UNIVERSIDADE DO VALE DO PARAÍBA
São José dos Campos - SP

PARTE A – Capítulo 2
Movimentos. Vetores. Introducão a biomecânica e biodinâmica.

Objetivos: Nesta aula iremos rever os conceitos sobre os movimentos dos corpos incluindo as grandezas envolvidas. Faremos uma revisão de vetores e em seguida veremos alguns movimentos em mais de uma dimensão. Discutiremos um pouco sobre o conceito de força e alavanca. Veremos brevemente efeito de forcas nos corpos e dinâmica dos movimentos aéreos dos animais.

1 – Movimentos (1D)

Deslocamento e distância percorrida

A mudança de uma posição S_1 para S_2 está associada a um deslocamento ΔS, dado por:

$$\boxed{\Delta S = S_2 - S_1}$$

Um deslocamento no sentido positivo do eixo resulta num ΔS positivo. Um deslocamento no sentido negativo, num ΔS negativo. O número real de metros percorridos é irrelevante. O deslocamento envolve a penas as posições inicial e final. Assim, por exemplo, se a partícula se move de S_1 = 5m até S_2 = 200m e em seguida volta para S_3 = 5m, o deslocamento total será:

$$\boxed{\Delta S = S_3 - S_1 = 5 - 5 = 0}$$

Para o cálculo da distância percorrida (D) foi de 5 → 200 = 195 m + de 200 → 5 = 195 m, D = 195 + 195 = 390 m.

O sinal positivo do deslocamento não precisa ser mostrado, mas o sinal negativo deve ser sempre mostrado. Quando ignoramos o sinal (e, portanto, o sentido) do deslocamento, ficamos com o módulo do deslocamento. Assim, por exemplo, um deslocamento ΔS = -50 m possui módulo de 50 m. O deslocamento é uma grandeza vetorial, ou seja, possui módulo, direção e sentido. Os vetores serão estudados mais tarde.

Velocidade média

A razão entre o deslocamento total Δs e o intervalo de tempo Δt durante o qual esse deslocamento ocorre é chamada de **velocidade média, v_{med}.**

Sendo:

$$v_{med} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}$$

A notação significa que a coordenada de posição é s_0 no instante t_0 e s_1 no instante t_1. A unidade de velocidade média no Sistema Internacional (SI) é o metro por segundo (m/s). Outras unidades são usadas em alguns problemas, mas todas estão na forma comprimento/tempo.

Em um gráfico de s em função de t, v_{med} é a inclinação da reta que liga dois pontos particulares da curva s(t): um dos pontos corresponde a s_1 e t_1 e o outro a s_0 e t_0. Da mesma forma que o deslocamento, a velocidade média possui um módulo, uma direção e um sentido, ou seja, também é uma grandeza vetorial. O módulo é o valor absoluto da inclinação da reta. Um valor positivo de v_{med} (e da inclinação) significa que a reta está inclinada para cima da esquerda para a direita. Já um valor negativo de v_{med} (e da inclinação) significa que a reta está para baixo da esquerda para a direita.

A velocidade média tem sempre o mesmo sinal do deslocamento, já que Δt é sempre positivo.

Uma outra grandeza envolvida é a velocidade escalar média (v_{esc}). Enquanto a velocidade média envolve o deslocamento da partícula, a velocidade escalar média é definida em termos da distância total percorrida (o número de metros percorridos, por exemplo) independente da direção. Assim:

$$v_{esc} = \frac{distância\ \ percorrida}{\Delta t}$$

Como a definição de velocidade escalar média não inclui a direção do movimento, ela não possui um sinal algébrico. **Em alguns casos**, $v_{esc} = v_{med}$. Entretanto, como será demonstrado abaixo, as duas velocidades podem ser bem diferentes.

Exemplo

Depois de dirigir uma van em uma estrada retilínea por 8,4 km a 70 km/h, você pára por falta de gasolina. Nos 30 min seguintes você caminha por mais 2,0 km ao longo da estrada até chegar ao posto de gasolina mais próximo.

(a) Qual é o deslocamento total, desde o início da viagem até chegar ao posto de gasolina?

Idéia-chave: *Suponha, por conveniência, que você se move no sentido positivo do eixo, da coordenada de posição inicial s_0 até a coordenada de posição final s_1, no posto de gasolina. Essa segunda coordenada de posição deve ser igual a s_1 = 8,4 + 2,0 = 10,4 km. O deslo-camento Δs ao longo do eixo da coordenada de posição é a diferença entre as coordenadas da segunda e da primeira posição. Assim,*

$$\Delta s = s_1 - s_0 = 10{,}4\ \ km - 0 = 10{,}4\ \ km$$

Assim, o deslocamento total é de 10,4 km no sentido positivo do eixo.

(b) Qual é o intervalo de tempo Δt entre o início da viagem e o instante em que você chega ao posto?

Já sabemos quanto tempo você passou caminhando, Δt_{cam} (0,50 h), mas não sabemos quanto tempo você passou dirigindo, Δt_{dir}. Sabemos porém, que você viajou 8,4 km de carro a uma velocidade média $v_{med,dir}$ = 70 km/h. Essa velocidade é igual a razão entre o deslocamento do carro e o intervalo de tempo correspondente a esse deslocamento.

$$v_{med,dir} = \frac{\Delta s_{dir}}{\Delta t_{dir}}$$

Explicitando Δt e substituindo os valores conhecidos, teremos:

$$\Delta t_{dir} = \frac{\Delta s_{dir}}{v_{med,dir}} = \frac{8{,}4 \quad km}{70 \quad km/h} = 0{,}12 \quad h$$

E portanto, $\Delta t = \Delta t_{dir} + \Delta t_{cam}$ = 0,12 h + 0,50 h = 0,62 h.

(c) Qual é a velocidade média $v_{méd}$ do início da viagem até a chegada ao posto de gasolina? Determine a solução numericamente e graficamente.

Idéia-chave: *Nesse caso temos que a velocidade media para todo o percurso é a razão entre o deslocamento de 10,4 km para todo o percurso e o intervalo de tempo de 0,62h para todo o percurso.*

$$v_{med} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10{,}4 \quad km}{0{,}62 \quad h} = 16{,}8 \quad km/h$$

Para determinar v_{med} graficamente, traçamos o gráfico da função s(t), como mostra a figura ao lado, onde os pontos de partida e chegada no gráfico são a origem e o ponto assinalado como "Posto". A velocidade média é a inclinação da reta que une esses pontos, ou seja, v_{med} é a razão entre a elevação (Δs = 10,4 km) e o tempo (Δt = 0,62 h), o que nos dá v_{med} = 16,8 km/h.

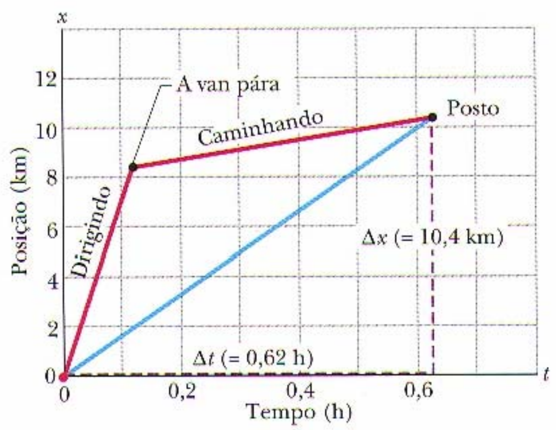


FIG. 2-5 As retas "Dirigindo" e "Caminhando" são os gráficos da posição em função do tempo para os deslocamentos de carro e a pé. (O gráfico para o deslocamento a pé supõe uma caminhada com velocidade constante.) A inclinação da reta que liga a origem ao ponto "Posto" é a velocidade média para o percurso até o posto.

Velocidade Instantânea

Se conhecermos a posição do corpo em cada instante de tempo podemos calcular velocidades médias para diferentes intervalos, conhecendo-se, assim, novos aspectos do movimento. Nesse caso, partimos da (coordenada de) posição em função do tempo para obter as velocidades médias. Se dois movimentos começam e terminam nos mesmos pontos e têm a mesma duração total, a velocidade média total será a mesma. Isto, no entanto, não fornece detalhes sobre o movimento de cada um.

Velocidade instantânea é a velocidade do corpo num dado instante de tempo.

Velocidade instantânea (ou, simplesmente, ***velocidade***) não é definida como a razão entre deslocamento e intervalo de tempo, ao contrário da *velocidade média*. Mas pode surgir a partir da velocidade média, juntamente com os conceitos matemáticos de *limite* e *derivada*.

A velocidade em um dado instante é obtida a partir da velocidade média reduzindo o intervalo de tempo Δt até torná-lo próximo de zero. À medida que Δt diminui, a velocidade média se aproxima de um valor-limite, que é a velocidade instantânea.

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}}$$

Observe que *v* é a taxa de variação da coordenada de posição com o tempo, ou seja, é a derivada de s em relação a t. Observe também que v, em qualquer instante, é a inclinação da curva que representa a posição em função do tempo no instante considerado. A velocidade instantânea também é uma grandeza vetorial e, portanto, possui uma direção e um sentido.

Aceleração

Quando a velocidade de uma partícula varia, diz-se que a partícula sofreu uma aceleração (ou foi acelerada). Para movimentos ao longo de um eixo, a aceleração média $a_{méd}$ ou $\bar{a}$ em um intervalo de tempo Δt é:

$$a_{méd} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

onde a partícula tem velocidade v_1 no instante t_1 e velocidade v_2 no instante t_2. Da mesma forma quer a velocidade instantânea, pode ser mostrado que a aceleração instantânea (ou simplesmente aceleração) é dada por:

$$\boxed{a = \lim_{\Delta t \to \infty} \bar{a} = \frac{dv}{dt}}$$

Ou seja, a aceleração de uma partícula em qualquer instante é a taxa com a qual a velocidade está variando nesse instante. Graficamente, a aceleração em qualquer ponto é a inclinação da curva *v*(t) nesse ponto.

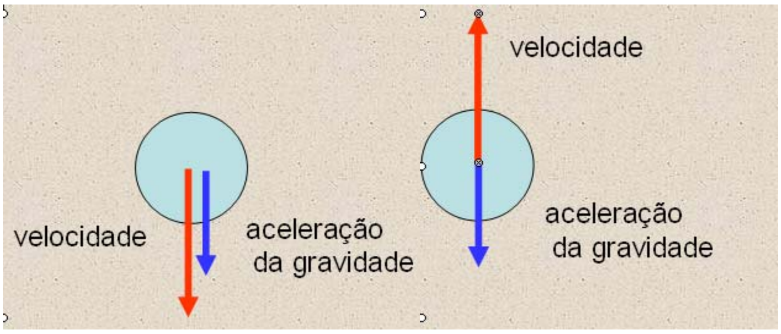
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Em outras palavras, a aceleração de uma partícula em qualquer instante é a derivada segunda da posição s(t) em relação ao tempo.

O *sentido* da aceleração.

A aceleração é a taxa instantânea de variação da velocidade. Para determinar seu *sentido* num movimento precisamos olhar de que modo varia a velocidade. Para um dado movimento, o *sentido* da aceleração não depende do observador.

O *sentido* da seta da aceleração, num dado instante de tempo t, está ligado à variação do **módulo** da velocidade naquele instante. É possível determinar o sentido da seta da aceleração, mesmo sem conhecer a convenção de sinais adotada pelo observador, usando o seguinte procedimento. Veja um fenômeno conhecido: aceleração da gravidade.



Objeto Caindo **Objeto Subindo**

<u>Procedimento geral para determinar a o sentido da seta da aceleração:</u>

- movimentos em que o <u>módulo</u> da velocidade <u>cresce</u>:
as setas da aceleração e da velocidade têm MESMO SENTIDO

- movimentos em que o <u>módulo</u> da velocidade <u>decresce</u>:
as setas da aceleração e da velocidade têm SENTIDOS CONTRÁRIOS

Quando estudamos movimentos em mais de uma dimensão (ex. 2D – movimento num plano; 3D – movimento no espaço) é necessário utilizarmos os conceitos de vetores.

2 - Vetores

Grandezas escalares, como a temperatura energia e pressão, possuem apenas um valor (intensidade). São especificadas por um numero como uma unidade (10º C, por exemplo, e obedecem as regras da aritmética e da álgebra comum. Outras grandezas, além do valor de sua intensidade também necessitam expressar uma direção e sentido determinado. Essas grandezas são representadas por vetores e são chamadas de grandezas vetoriais. O deslocamento ou a velocidade são exemplos de grandezas vetoriais e obedecem às regras da álgebra vetorial.

Uma partícula que se move em linha reta pode se deslocar em apenas uma direção, sendo o deslocamento positivo em uma e negativo na outra direção. Quando uma partícula se move em três dimensões, um número positivo oi negativo não é suficiente para indicar a orientação, tornando-se necessária a noção de vetor.

Um vetor possui módulo e orientação, seguindo certas regras de combinção. O deslocamento, a velocidade e a aceleração são exemplos de grandezes físicas. Entretanto, nem todas as grandezas físicas envolvem uma orientação. A temperatura, a pressão, a energia, a massa, o tempo, por exemplo, não apontam em nenhuma direção. Essas grandezas são escalares.

A grandeza vetorial mais simples é o deslocamento, ou a mudança da coordenada de posição. Um vetor que representa o deslocamento é chamado de vetor deslocamento. Se uma partícula muda de posição movendo-se de A para B na figura abaixo, dizemos que sofre um deslocamento de A para B, que é representado por uma seta apontando de A para B.

