Q = (-3,-4)$, encontre as equações das retas tangentes à circunferência do exercício anterior e que passam pelo ponto dado. Analise a mesma questão para $A = (-1,2)$

4.1.12 Planos tangentes à esfera no espaço

Uma esfera de centro C e raio R é uma superfície cujos pontos distam R do centro C.

Assim, uma esfera de centro $C = (x_0, y_0, z_0)$ e raio R é dada pela equação $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$.

Analogamente ao caso de retas tangentes a circunferências no plano, os planos tangentes a esferas de centro C e passando por um ponto P da esfera, são perpendiculares ao raio da esfera $\overrightarrow{CP}$.



Assim, se $C = (x_0, y_0, z_0)$ é o centro e $P = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ um ponto da esfera, o vetor normal ao plano tangente è dado por $\overrightarrow{N} = (\bar{x}-x_0, \bar{y}-y_0, \bar{z}-z_0) = (a,b,c)$ e portanto, sua equação fica $\pi : a(x-\bar{x}) + b(y-\bar{y}) + c(z-\bar{z}) = 0$.