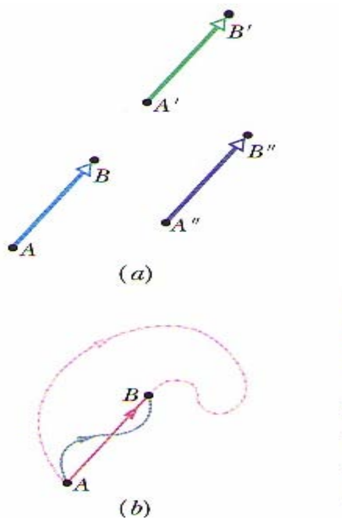


FIG. 3-1 (*a*) As três setas têm o mesmo módulo e orientação e, portanto, representam o mesmo deslocamento. (*b*) As três trajetórias que unem os dois pontos correspondem ao mesmo vetor deslocamento.

Um vetor pode ser deslocado (translação) mas seu o comprimento, a direção e o sentido permanecerem os mesmos.

O vetor deslocamento nada nos diz sobre a trajetória da partícula. Na figura 3-1b, por exemplo, as três trajetórias que unem os pontos A e B correspondem ao mesmo vetor deslocamento da figura 3-1a. Um vetor deslocamento representa apenas o resultado final do movimento, não o movimento propriamente dito.

Soma Geométrica de Vetores

Suponha que, como no diagrama vetorial da Fig. 3-2a, uma partícula se desloque de A a B e depois a C. O deslocamento total é representado por dois vetores deslocamento sucessivos, AB e BC. O deslocamento total é um único deslocamento de A para C.

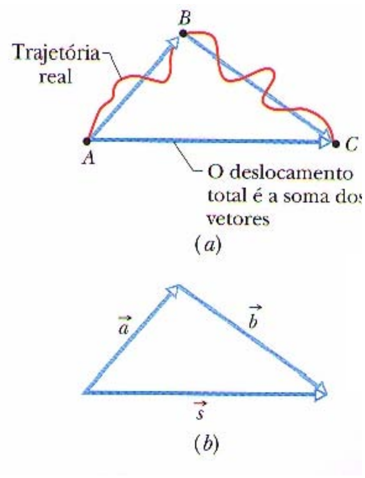


FIG. 3-2 (*a*) *AC* é o vetor soma dos vetores *AB* e *BC*. (*b*) Os mesmos vetores com outros nomes.

Chamaremos AC de vetor soma (um vetor resultante) dos vetores AB e BC. Essa soma não é uma soma algébrica comum.

Daqui em diante, um vetor será representado com uma seta sobre um símbolo em itálico, por exemplo, $\vec{a}$. Para indicar apenas o módulo do vetor (uma grandeza positiva, sem direção e sem sentido) usamos o símbolo em itálico sem a seta, como *a*. Você pode usar apenas um símbolo manuscrito. A relação entre os três vetores da figura 3-2b pode ser representada através da equação vetorial:

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b},$$

Segundo a qual o vetor $\vec{s}$ é o vetor soma dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. O símbolo + na equação e a palavra soma tem um significado diferente no caso de vetores porque, ao contrário do que acontece na álgebra comum, eles envolvem tanto o módulo como a direção e o sentido da grandeza.

Somar $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é igual a somar $\vec{b}$ e $\vec{a}$, ou seja,

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \qquad \text{(lei comutativa).}$$

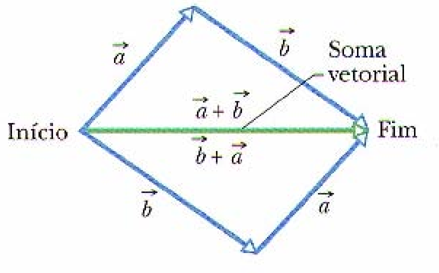


FIG. 3-3 A ordem em que os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são somados não afeta o resultado; veja a Eq. 3-2.

Além disso, quando existem mais de dois vetores podemos agrupá-los em qualquer ordem para somá-los.

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \qquad \text{(lei associativa).}$$

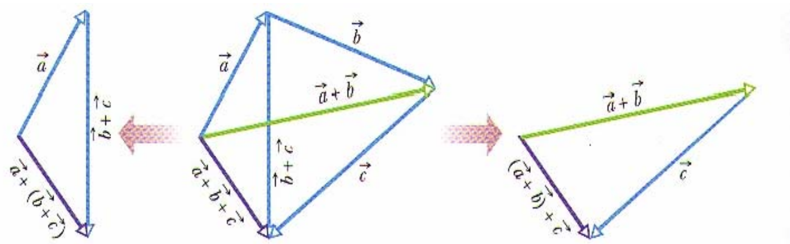


FIG. 3-4 Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ podem ser agrupados em qualquer ordem para serem somados;

O vetor -$\vec{b}$ é um vetor com mesmo módulo e direção de $\vec{b}$ e o sentido oposto. Veja figura 3-5. A soma de dois vetores na figura 3-5 é:

$$\vec{b}+(-\vec{b})=0$$

Assim, somar -$\vec{b}$ é o mesmo que subtrair $\vec{b}$.

$$\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}) \qquad \text{(subtração de vetores);}$$

Ou seja, calculamos o vetor diferença $\vec{d}$ somando o vetor -$\vec{b}$ ao vetor $\vec{a}$. A figura 3-6 mostra como isso é feito geometricamente.

Como na álgebra comum, podemos passar um termo que inclui um símbolo de vetor de um lado de uma equação vetorial para outro, mas devemos mudar o sinal. Por exemplo:

$$\vec{d}+\vec{b}=\vec{a} \text{ ou } \vec{a}=\vec{d}+\vec{b}$$

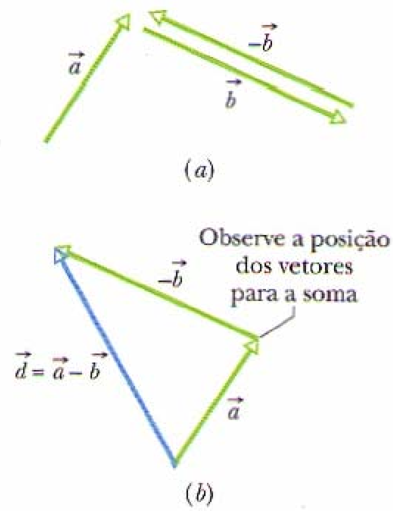


FIG. 3-6 (a) Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $-\vec{b}$. (b) Para subtrair o vetor $\vec{b}$ do vetor $\vec{a}$, basta somar o vetor $-\vec{b}$ ao vetor $\vec{a}$.

Embora tenhamos usado nestes exemplos vetores deslocamento, as regras para somar e subtrair vetores se aplicam a qualquer tipo de vetor. Entretanto, apenas vetores do mesmo tipo devem ser somados. Assim, por exemplo, podemos somar dois deslocamentos ou duas velocidades, mas não faz sentido somar um deslocamento e uma velocidade. Na aritmética dos escalares isso seria como somar 30 s e 15 m.

Componentes de Vetores

Uma técnica elegante e simples para somar vetores envolve o uso da álgebra, mas requer que os vetores sejam representados em um sistema de coordenadas retangulares. Os eixos x e y são desenhados no plano do papel, como na figura 3-8a. O eixo z é perpendicular ao papel e vamos ignorá-lo por enquanto.

Uma componente de um vetor é a projeção do vetor em um eixo. Na figura ao lado, a_x é a componente do vetor $\vec{a}$ em relação ao eixo x e a_y é a componente do vetor $\vec{a}$ em relação ao eixo y. Para encontrar a projeção de um vetor em relação ao eixo traçamos retas perpendiculares ao eixo a partir da origem e da extremidade do vetor.

- Componente x do vetor (a_x): é a projeção de um vetor em relação ao eixo x.

- Componente y do vetor (a_y): é a projeção de um vetor em relação em relação ao eixo y.

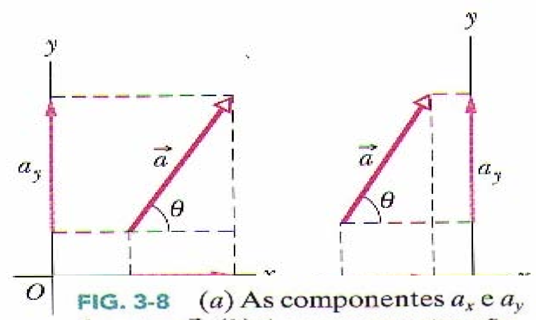
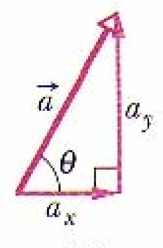


FIG. 3-8 (*a*) As componentes a_x e a_y do vetor $\vec{a}$. (*b*) As componentes não mudam quando o vetor é deslocado, desde que o módulo e a orientação sejam mantidos.



(*c*)

(*c*) As componentes correspondem aos catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é o módulo do vetor.

No caso mais geral, um vetor tem três componentes. Aqui, trataremos vetores em duas dimensões. Neste caso, eles terão apenas duas componentes, sendo a componente z nula. Decomposição de um vetor ó nome dado ao processo de obtenção das componentes do vetor.

Na figura acima, as componentes de $\vec{a}$ são:

$$a_x = a\cos\theta \quad \text{e} \quad a_y = a \operatorname{sen}\theta,$$

onde θ é o ângulo que o vetor $\vec{a}$ faz com o semi-eixo x positivo e a é o módulo de $\vec{a}$.

Se conhecermos um vetor na notação de componentes (a_x e a_y) e queremos especificá-lo na notação módulo-ângulo (a e θ), podemos usar as equações:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{e} \quad \tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$$

No caso mais geral de três dimensões, precisamos do módulo e de dois ângulos (a, θ, ϕ) ou de três componentes (a_x e $a_{y,}$ a_z) para especificar um vetor.

Exemplo.

Um pequeno avião decola de um aeroporto em um dia nublado e é avistado mais tarde a 215 km de distância, em um curso que faz um ângulo de 22° a leste do norte. A que distância a leste e ao norte do aeroporto está o avião no momento em que é avistado?

IDÉIA-CHAVE Conhecemos o módulo (215 km) e o ângulo (22° a leste do norte) de um vetor e precisamos determinar as componentes do vetor.

Cálculos: Desenhamos um sistema de coordenadas xy com o sentido positivo de x para leste e o de y para o norte (Fig. 3-10). Por conveniência, a origem é colocada no aeroporto. O deslocamento $\vec{d}$ do avião aponta da origem para o ponto onde o avião foi avistado.

Para determinar as componentes de $\vec{d}$, usamos a Eq. 3-5 com $\theta = 68°$ $(= 90° - 22°)$:

$$d_x = d\cos\theta = (215\text{ km})(\cos 68°) = 81\text{ km} \qquad \text{(Resposta)}$$

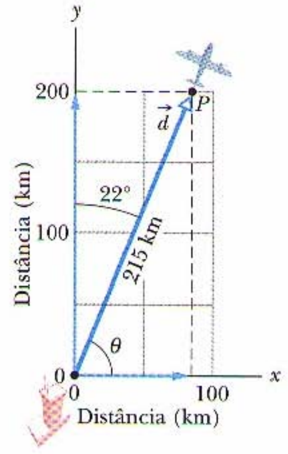


FIG. 3-10 Um avião decola de um aeroporto na origem e é avistado mais tarde no ponto P.

$$d_y = d\,\text{sen}\,\theta = (215\text{ km})(\text{sen } 68°) = 199\text{ km} \approx 2{,}0\times10^2\text{ km}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Assim, o avião foi avistado 81 km a leste e $2{,}0\times10^2$ km ao norte do aeroporto.

Algumas informações importantes:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\text{cateto oposto a }\theta}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente a }\theta}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto oposto a }\theta}{\text{cateto adjacente a }\theta}$$

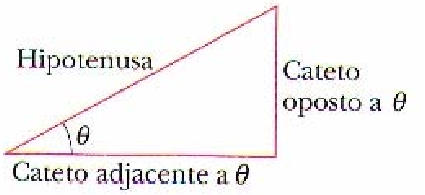


FIG. 3-12 Triângulo usado para definir as funções trigonométricas.

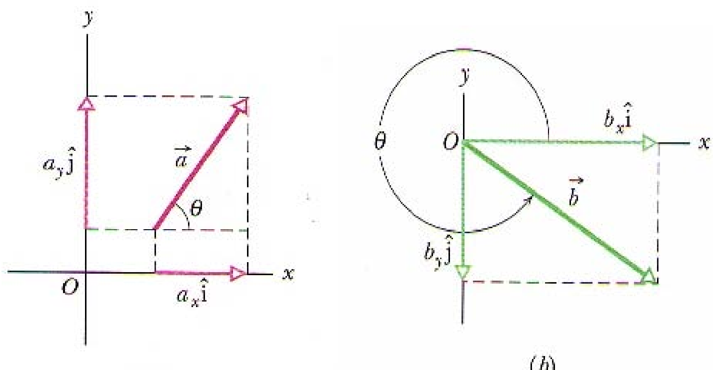
Vetores Unitários

Vetor unitário é um vetor que tem módulo igual a 1 e aponta em uma certa direção. Um vetor unitário não tem dimensão, nem unidade. Sua única função é especificar uma orientação. Usaremos para os vetores unitários que indicam os sentidos positivos dos eixos x, y e z a nomenclatura $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$, respectivamente. As setas foram substituídas por ^, para indicar que o vetor é unitário.

Os vetores unitários são muito úteis para especificar outros vetores; por exemplo, os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ das figuras 3.8 e 3.9 podem ser expressos como:

$$\vec{a} = a_x\hat{\text{i}} + a_y\hat{\text{j}}$$

$$\vec{b} = b_x\hat{\text{i}} + b_y\hat{\text{j}}.$$



(a) (b)

Essas duas equações estão ilustradas na figura acima. As grandezas $a_x\,\hat{i}$ e $a_y\,\hat{j}$ são vetores conhecidos como componentes vetoriais de $\vec{a}$. As grandezas a_x e a_y são escalares conhecidos como componentes escalares (ou simplesmente, componentes) de $\vec{a}$.

Soma de vetores através de suas componentes

Considere a equação abaixo, segundo a qual o vetor $\vec{r}$ é igual ao vetor ($\vec{a}+\vec{b}$). Isso significa que cada componente de $\vec{r}$ deve ser igual à componente correspondente de ($\vec{a}+\vec{b}$):

$$r_x = a_x + b_x$$
$$r_y = a_y + b_y$$
$$r_z = a_z + b_z.$$

Exemplo.

A Fig. 3-16*a* mostra os seguintes vetores:

$$\vec{a} = (4{,}2\text{ m})\hat{\imath} - (1{,}5\text{ m})\hat{\jmath},$$
$$\vec{b} = (-1{,}6\text{ m})\hat{\imath} + (2{,}9\text{ m})\hat{\jmath},$$

e

$$\vec{c} = (-3{,}7\text{ m})\hat{\jmath}.$$

Qual é o vetor soma $\vec{r}$, que também aparece na Fig. 3-16*a*?

IDÉIA-CHAVE Podemos somar os três vetores somando suas componentes, eixo por eixo, e usando as componentes resultantes para obter o vetor soma $\vec{r}$.

Cálculos: No caso do eixo x, somamos as componentes x de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ para obter a componente x do vetor soma $\vec{r}$:

$$r_x = a_x + b_x + c_x$$
$$= 4{,}2\text{ m} - 1{,}6\text{ m} + 0 = 2{,}6\text{ m}.$$

Analogamente, no caso do eixo y,

$$r_y = a_y + b_y + c_y$$
$$= -1{,}5\text{ m} + 2{,}9\text{ m} - 3{,}7\text{ m} = -2{,}3\text{ m}.$$

Podemos então combinar essas componentes de $\vec{r}$ para escrever o vetor em termos dos vetores unitários:

$$\vec{r} = (2{,}6\text{ m})\hat{\imath} - (2{,}3\text{ m})\hat{\jmath}, \qquad \text{(Resposta)}$$

onde $(2{,}6\text{ m})\hat{\imath}$ é a componente vetorial de $\vec{r}$ em relação ao longo do eixo x, e $-(2{,}3\text{ m})\hat{\jmath}$ é a componente vetorial de $\vec{r}$ em relação ao eixo y. A Fig. 3-16*b* mostra uma forma de obter o vetor $\vec{r}$ a partir dessas componentes. (Você pode imaginar outra forma?)

Também podemos resolver o problema determinando o módulo e o ângulo de $\vec{r}$. De acordo com a Eq. 3-6, o módulo é dado por

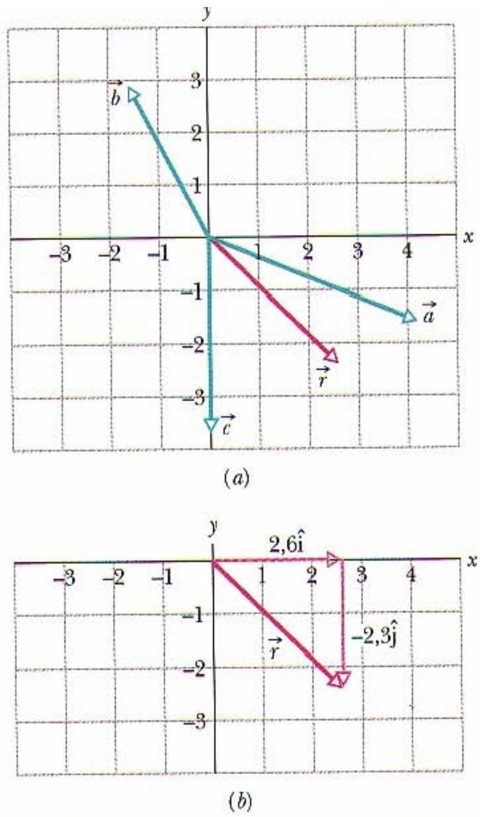


FIG. 3-16 O vetor $\vec{r}$ é a soma vetorial dos outros três vetores.

$$r = \sqrt{(2{,}6\text{ m})^2 + (-2{,}3\text{ m})^2} \approx 3{,}5\text{ m} \qquad \text{(Resposta)}$$

e o ângulo (medido em relação ao semi-eixo x positivo) é dado por

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-2{,}3\text{ m}}{2{,}6\text{ m}}\right) = -41° \qquad \text{(Resposta)}$$

onde o sinal negativo significa que o ângulo deve ser medido no sentido horário.

Exemplo.

De acordo com as pesquisas, a formiga do deserto mantém registro de seus movimentos em um sistema mental de coordenadas. Quando decide voltar ao formigueiro, soma seus deslocamentos em relação aos eixos dos sistema para calcular um vetor que aponta diretamente para o ponto de partida. Como exemplo desse cálculo, considere uma formiga que executa cinco movimentos de 6,0 cm cada um em um sistema de coordenadas xy, nas orientações mostradas na figura 3-17a, partindo do formigueiro. No final do quinto movimento, quais são o módulo e o ângulo do vetor deslocamento total $\vec{d}_{total}$ e quais são os valores correspondentes do vetor retorno $\vec{d}_{volta}$ que liga a posição final da formiga e a posição do formigueiro?

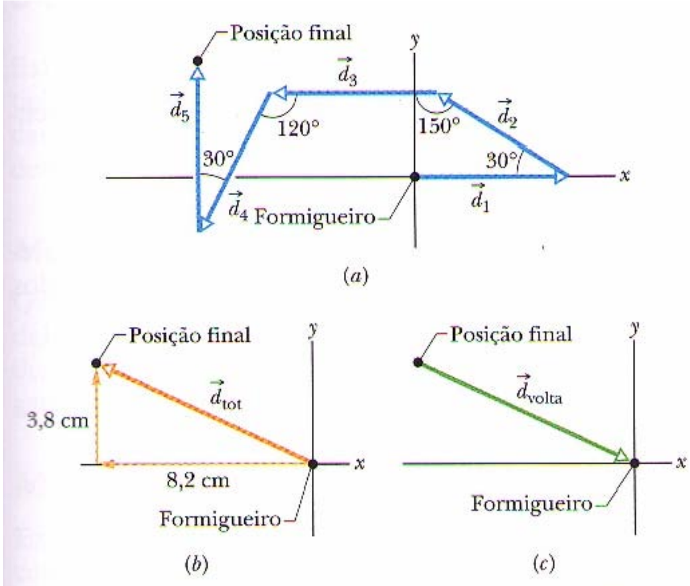


FIG. 3-17 (*a*) Movimentos de uma formiga do deserto. (*b*) Componentes *x* e *y* de $\vec{d}_{tot}$. (*c*) O vetor $\vec{d}_{volta}$ indica o caminho de volta para o formigueiro.

IDÉIAS-CHAVE (1) Para encontrar o deslocamento resultante $\vec{d}_{tot}$, precisamos somar os cinco vetores deslocamento:

$$\vec{d}_{tot} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3 + \vec{d}_4 + \vec{d}_5.$$

(2) Calculamos esta soma apenas para a componente *x*,

$$d_{tot,x} = d_{1x} + d_{2x} + d_{3x} + d_{4x} + d_{5x}, \qquad (3\text{-}14)$$

e apenas para a componente *y*,

$$d_{tot,y} = d_{1y} + d_{2y} + d_{3y} + d_{4y} + d_{5y}. \qquad (3\text{-}15)$$

(3) Obtemos o vetor $\vec{d}_{tot}$ a partir de suas componentes *x* e *y*.

Cálculos: Para resolver a Eq. 3-14, aplicamos a parte correspondente a *x* da Eq. 3-5 a cada movimento:

$$d_{1x} = (6{,}0\text{ cm})\cos 0° = +6{,}0\text{ cm}$$
$$d_{2x} = (6{,}0\text{ cm})\cos 150° = -5{,}2\text{ cm}$$
$$d_{3x} = (6{,}0\text{ cm})\cos 180° = -6{,}0\text{ cm}$$

$$d_{4x} = (6{,}0\text{ cm})\cos(-120°) = -3{,}0\text{ cm}$$
$$d_{5x} = (6{,}0\text{ cm})\cos 90° = 0.$$

A Eq. 3-14 nos dá

$$\begin{aligned} d_{tot,x} &= +6{,}0\text{ cm} + (-5{,}2\text{ cm}) + (-6{,}0\text{ cm}) \\ &\quad + (-3{,}0\text{ cm}) + 0 \\ &= -8{,}2\text{ cm}. \end{aligned}$$

Analogamente, calculamos as componentes y dos cinco movimentos usando a parte correspondente a y da Eq. 3-5. Os resultados aparecem na Tabela 3-1. Substituindo esses resultados na Eq. 3-15, obtemos:

$$d_{tot,y} = +3{,}8 \text{ cm}.$$

O vetor $\vec{d}_{tot}$ e suas componentes x e y aparecem na Fig. 3-17b. Para encontrar o módulo e o ângulo de $\vec{d}_{tot}$ a partir das componentes, usamos a Eq. 3-6. O módulo é dado por

$$d_{tot} = \sqrt{d_{tot,x}^2 + d_{tot,y}^2}$$

$$= \sqrt{(-8{,}2 \text{ cm})^2 + (3{,}8 \text{ cm})^2} = 9{,}0 \text{ cm}.$$

Para encontrar o ângulo (medido a partir do semi-eixo x positivo), calculamos o arco tangente:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{d_{tot,y}}{d_{tot,x}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{3{,}8 \text{ cm}}{-8{,}2 \text{ cm}}\right) = -24{,}86°.$$

A resposta -24,86^o parece indicar que o vetor d_{total} está no quarto quadrante de nosso sistema de coordendas x-y. Entretanto, quando compomos o vetor a partir das componentes vemos que d_{total} está no segundo quadrante. Assim, precisamos "corrigir" a resposta da calculadora somando 180^0:

$$\theta = -24{,}86° + 180° = 155{,}14° \approx 155°.$$

Assim, o deslocamento $\vec{d}_{tot}$ da formiga, na notação módulo-ângulo, é dado por

$$d_{tot} = 9{,}0 \text{ cm a } 155°. \qquad \text{(Resposta)}$$

O vetor $\vec{d}_{volta}$, que aponta da formiga para o formigueiro, tem o mesmo módulo que $\vec{d}_{tot}$ e o sentido oposto (Fig. 3-17c). Já temos o ângulo ($-24{,}86° \approx -25°$) para o sentido oposto a $\vec{d}_{tot}$. Assim, $\vec{d}_{volta}$ é dado por

$$d_{volta} = 9{,}0 \text{ cm a } -25°. \qquad \text{(Resposta)}$$

Uma formiga do deserto que se afasta mais de 500 m do formigueiro realiza, na verdade, milhares de deslocamentos. Ainda assim, de alguma forma ela é capaz de calcular $\vec{d}_{volta}$ (sem estudar este capítulo).

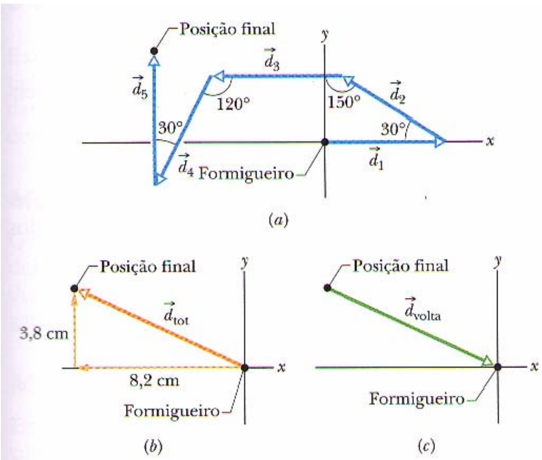


FIG. 3-17 (a) Movimentos de uma formiga do deserto. (b) Componentes x e y de $\vec{d}_{tot}$. (c) O vetor $\vec{d}_{volta}$ indica o caminho de volta para o formigueiro.

Multiplicação de Vetores

Existem três forma de multiplicar vetores, mas nenhuma é igual à algébrica.

Multiplicação de um Vetor por um Escalar: Quando multiplicamos um vetor $\vec{a}$ por um escalar s obtemos outro vetor cujo o módulo é o produto do módulo de $\vec{a}$ pelo valor absoluto de s, cuja a direção é a mesma de $\vec{a}$ e cujo o sentido é o mesmo de $\vec{a}$, se s for positivo, e oposto, se s for negativo. Para dividir $\vec{a}$ por s, multiplicamos $\vec{a}$ por 1/s.

Multiplicação de um Vetor por um Vetor: Existem duas formas de multiplicar um vetor por um vetor: uma forma conhecida como **produto escalar**, resulta em um escalar; a outra (conhecida como **produto vetorial**) resulta num vetor.

O Produto Escalar

O produto escalar dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ da figura ao lado está escrito como $\vec{a}$. $\vec{b}$ e definido pela equação:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \phi,$$

ou ainda,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a \cos \phi)(b) = (a)(b \cos \phi).$$

Onde a é o módulo $\vec{a}$, b é o módulo de $\vec{b}$ e ϕ é o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Note que o lado direito da equação acima contém apenas escalares. Assim, o produto $\vec{a}$. $\vec{b}$ representa uma grandeza escalar e é lido como “a escalar b”.

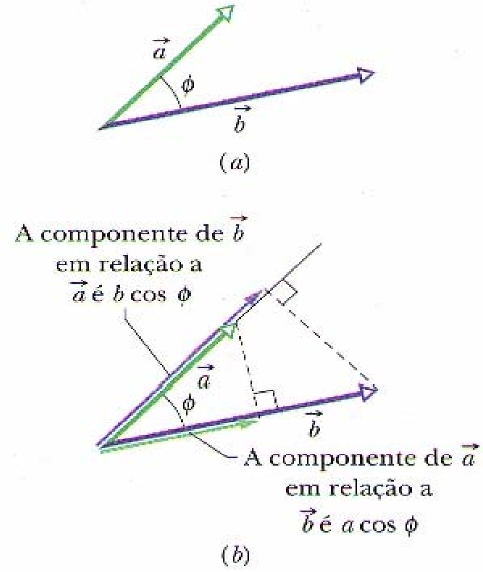


FIG. 3-20 (*a*) Dois vetores, $\vec{a}$ e $\vec{b}$, formando um ângulo ϕ. (*b*) Cada vetor tem uma componente na direção do outro vetor.

Se o ângulo ϕ entre dois vetores é 0°, a componente de um vetor em relação ao outro é máxima, o que também acontece com o produto escalar dos vetores. Se o ângulo é 90°, a componente de um vetor em relação ao outro é nula, o que também acontece com o produto escalar.

A propriedade comutativa se aplica ao produto escalar, de modo que:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Se dois vetores são escritos em termos dos vetores unitários, o produto assume a forma:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \hat{\mathrm{i}} + a_y \hat{\mathrm{j}} + a_z \hat{\mathrm{k}}) \cdot (b_x \hat{\mathrm{i}} + b_y \hat{\mathrm{j}} + b_z \hat{\mathrm{k}})$$

A expressão acima pode ser ainda expandida de acordo com a propriedade distributiva: calculando os produtos escalares das componentes vetoriais do primeiro vetor pelas componentes vetoriais do segundo vetor, obtendo:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Exemplo.

Qual é o ângulo ϕ entre $\vec{a} = 3{,}0\hat{i} - 4{,}0\hat{j}$ e $\vec{b} = -2{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{k}$? (*Atenção:* Muitos dos cálculos a seguir não são necessários quando se usa uma calculadora, mas você aprenderá mais sobre produtos escalares se, pelo menos no início, executar esses cálculos.)

IDÉIA-CHAVE O ângulo entre as orientações dos dois vetores aparece na definição de seu produto escalar (Eq. 3-20):

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi. \tag{3-24}$$

Cálculos: Na Eq. 3-24, a é o módulo de $\vec{a}$, ou seja,

$$a = \sqrt{3{,}0^2 + (-4{,}0)^2} = 5{,}00, \tag{3-25}$$

e b é o módulo de $\vec{b}$, ou seja,

$$b = \sqrt{(-2{,}0)^2 + 3{,}0^2} = 3{,}61. \tag{3-26}$$

Podemos calcular o lado esquerdo da Eq. 3-24 escrevendo os vetores em termos dos vetores unitários e usando a propriedade distributiva:

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= (3{,}0\hat{i} - 4{,}0\hat{j})\cdot(-2{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{k})\\ &= (3{,}0\hat{i})\cdot(-2{,}0\hat{i}) + (3{,}0\hat{i})\cdot(3{,}0\hat{k})\\ &\quad + (-4{,}0\hat{j})\cdot(-2{,}0\hat{i}) + (-4{,}0\hat{j})\cdot(3{,}0\hat{k}).\end{aligned}$$

Em seguida, aplicamos a Eq. 3-20 a cada termo desta última expressão. O ângulo entre os vetores unitários do primeiro termo ($\hat{i}$ e $\hat{i}$) é de 0°, e nos outros ângulos é de 90°. Assim, temos

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= -(6{,}0)(1) + (9{,}0)(0) + (8{,}0)(0) - (12)(0)\\ &= -6{,}0.\end{aligned}$$

Substituindo este resultado e os resultados das Eqs. 3-25 e 3-26 na Eq. 3-24, obtemos:

$$-6{,}0 = (5{,}00)(3{,}61)\cos\phi,$$

e portanto $$\phi = \cos^{-1}\frac{-6{,}0}{(5{,}00)(3{,}61)} = 109° \approx 110°.$$

(Resposta)

O Produto Vetorial

O produto vetorial de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é escrito como $\vec{a}$ x $\vec{b}$ (lê-se "a vetor b"), e resulta em um terceiro vetor $\vec{c}$ cujo módulo é

$$c = ab\,\mathrm{sen}\,\phi,$$

Onde ϕ é o menor dos dois ângulos entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são paralelos ou antiparalelos, $\vec{a}\times\vec{b} = 0$. O módulo de $\vec{a}\times\vec{b}$, que pode ser escrito como $|\vec{a}\times\vec{b}|$, é máximo quando $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são mutuamente perpendiculares um ao outro.

A direção de $\vec{c}$ é perpendicular ao plano definido por $\vec{a}$ e $\vec{b}$. A Figura 3-21a mostra como podemos determinar o sentido de $\vec{c} = \vec{a}$ x $\vec{b}$ usando a **regra da mão direita**. Superponha as origens de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sem mudar suas orientações e imagine uma reta perpendicular ao plano definido pelos dois vetores, passando pela origem comum. Envolva essa linha com a mão direita de modo que seus dedos empurrem $\vec{a}$ em direção a $\vec{b}$ ao longo do menor ângulo entre os vetores. O polegar estendido aponta no sentido de $\vec{c}$.

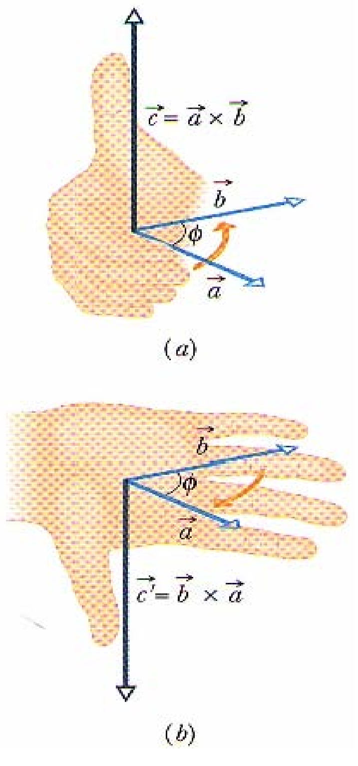


FIG. 3-21 Ilustração da regra da mão direita para produtos vetoriais. (a) Empurre o vetor $\vec{a}$ na direção do vetor $\vec{b}$ com os dados da mão direita. O polegar estendido mostra a orientação do vetor $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$. ($b$) O vetor $\vec{b}\times\vec{a}$ tem o sentido oposto ao de $\vec{a}\times\vec{b}$.

No caso do produto vetorial, a ordem dos vetores é importante. Na figura 3-21b, estamos determinando o sentido de $\vec{c}\,' = \vec{b} x \vec{a}$, de modo que os dedos da mão direita empurram $\vec{b}$ na direção de $\vec{a}$ ao longo do menor ângulo. O polegar neste caso aponta no sentido contrário ao da figura 3-21a, de modo que $\vec{c}\,' = -\vec{c}\,'$, ou seja,

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Assim, observa-se que a propriedade comutativa não se aplica ao produto vetorial. O produto vetorial pode ser, ainda, escrito em termos dos vetores unitários da seguinte forma:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}}) \times (b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} + b_z\hat{\mathrm{k}}),$$

podendo ser expandido seguindo as regras, como por exemplo:

$a_x\hat{\mathrm{i}} \times b_x\hat{\mathrm{i}} = a_x b_x(\hat{\mathrm{i}} \times \hat{\mathrm{i}}) = 0,$ $\rightarrow$ os vetores unitários $\hat{i}$ e $\hat{i}$ são paralelos.

Analogamente,

$a_x\hat{\mathrm{i}} \times b_y\hat{\mathrm{j}} = a_x b_y(\hat{\mathrm{i}} \times \hat{\mathrm{j}}) = a_x b_y\hat{\mathrm{k}}.$ $\rightarrow$ módulo de $\hat{i}$ x $\hat{j}$ = 1, e o ângulo entre eles é 90^0.

Usando a regra da mão direita, vemos que o sentido de $\hat{i}$ x $\hat{j}$ é o sentido do semi-eixo z positivo, ou seja, o sentido de $\hat{k}$. E finalmente chegamos a:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - b_z a_y)\hat{\mathrm{i}} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{\mathrm{j}} + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{\mathrm{k}}.$$

Exemplo.

Na Fig. 3-22, o vetor $\vec{a}$ está no plano xy, tem módulo igual a 18 unidades e uma orientação que faz um ângulo de 250° com o semi-eixo x positivo. O vetor $\vec{b}$ tem módulo de 12 unidades e está orientado ao longo do semi-eixo z positivo. Qual é o produto vetorial $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$?

IDÉIA-CHAVE Quando conhecemos dois vetores na notação módulo-ângulo podemos calcular o módulo do produto vetorial usando a Eq. 3-27 e a orientação do produto vetorial usando a regra da mão direita da Fig. 3-21.

Cálculos: O módulo do produto vetorial é dado por

$$c = ab \operatorname{sen} \phi = (18)(12)(\operatorname{sen} 90^\circ) = 216. \quad \text{(Resposta)}$$

Para determinar a orientação do produto vetorial na Fig. 3-22, coloque os dedos da mão direita em torno de uma reta perpendicular ao plano de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ (a reta na qual se encontra o vetor $\vec{c}$) de modo que seus dedos empurrem o vetor $\vec{a}$ na direção de $\vec{b}$; seu polegar estendido fornece a orientação de $\vec{c}$. Assim, como mostra a figura, $\vec{c}$ está no plano xy. Como a direção de $\vec{c}$ é perpendicular à direção de $\vec{a}$, o vetor faz um ângulo de

$$250^\circ - 90^\circ = 160^\circ \quad \text{(Resposta)}$$

com o semi-eixo x positivo.

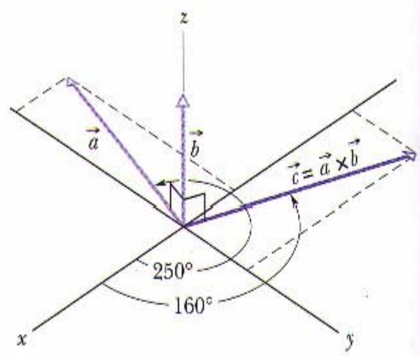


FIG. 3-22 O vetor $\vec{c}$ (no plano xy) é o produto vetorial dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Exemplo.

Se $\vec{a} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$ e $\vec{b} = -2\hat{\imath} + 3\hat{k}$, determine $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$?

IDÉIA-CHAVE Quando dois vetores estão expressos em termos dos vetores unitários, podemos determinar o produto vetorial usando a lei distributiva.

Cálculos: Temos:

$$\vec{c} = (3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}) \times (-2\hat{\imath} + 3\hat{k})$$
$$= 3\hat{\imath} \times (-2\hat{\imath}) + 3\hat{\imath} \times 3\hat{k} + (-4\hat{\jmath}) \times (-2\hat{\imath}) + (-4\hat{\jmath}) \times 3\hat{k}.$$

Podemos calcular os valores dos diferentes termos usando a Eq. 3-27 e determinando a orientação dos vetores com o auxílio da regra da mão direita. No primeiro termo, o ângulo ϕ entre os dois vetores envolvidos no produto vetorial é 0; nos outros três termos, $\phi = 90°$. O resultado é o seguinte:

$$\vec{c} = -6(0) + 9(-\hat{\jmath}) + 8(-\hat{k}) - 12\hat{\imath}$$
$$= -12\hat{\imath} - 9\hat{\jmath} - 8\hat{k}. \qquad \text{(Resposta)}$$

O vetor $\vec{c}$ é perpendicular a $\vec{a}$ e $\vec{b}$, o que pode ser demonstrado observando que $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ e $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$, ou seja, não existem componentes de $\vec{c}$ em relação a $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

3 – Movimento em 2D (ou 3D)

Agora consideramos as grandezas como deslocamento, velocidade e aceleração como vetores, ou seja, alem de intensidade (ou módulo) também apresentam direção e sentido.

Exemplo.

Na Fig. 4-2 o vetor posição de uma partícula é inicialmente

$$\vec{r}_1 = (-3{,}0\text{ m})\hat{\imath} + (2{,}0\text{ m})\hat{\jmath} + (5{,}0\text{ m})\hat{k}$$

e depois passa a ser

$$\vec{r}_2 = (9{,}0\text{ m})\hat{\imath} + (2{,}0\text{ m})\hat{\jmath} + (8{,}0\text{ m})\hat{k}.$$

Qual é o deslocamento da partícula $\Delta\vec{r}$ de $\vec{r}_1$ para $\vec{r}_2$?

IDÉIA-CHAVE O deslocamento $\Delta\vec{r}$ é obtido subtraindo o vetor posição inicial $\vec{r}_1$ do vetor posição final $\vec{r}_2$.

Cálculo: A subtração nos dá

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$
$$= [9{,}0 - (-3{,}0)]\hat{\imath} + [2{,}0 - 2{,}0]\hat{\jmath} + [8{,}0 - 5{,}0]\hat{k}$$
$$= (12\text{ m})\hat{\imath} + (3{,}0\text{ m})\hat{k}. \qquad \text{(Resposta)}$$

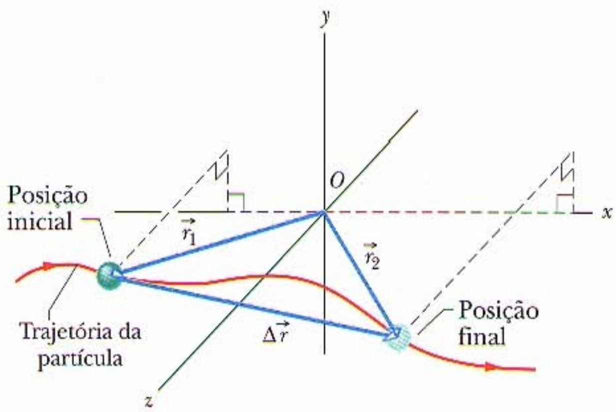


FIG. 4-2 O deslocamento $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ vai da extremidade do vetor correspondente à posição inicial, $\vec{r}_1$, até a extremidade do vetor correspondente à posição final, $\vec{r}_2$.

O vetor deslocamento é paralelo ao plano *xz* porque a componente *y* é nula.

Exemplo 4-2

Um coelho atravessa um estacionamento, no qual, por alguma razão, um conjunto de eixos coordenados foi desenhado. As coordenadas da posição do coelho, em metros, em função do tempo t, em segundos, são dadas por

$$x = -0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28 \quad (4\text{-}5)$$

e

$$y = 0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30. \quad (4\text{-}6)$$

(a) No instante $t = 15$ s, qual é o vetor posição $\vec{r}$ do coelho na notação de vetores unitários e na notação módulo-ângulo?

IDÉIA-CHAVE As coordenadas x e y da posição do coelho, dadas pelas Eqs. 4-5 e 4-6, são as componentes escalares do vetor posição $\vec{r}$ do coelho.

Cálculos: Podemos escrever

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\mathrm{i}} + y(t)\hat{\mathrm{j}}. \quad (4\text{-}7)$$

(Escrevemos $\vec{r}\,(t)$ em vez de $\vec{r}$ porque as componentes são funções de t e, portanto, $\vec{r}$ também é função de t.)

Em $t = 15$ s, as componentes escalares são

$$x = (-0{,}31)(15)^2 + (7{,}2)(15) + 28 = 66 \text{ m}$$

e

$$y = (0{,}22)(15)^2 - (9{,}1)(15) + 30 = -57 \text{ m},$$

e portanto $\quad \vec{r} = (66 \text{ m})\hat{\mathrm{i}} - (57 \text{ m})\hat{\mathrm{j}}, \quad$ (Resposta)

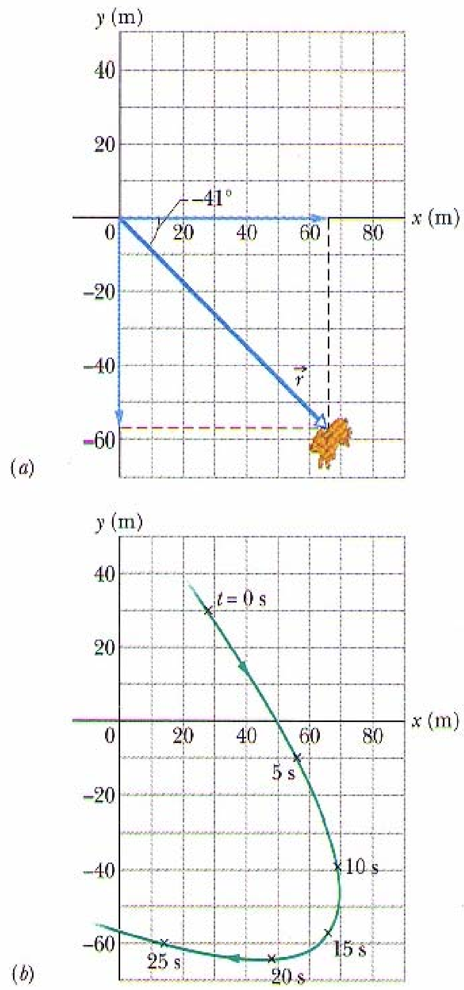


FIG. 4-3 (a) O vetor posição de um coelho, $\vec{r}$, no instante $t = 15$ s. As componentes escalares de $\vec{r}$ são mostradas ao longo dos eixos. (b) A trajetória do coelho e sua posição para cinco valores de t.

que está desenhado na Fig. 4-3a. Para obter o módulo e o ângulo de $\vec{r}$, usamos a Eq. 3-6:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(66 \text{ m})^2 + (-57 \text{ m})^2}$$
$$= 87 \text{ m}, \quad \text{(Resposta)}$$

e

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\left(\frac{-57 \text{ m}}{66 \text{ m}}\right) = -41°. \quad \text{(Resposta)}$$

Verificação: Embora $\theta = 139°$ possua a mesma tangente que $-41°$, os sinais das componentes de $\vec{r}$ indicam que o ângulo desejado é $139° - 180° = -41°$.

(b) Trace o gráfico da trajetória do coelho de $t = 0$ a $t = 25$ s.

Plotagem: Podemos repetir a parte (a) para vários valores de t e plotar os resultados. A Fig. 4-3b mostra os pontos do gráfico para cinco valores de t e a curva que liga esses pontos. Podemos também plotar a curva em uma calculadora gráfica a partir das Eqs. 4-5 e 4-6.

Exemplo 4-3

Determine a velocidade $\vec{v}$ do coelho do Exemplo 4-2 no instante $t = 15$ s.

Sendo:

$$x = -0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28$$
$$y = 0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30.$$

IDÉIA-CHAVE Podemos determinar $\vec{v}$ calculando as derivadas das componentes do vetor posição do coelho.

Cálculos: Aplicando a parte da Eq. 4-12 correspondente a v_x à Eq. 4-5, descobrimos que a componente x de $\vec{v}$ é

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(-0{,}31t^2 + 7{,}2t + 28)$$
$$= -0{,}62t + 7{,}2. \qquad (4\text{-}13)$$

Em $t = 15$ s, isso nos dá $v_x = -2{,}1$ m/s. Da mesma forma, aplicando a parte da Eq. 4-12 correspondente a v_y à Eq. 4-6, descobrimos que a componente y é

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}22t^2 - 9{,}1t + 30)$$
$$= 0{,}44t - 9{,}1. \qquad (4\text{-}14)$$

Em $t = 15$ s, isso nos dá $v_y = -2{,}5$ m/s. Assim, de acordo com a Eq. 4-11,

$$\vec{v} = (-2{,}1 \text{ m/s})\hat{i} + (-2{,}5 \text{ m/s})\hat{j}, \quad \text{(Resposta)}$$

que está desenhada na Fig. 4-6, tangente à trajetória do coelho e no sentido em que ele está se movendo em $t = 15$ s.

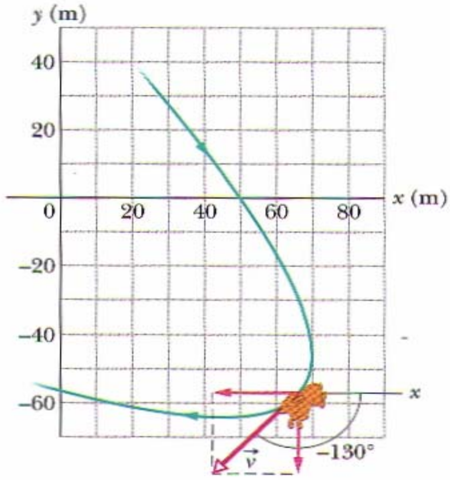


FIG. 4-6 A velocidade $\vec{v}$ do coelho em $t = 15$ s.

Para obter o módulo e o ângulo de $\vec{v}$, podemos usar uma calculadora ou escrever, de acordo com a Eq. 3-6,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-2{,}1 \text{ m/s})^2 + (-2{,}5 \text{ m/s})^2}$$
$$= 3{,}3 \text{ m/s} \qquad \text{(Resposta)}$$

e

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1}\left(\frac{-2{,}5 \text{ m/s}}{-2{,}1 \text{ m/s}}\right)$$
$$= \tan^{-1} 1{,}19 = -130°. \qquad \text{(Resposta)}$$

Verificação: O ângulo é $-130°$ ou $-130° + 180° = 50°$?

Exemplo 4-4

Para o coelho dos Exemplos 4-2 e 4-3, determine a aceleração $\vec{a}$ no instante $t = 15$ s.

IDÉIA-CHAVE Podemos determinar a aceleração $\vec{a}$ calculando as derivadas das componentes da velocidade do coelho.

Cálculos: Aplicando a parte da Eq. 4-18 correspondente a a_x à Eq. 4-13, descobrimos que a componente x de $\vec{a}$ é

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(-0{,}62t + 7{,}2) = -0{,}62 \text{ m/s}^2.$$

Analogamente, aplicando a parte da Eq. 4-18 correspondente a a_y à Eq. 4-14 descobrimos que a componente y é

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}44t - 9{,}1) = 0{,}44 \text{ m/s}^2.$$

Vemos que essa aceleração não varia com o tempo (é constante), pois a variável tempo t não aparece na expressão das componentes da aceleração. De acordo com a Eq. 4-17,

$$\vec{a} = (-0{,}62 \text{ m/s}^2)\hat{\text{i}} + (0{,}44 \text{ m/s}^2)\hat{\text{j}}, \quad \text{(Resposta)}$$

que é mostrada superposta à trajetória do coelho na Fig. 4-8.

Para obter o módulo e o ângulo de $\vec{a}$, novamente podemos usar uma calculadora ou a Eq. 3-6. No caso do módulo, temos:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0{,}62 \text{ m/s}^2)^2 + (0{,}44 \text{ m/s}^2)^2}$$
$$= 0{,}76 \text{ m/s}^2. \quad \text{(Resposta)}$$

No caso do ângulo, temos:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{a_y}{a_x} = \tan^{-1}\left(\frac{0{,}44 \text{ m/s}^2}{-0{,}62 \text{ m/s}^2}\right) = -35°.$$

Entretanto, esse ângulo, que é o resultado fornecido por uma calculadora, indica que a orientação de $\vec{a}$ é para a direita e para baixo na Fig. 4-8. Porém, sabemos pelas componentes x e y que a orientação de $\vec{a}$ é para a esquerda e para cima. Para determinar o outro ângulo que possui a mesma tangente que $-35°$, mas não é mostrado pela calculadora, somamos 180°:

$$-35° + 180° = 145°. \quad \text{(Resposta)}$$

Este novo resultado *é* compatível com as componentes de $\vec{a}$. Observe que $\vec{a}$ tem o mesmo módulo e a mesma orientação para qualquer instante de tempo, já que a aceleração do coelho é constante.

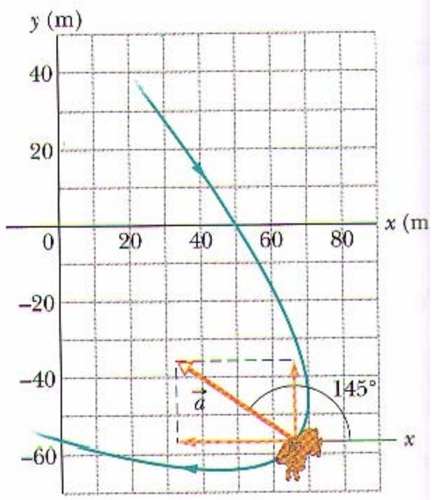


FIG. 4-8 A aceleração $\vec{a}$ do coelho em $t = 15$ s. O coelho possui essa mesma aceleração em todos os pontos de sua trajetória.

Projeteis e queda livre

Para esses tipos de movimentos devido a aceleração da gravidade cuja componente afeta apenas os vetores com projeção no eixo vertical (y) teremos um movimento uniformemente variado. No eixo horizontal, na ausência e uma aceleração dada teremos um movimento uniforme. Por hora ignoraremos os efeitos do ar nos movimentos.

Imaginemos um maça lançada com uma velocidade inicial $\vec{v}_0$ que pode ser descrita como:

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{\text{i}} + v_{0y}\hat{\text{j}}.$$

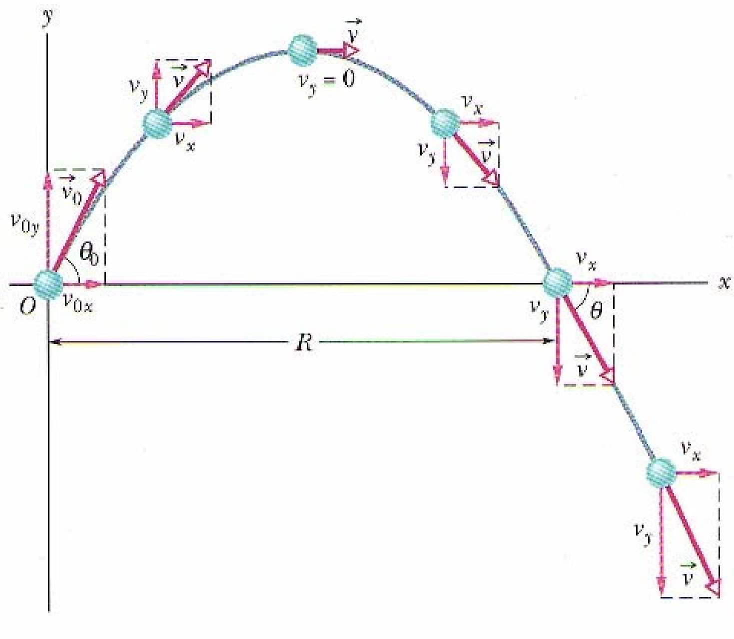
As componentes v_{0x} e v_{0y} podem ser calculadas se conhecermos o ângulo θ_0 entre $\vec{v}_0$ e o semi-eixo x positivo:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta \quad \text{e} \quad v_{0y} = v_0 sen\,\theta \qquad (4\text{-}20)$$

Durante o movimento bidimensional, o vetor $\vec{r}$ e a velocidade $\vec{v}$ do projétil mudam constantemente, mas o vetor aceleração $\vec{a}$ é constante e está sempre dirigido verticalmente para baixo. **O projétil não possui aceleração horizontal.**

O movimento de projéteis parece complicado, mas temos seguinte propriedade simplificadora (demonstrada experimentalmente):

FIG. 4-10 Trajetória de um projétil que é lançado em $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ com uma velocidade inicial $\vec{v}_0$. São mostradas a velocidade inicial e as velocidades em vários pontos ao longo da trajetória, juntamente com suas componentes. Observe que a componente horizontal da velocidade permanece constante, mas a componente vertical muda continuamente. O *alcance R* é a distância horizontal percorrida pelo projétil *quando retorna à altura do lançamento*.

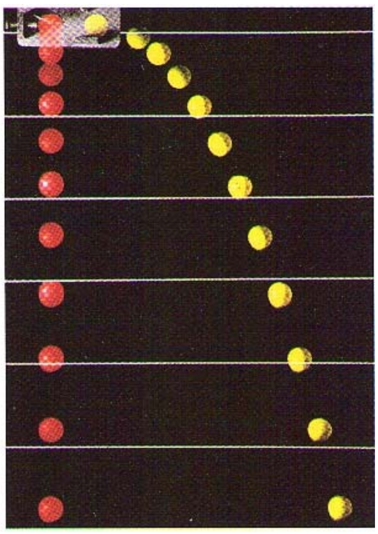


No movimento de projéteis, o movimento horizontal e o movimento vertical são independentes, ou seja, um não afeta o outro.

Esta propriedade permite decompor um problema que envolve um movimento bidimensional em dois problemas unidimensionais independentes e mais fáceis de serem resolvidos, um para o movimento horizontal (com aceleração nula) e outro para o movimento vertical (com aceleração constante para baixo).

Exemplo.

FIG. 4-11 Uma bola é deixada cair a partir do repouso no mesmo instante que outra bola é lançada horizontalmente para a direita. Os movimentos verticais das duas bolas são iguais. *Fonte:* Richard Megna/ Fundamental Photographs.



Analise do movimento horizontal

Como não existe aceleração na direção horizontal, a componente horizontal v_x da velocidade de um projétil permanece inalterada e igual ao seu valor inicial v_{0x} durante toda a trajetória. Em qualquer instante t, o deslocamento horizontal do projétil em relação à posição inicial, $x - x_0$, é dado por

$$x - x_0 = v_{0x}t.$$

Como $v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$, temos:

$$x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0)t.$$

Análise do movimento vertical

O movimento vertical é o movimento de queda livre. Neste, a aceleração é constante. Assim:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \\ &= (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2, \end{aligned}$$

onde a componente vertical da velocidade inicial v_{oy}, é substituída pela expressão equivalente $v_0 sen\theta_0$.

$$v_y = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 - gt$$

$$v_y^2 = (v_0 \operatorname{sen} \theta_0)^2 - 2g(y - y_0).$$

Equação da Trajetória

A equação do caminho percorrido pelo projétil, é a equação de sua trajetória. Ela pode ser obtida eliminando o tempo t, nas equações acimas para as coordenadas x e y. Explicitando t na equação e substituindo uma na outra, obtemos, após algumas manipulações algébricas:

$$y = (\tan \theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} \quad \text{(trajetória)}.$$

Esta é a equação da trajetória mostrada na figura 4-10. Ao deduzi-la, para simplificar, fizemos $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$, como g, θ_0 e v_0 são constantes, vemos que a equação acima é da forma $y = ax + bx^2$, onde a e b são constantes. **Como esta equação é uma parábola, a trajetória é parabólica.**

O efeito do Ar!

Até agora, supusemos que o ar não exerce efeito algum sobre o movimento de um projétil. Entretanto, em muitas situações a diferença entre a trajetória calculada dessa forma e a trajetória real do projétil pode ser muito grande, já que o ar resiste (se opõe) ao movimento. A Fig. 4-14, por exemplo, mostra as trajetórias de duas bolas de beisebol que deixam o bastão fazendo um ângulo de 60° com a horizontal, com uma velocidade inicial de 44,7 m/s. A trajetória I (de uma bola de verdade) foi calculada para as condições normais de jogo, levando em conta a resistência do ar. A trajetória II (de uma bola em condições ideais) é a trajetória que a bola seguiria no vácuo.

TABELA 4-1

Trajetórias de Duas Bolas de Beisebol*

	Trajetória I (Ar)	Trajetória II (Vácuo)
Alcance	98,5 m	177 m
Altura máxima	53,0 m	76,8 m
Tempo de percurso	6,6 s	7,9 s

*Veja a Fig. 4-14. O ângulo de lançamento é de 60° e a velocidade de lançamento é de 44,7 m/s.

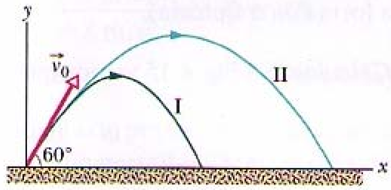


FIG. 4-14 (I) Trajetória teórica de uma bola, levando em conta a resistência do ar. (II) Trajetória que a bola seguiria no vácuo, calculada usando as equações deste capítulo. Os dados correspondentes estão na Tabela 4-1. (Adaptada de "The Trajectory of a Fly Ball," Peter J. Brancazio, *The Physics Teacher*, January 1985.)

4 – Introdução a biomecânica e biodinâmica

Na biomecânica, usando leis e conceitos da mecânica, interpretamos e explicamos uma serie de fenômenos que ocorrem quando um ser vivo esta em repouso ou movimento. Para que aja um movimento dos corpos é preciso haver uma força. Na natureza existem 4 forcas fundamentais (gravitacional, eletromagnética, nuclear forte e nuclear fraca) e diversas forcas derivadas (elásticas, de atrito, de contato, moleculares, musculares, etc.) Na biomecânica, analisamos principalmente os efeitos das forcas derivadas; estas podem ser de origem externa ao corpo onde agem ou resultante do efeito de vários componentes do corpo.

Forca elástica

Ao serem submetidos a certos esforços, geralmente os corpos sofrem deformação em suas dimensões lineares. Nestas condições, a deformação sofrida dependerá do esforço aplicado, de sua forma geométrica e da natureza do material que é constituído. Esses esforços "deformantes" podem ser basicamente de 4 tipos (tração, compressão, flexão e torção).

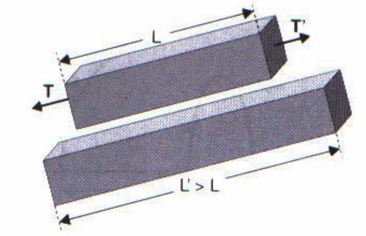


Figura Corpo de comprimento L, submetido a esforço de tração.

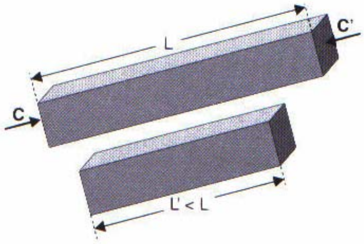


Figura Corpo de comprimento L, submetido a esforço de compressão.

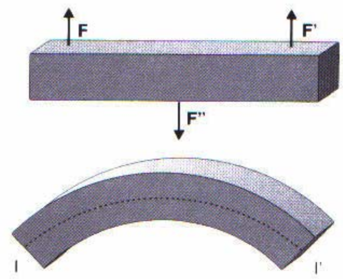


Figura Corpo submetido a esforço de flexão.

Figura Corpo submetido a um esforço de torção.

A força elástica é proporcional ao deslocamento $\Delta\vec{s}$ segundo a expressão

$$\vec{F}_{el} = k \times \Delta\vec{s}$$

onde *k* é a constante elástica do material. A expressão acima é conhecida com lei de Hooke. Essa lei é valida para materiais de composição homogênea e para pequenas deformações (para não alterar as propriedades do corpo que se deforma)

. Lembremos aqui que a massa é uma propriedade intrínseca dos corpos, independentes da circunstancia em que estejam. A massa esta diretamente relacionada à propriedade física dos corpos chamada de *inércia*. Aprendemos no ensino médio que a **2ª lei de Newton** nos diz que qualquer que seja a força $\vec{F}$ que aja sobre um corpo de massa *m*, a aceleração resultante da ação dessa força será igual a $\vec{a} = \vec{F}/m$. Dessa forma, um corpo terá movimento acelerado quando uma forca não nula agir sobre ele. A direção da forca resultante $\vec{F}$ e da aceleração $\vec{a}$ são mas mesma e suas magnitudes são proporcionais.

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Aqui, $\vec{p} = m\vec{v}$ é definido como quantidade de movimento ou **momento linear**. Podemos escrever a força resultante $\vec{F}$ que age sobre um corpo de massa *m* como a taxa de variação de seu momento linear $\vec{p}$.

Podemos definir o peso, $\vec{P}$, de um corpo de massa m como a forca de atração que a Terra exerce sobre o corpo, ou seja, a forca que o corpo sofre devido a aceleração da gravidade que ele experimenta, $\vec{P} = m\vec{g}$.

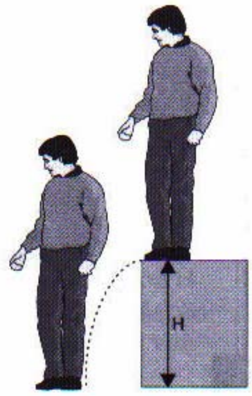
Lembremos também que a 3ª lei de Newton diz que a cada ação se opõe uma reação igual, mais precisamente, a cada forca exercida exista uma forca de mesmo modulo e sentido contrario. Por exemplo, imaginemos uma pessoa que da um mergulho de cima de um barco. Isto faz com que o barco siga na direção oposta a do mergulhador.

Dizemos ainda que quando dois corpos estão isolados (sujeito a penas as forcas mutuas que possam atuar entre si), a variação do momento linear do sistema é nula pois não existe forca externa ao sistema.

Para um sistema isolado temos:

$$\vec{F}_{ext} = 0 \rightarrow \sum \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

Exemplo: A *tíbia* é o osso mais vulnerável da perna do ser humano. Esse osso sofre fratura para esforços de *compressão* da ordem de 5×10^4 N. Suponha que um homem com 75 kg de massa salte de uma altura H e, ao cair no chão, *não dobre os joelhos*. O esforço que a tíbia sofre faz com que ela tenha um encurtamento $\Delta l \approx 1$ cm. Qual deverá ser o valor máximo de H para que esse osso não frature?



Resolução: Com (3.13) determinamos a velocidade **v**, com a qual os pés do homem chegam ao chão: $v^2 = 2gH$. Ao tocar o chão, a tíbia sofre uma força média de compressão **F**, que provoca uma deformação Δl. Esta deformação acontece com uma aceleração média **a**;

$$2gH = 2a\Delta l \Rightarrow a = g(H/\Delta l).$$

A intensidade da compressão será

$$F = mgH/\Delta l;$$

onde *m* é a massa do humano.

Se $F = 5\times10^4$ N, então temos que

$$H = (5\times10^4\ \text{N})(0{,}01\text{m})/(75\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2) \approx 0{,}7\ \text{m}.$$

Assim, ignorando a ação muscular, se um homem com 75 kg saltar de alturas menores que 70 cm e cair de pé, não terá sua tíbia fraturada.

Forças de atrito

Outro tipo de *força derivada* bastante comum é a *força de contato*. A origem dessa força é o contato físico entre dois corpos. As *forças de atrito* são um caso típico de forças de contato. A intensidade dessa força depende do coeficiente de atrito entre as superfícies dos corpos que estão em contato.

Na Figura 3.29 temos um corpo de peso $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, em repouso e em movimento. A massa do corpo é *m*. Em qualquer dessas situações:

$\mathbf{N} = \mathbf{P}$: componente de vínculo ou força normal de contato.

Quando o corpo está em *repouso*, $\mathbf{f}_e = \mu_e\mathbf{N}$: força de atrito estático.

Quando o corpo está em *movimento*, devido à ação da força externa, $\mathbf{F}$, $\mathbf{f}_c = \mu_c\mathbf{N}$: força de atrito cinético. μ_c e μ_e são respectivamente os coeficientes de atrito cinético e estático. Para a mesma superfície, geralmente $\mu_c < \mu_e$.

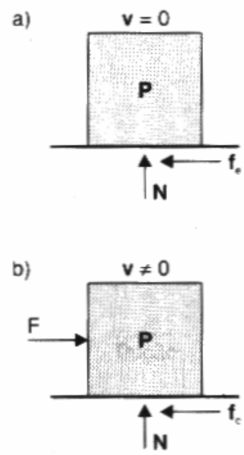
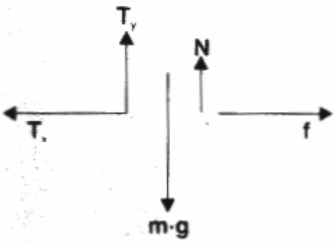


Figura 3.29 Corpo de peso **P** em repouso (a) e em movimento (b); as forças de atrito são, respectivamente, a estática $\mathbf{f}_e$ e a cinética $\mathbf{f}_c$.

Exemplo: Considere um paciente com 70 kg submetido a um esforço de *tração*, como se vê na figura ao lado. Qual será o valor máximo da massa M, para que o esforço **T** produzido não desloque o paciente ao longo da cama? Considere o coeficiente de atrito entre a cama e as roupas do paciente igual a 0,2.



Resolução: Sobre o paciente de massa m, agem forças derivadas e fundamentais. Como o sistema paciente-massa M está em equilíbrio, então

$$Mg = T \Rightarrow M = T/g \qquad (1)$$

$$N + T_y = m\cdot g \Rightarrow N = m\cdot g - T\cdot \text{sen}\,30° \qquad (2)$$

$$f = \mu\cdot N = T\cdot\cos 30° \Rightarrow N = T\cdot\cos 30°/\mu \qquad (3)$$

de (2) e (3), $T = \mu\cdot m\cdot g/(\cos 30° + \mu\cdot\text{sen}\,30°) \qquad (4)$

Finalmente, de (1) e (4) achamos que o valor máximo de M deverá ser $M = \mu\cdot m/(\cos 30° + \mu\cdot\text{sen}\,30°) = (0{,}2\times 70\text{ kg})/(\cos 30° + 0{,}2\cdot\text{sen}\,30°) = 14{,}5\text{ kg}$.

Força muscular

Força muscular é um conjunto de forças cuja origem está no *tecido muscular.* Fisiologicamente, nesse tecido, acontecem interações de certas proteínas que experimentam mudanças de configuração, proporcionando, assim, uma *contração* rápida e voluntária. A ação dessa força é conseqüência da seguinte transformação de energia

Energia Química ⇒ Energia Mecânica + Energia Térmica.

A Figura 3.30 mostra a constituição básica de um tecido muscular. O músculo estriado é constituído por *fibras longas*, cujos extremos estão ligados a *tendões* (a). Essas fibras são células muito compridas com muitos núcleos (b). Cada fibra contém muitas *miofibrilas,* ou conjunto paralelo de filamentos contráteis (c). As miofibrilas estão divididas em sarcômeros (unidade contrátil do músculo) pelas *linhas Z* (d). Entre as linhas Z, quando o músculo está *relaxado*, temos *filamentos grossos e finos* regularmente espaçados (e). Durante a *contração* do músculo, os filamentos finos deslizam entre os grossos (f), encurtando o sarcômero

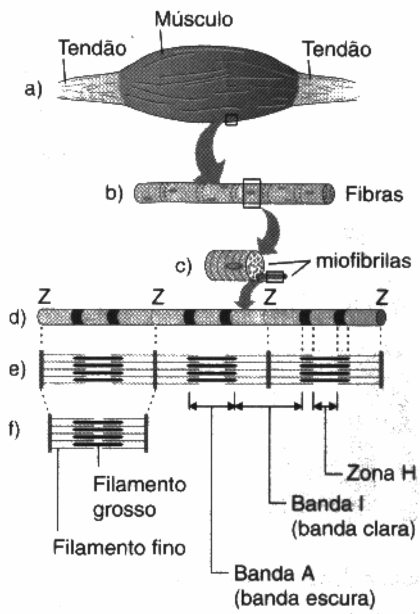


Figura 3.30 Tecido muscular (a), suas fibras (b) e miofibrilas (c). Divisão em sarcômeros das miofibrilas (d) com o músculo relaxado (e) ou contraído (f).

Ao *excitar* um ponto qualquer do organismo, essa excitação é conduzida pelos neurônios até o cérebro e retorna por outros neurônios com a ordem até que atinge a placa motora, que, por sua vez, provoca a *contração* do músculo

A força máxima que um músculo pode exercer depende da área de sua seção transversal. No homem essa força está dentro do intervalo de 2,7 a $3{,}6\times10^5$ N/m^2. Por exemplo, para um músculo exercer uma força de 530 N, deverá haver uma seção transversal entre 15 a 20 cm^2.

A *contração* de um músculo é medida pela alteração da força exercida em seus *pontos fixos* ou pelo seu simples encurtamento. De acordo com o efeito final, ou seja, com o movimento produzido no corpo, as contrações experimentadas pelos músculos podem ser:

- *Estática* ou *isométrica*: Neste caso, a tensão produzida é insuficiente para mover um segmento do corpo ante uma determinada resistência. Externamente, o músculo *não* altera seu comprimento, porém, internamente, ele experimenta um equilíbrio entre as tendências ao encurtamento dos elementos contráteis e ao alongamento dos elementos elásticos. No tecido muscular ocorre a transformação

No tecido muscular ocorre a transformação

Energia Química ⇒ Energia Térmica.

- *Dinâmica* ou *isotônica:* Neste caso, a tensão produzida pode mover uma parte do corpo ante uma determinada resistência, produzindo um trabalho mecânico. No tecido muscular acontece a seguinte transformação

Energia Química ⇒ Energia Mecânica + Energia Térmica.

As contrações isotônicas podem ser de dois tipos:

- *Concêntrica*: Quando há encurtamento das fibras musculares e o trabalho final é visível.
- *Excêntrica*: Quando há um alongamento das fibras; ainda que haja contração, isso é superado pela resistência encontrada.

As Figuras 3.32 e 3.33 mostram modelos de contração isométrica e isotônica, respectivamente. No primeiro caso, tanto a origem quanto a inserção do músculo estão fixas. No segundo caso, só uma extremidade é fixa.

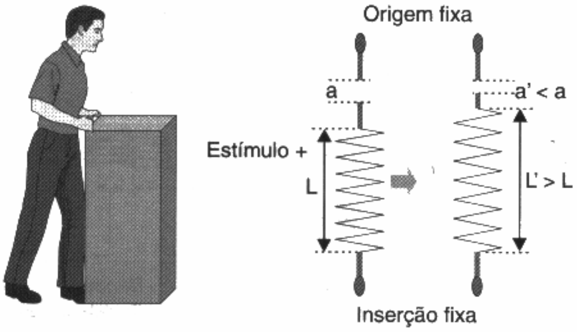


Figura 3.32 Pessoa tentando deslocar um objeto fixo no chão. Contração muscular isométrica: os elementos elásticos tendem a se alongar e os contráteis a se encurtar. O comprimento da fibra muscular não se altera.

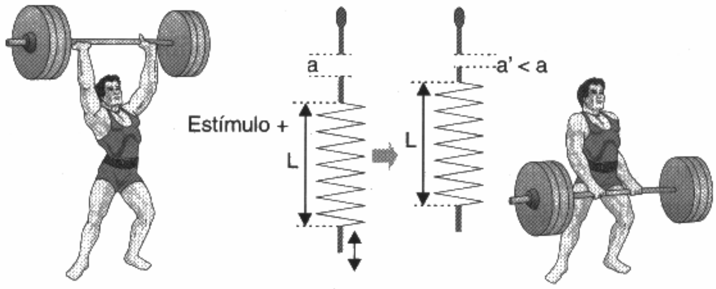


Figura 3.33 Contração muscular isotônica: os elementos elásticos não se alteram, enquanto os contráteis se encurtam ou alongam. As fibras musculares sofrem variação em seu comprimento.

Dependendo da localização de um músculo e do tipo de movimento executado, a *força muscular* produzida pode ser vista como resultante de componentes que atuam especificamente no movimento de uma parte do corpo. Na Figura 3.34 temos o caso de dois segmentos ósseos e um músculo, cuja origem O se encontra num segmento e a inserção I, em outro.

A força muscular **F** terá um componente rotador **R** e um componente estabilizador **E**. Quando o segmento ósseo AC se movimenta no sentido anti-horário, em torno da articulação A, tanto o componente **R** como o ângulo de tração ϕ aumentam, enquanto o componente **E** diminui. É evidente que esse efeito do músculo deve-se ao tipo de movimento desse segmento ósseo.

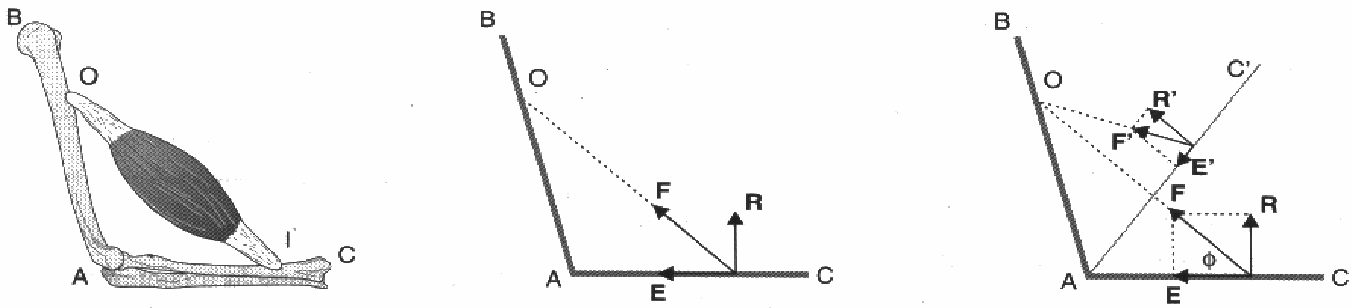
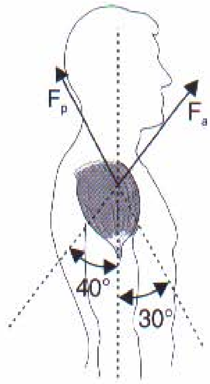


Figura 3.34 Músculo com origem O e inserção I, atuando sobre os ossos AB e AC. **R** e **E** são respectivamente os componentes rotador e estabilizador da força muscular **F**. Quando o osso AC muda para a posição AC', o ângulo de tração ϕ da força **F'** aumenta, sendo de **R'** > **R** e **E'** < **E**.

Exemplo: O músculo deltóide tem um formato triangular e movimenta o braço. Considere que as partes anterior e posterior deste músculo fazem esforços de 55 N e 35 N, respectivamente, para elevar o braço. Determine a direção e a magnitude da força **F** exercida pelo músculo.



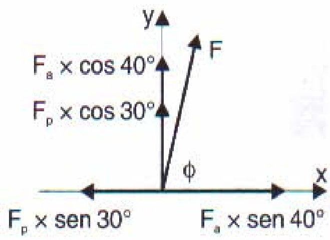
Resolução: Devemos encontrar a força resultante **F** de duas forças conhecidas. De acordo com o diagrama de forças, nas direções *x* e *y* teremos as seguintes resultantes

$F_x = F_{ax} - F_{px} = 55 \times \text{sen}\, 40° - 35 \times \text{sen}\, 30° = 17{,}85$ N

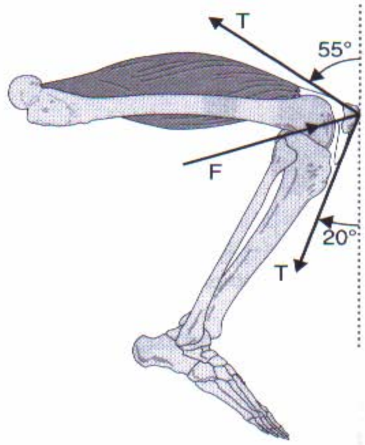
$F_y = F_{ay} + F_{py} = 55 \times \cos 40° + 35 \times \cos 30° = 72{,}44$ N.

Magnitude da força resultante: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 74{,}61$ N

Direção da força resultante: $\phi = tg^{-1}(F_y/F_x) = 76{,}16°$.



Exemplo: O músculo quadríceps se encontra na coxa e seu tendão chega até a perna. Considere a perna ligeiramente dobrada de modo que a tensão **T** no tendão seja 1 400 N. Determine a direção e a magnitude da força **F**, exercida pelo fêmur sobre a patela.



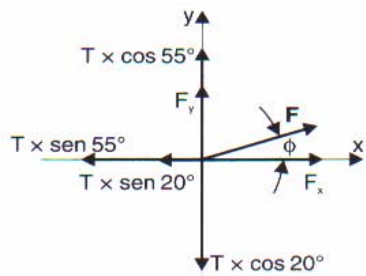
Resolução: Como o sistema de ossos na articulação da perna e o tendão do quadríceps estão em equilíbrio, a resultante das forças **T** e **F** deverá ser nula. De acordo com o diagrama de forças, nas direções *x* e *y* teremos, respectivamente,

$F_x - 1400 \times \text{sen}\, 20° - 1400 \times \text{sen}\, 55° = 0 \Rightarrow F_x = 1625{,}64$ N

$F_y + 1400 \times \cos 55° - 1400 \times \cos 20° = 0 \Rightarrow F_y = 512{,}56$ N

∴ a magnitude e a direção da força de contato **F** serão, respectivamente,

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 1\,704{,}53$ N e $\phi = tg^{-1}(F_y/F_x) = 17{,}5°$.



Alavancas

O momento ou torque **M** de uma força **F** é uma quantidade vetorial, calculada em relação a um ponto fixo O. Este ponto pode estar no corpo ou fora dele. Quando uma força que age sobre um corpo produz um momento, então o corpo tenderá a ter um *movimento de rotação* em torno do eixo que passa por O. Por definição

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (3.22)$$

onde r é a distância entre o ponto de ação A da força e o ponto fixo O (como mostra a Figura 3.35). A direção de **M** é dada pela regra da mão direita aplicada aos produtos vetoriais e sua intensidade, por

$$M = r \cdot F \cdot \operatorname{sen}\theta = F \cdot (r \cdot \operatorname{sen}\theta) = F \cdot d, \quad (3.23)$$

onde d é denominado braço da força **F**, ou braço do momento.

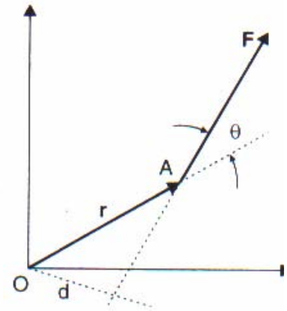


Figura 3.35 Força **F** produzindo um momento **M** em relação ao ponto fixo O.

A *alavanca* é um sistema que, ao experimentar uma pequena força $F_<$, pode equilibrar ou erguer um corpo que exerce uma força maior $F_>$.

A razão $F_>/F_<$ é denominada *vantagem mecânica*. Para termos uma alavanca, o sistema deve experimentar a ação de pelo menos duas forças e ter um ponto de apoio. Se duas forças paralelas **P** e **R** agem sobre uma barra horizontal que tem um ponto de apoio, dependendo dos pontos de ação dessas forças, é possível gerar três tipos de alavancas, como se vê na Figura 3.36.

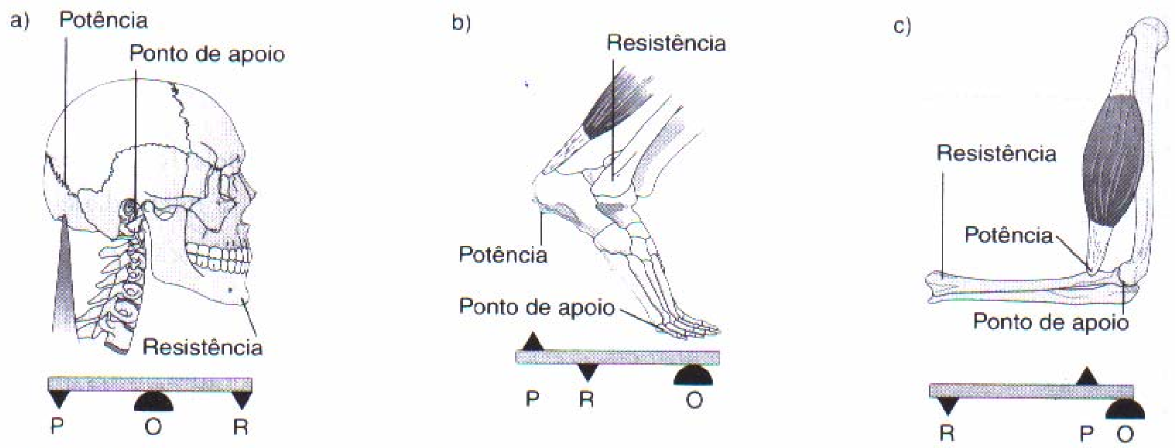
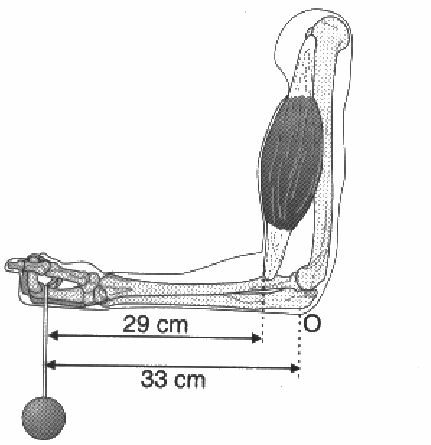


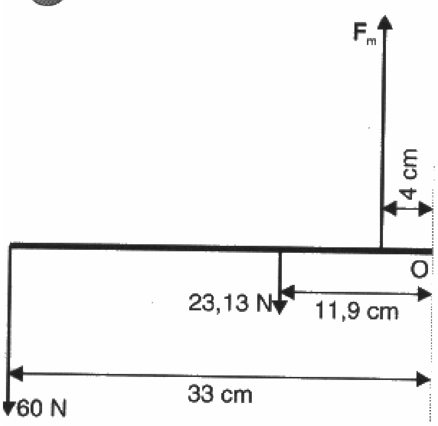
Figura 3.36 Três tipos de alavanca. **P** é uma força aplicada para equilibrar ou erguer a força resistente **R**.

A função de uma alavanca é realizar um trabalho com boa vantagem mecânica levando a um equilíbrio de forças com intensidades diferentes, por meio de seus *momentos*. No corpo humano, os ossos e músculos formam conjuntos de alavancas sendo mais comum encontrar as alavancas de *força* (Figura 3.36b) e de *velocidade* (Figura 3.36c). Os *ossos* atuam como uma barra sólida, inflexível, onde serão aplicadas forças, e os *músculos* agirão como gerador de *potência* na produção de movimento ou como *resistência* adicionada a uma carga externa.

Quando o momento sobre o corpo não é nulo, seu *movimento* será de rotação. Logo, para um corpo estar em *total equilíbrio*, deverá satisfazer às seguintes condições. Se

- A *resultante* das forças externas que agem sobre o corpo for *nula*, ele permanecerá em *repouso* ou em movimento com velocidade constante.
- O *momento resultante* devido às forças externas sobre o corpo for *nulo*, ele permanecerá em equilíbrio de rotação.





Exemplo: Considere que o conjunto antebraço e mão de uma pessoa pesa 23,13 N e que o ponto de aplicação dessa força se encontra a 11,9 cm do cúbito. A mão sustenta uma esfera de 60 N. Se o antebraço está perpendicular ao braço, determine a direção e a intensidade

a) do momento produzido pela esfera, em torno do cúbito (ponto O);

b) do momento produzido pela força muscular em torno do cúbito;

c) da força muscular.

Resolução: Como o membro superior e a esfera estão em *total equilíbrio,* a resultante das forças que agem sobre o conjunto antebraço-mão e os momentos dessas forças devem ser nulos. A força muscular $\mathbf{F}_m$ é perpendicular à direção dos ossos do antebraço. Logo, em relação ao cúbito, temos

a) o momento produzido pela esfera tem sentido anti-horário, direção perpendicular ao plano dos ossos do antebraço e intensidade

$$M_e = 60\ \text{N} \times 0{,}33\ \text{m} = 19{,}8\ \text{N} \cdot \text{m};$$

b) o momento produzido pela força muscular tem sentido horário, mesma direção que $\mathbf{M}_e$, e intensidade

$$M_m = F_m \times 0{,}04 = 23{,}13\ \text{N} \times 0{,}119\ \text{m} + 60\ \text{N} \times 0{,}33\ \text{m} = 22{,}55\ \text{N} \cdot \text{m};$$

c) a intensidade da força muscular será

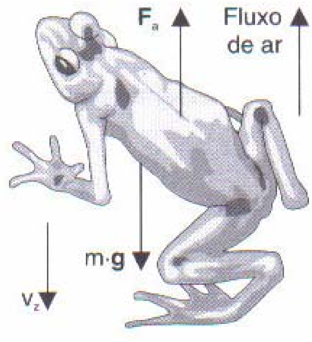
$$F_m = 22{,}55\ \text{N} \cdot \text{m}/0{,}04\ \text{m} = 563{,}81\ \text{N}.$$

Dinâmica dos movimentos aéreos dos animais

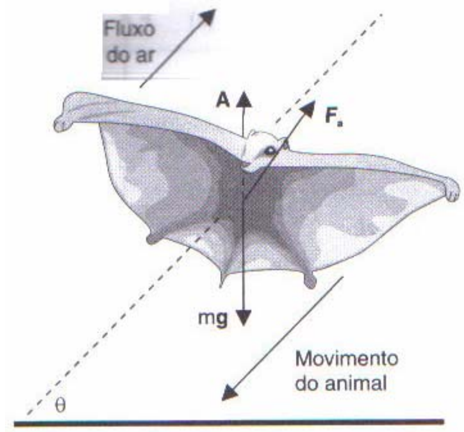
A dinâmica desenvolvida pelos animais (pássaros, inseto, morcegos, etc.) que realizam movimentos aéreos para se locomover permite classificar tais movientos em três tipos: i) Pára-quedismo; ii) planeio e iii) vôo propulsionando.

Os animais que fazem pára-quedismo (trajetória descendente e vertical) ou o planeio (trajetória ascendente e/ou descendente retilínea) utilizam uma membrana que se desenvolve em determinadas partes do corpo, chama da patágio. O patágio pode-se abrir como asa, funcionando como pára-quedas ou mesmo como uma asa de um planador dependendo do animal

esquilo voador



Um sapo voador de Bornéu realizando um movimento vertical de pára-quedas.



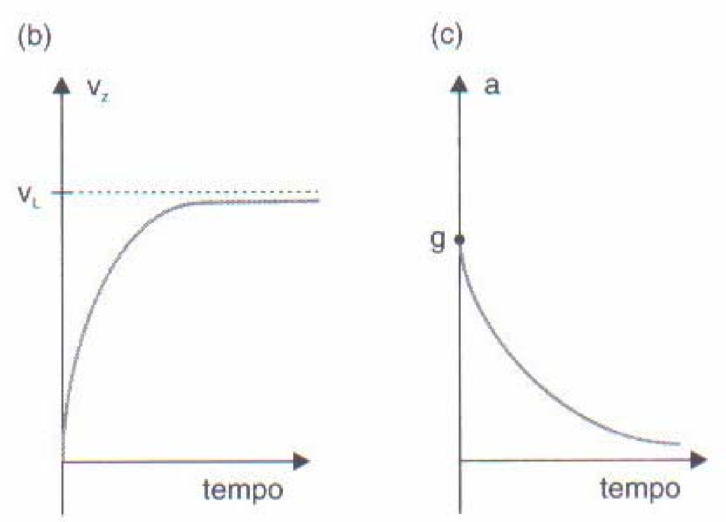
O galeopiteco da Malásia *planando*. Graças a seu *patágio*, ele pode planar mais de 100 metros.

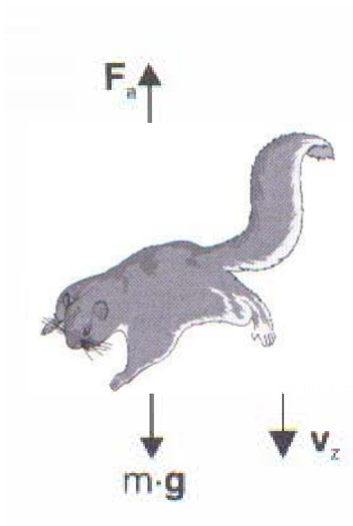
Nesses movimentos a resistência do are se manifesta como uma força, $\vec{F}_a$ conhecida como forca de resistiva ou forca de arraste, cuja a magnitude é proporcional a v^n, sendo v a velocidade do animal. Normalmente n ≅ 1 para baixas velocidades e n ≅ 2 para altas velocidades: $\vec{F}_a = kv^n$

Imaginemos um animal de massa m fazendo um pára-quedismo (trajetória descendente vertical – eixo z) como um esquilo voador um sapo de Bornéu. Pela 2ª lei de Newton, teremos:

$$F_{res} = ma_z = P - F_a \rightarrow ma_z = mg - kv_z^n \rightarrow \frac{dv_z}{dt} = g - \frac{k}{m} v_z^n$$

onde k é uma constante de proporcionalidade que depende das dimensões e forma do corpo em movimento e das características do meio sendo v_z a velocidade instantânea no eixo vertical. Se no inicio do movimento $v_z = 0$ então $F_a = 0$ implica que a aceleração inicial $a_0 = g$. Quando v_z aumenta, também aumente $F_a = kv^n$. No instante que $F_a = mg$ teremos $a_z = 0$ e a velocidade deixará de aumentar. Chamamos esta velocidade de **velocidade limite**.





a) Um corpo com massa *m* experimenta uma força de arraste F_a; b) no caso de baixas velocidades, v_z tende a um valor limite v_L; c) a aceleração $a \rightarrow 0$ quando $F_a \rightarrow m \cdot g$.

Se o movimento for realizado a baixa velocidade (n=1) quando a $a_z \rightarrow 0$, então $v_z \rightarrow v_L = mg/k$. Matematicamente, o valor de v_z e de a_z em qualquer instante é determinado a partir da resolução da equação que vimos acima:

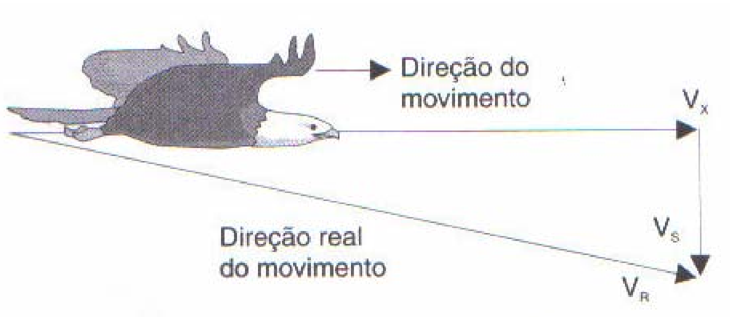
$$\frac{dv_z}{v_z - v_L} = -\frac{k}{m}dt \quad \rightarrow \quad v_z = v_L[1 - e^{-kt/m}]$$

$$a = \frac{dv_z}{dt} = ge^{-kt/m}$$

No movimento de planeio, um animal com massa m tem uma trajetória linear inclinada com um dado ângulo θ em relação a direção horizontal. Este ângulo é denominado como ângulo de planeio (ver fig do galaopiteco acima). Sobre esse animal, por exemplo, age uma forca aerodinâmica $\vec{A}$, resultante da composição das forcas de arraste $\vec{F}_a$ e de sustentação $\vec{F}_s$. Esta ultima tem como origem a diferença de presao do ar nas partes superior e inferior do planador,

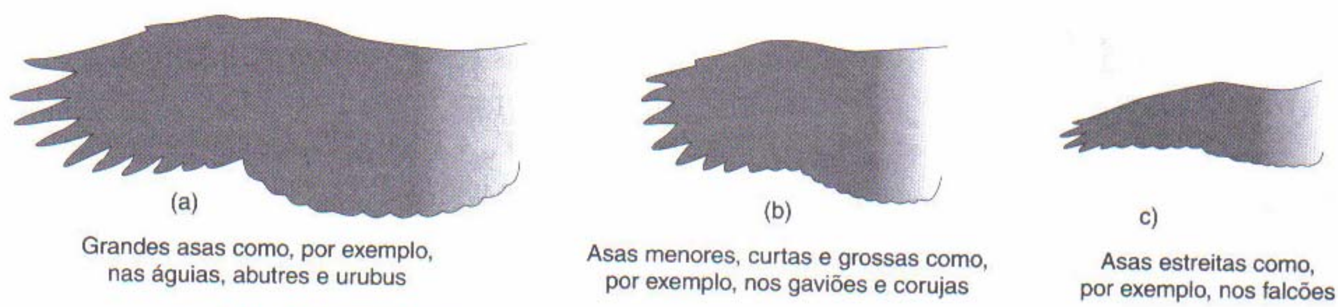
$$\vec{A} = \vec{F}_a + \vec{F}_s$$

Na pratica dizemos que o movimento de um animal será de pára-quedismo ou de planeio se $\vec{F}_s << \vec{F}_a$ ou $\vec{F}_s >> \vec{F}_a$, respectivamente. Eventualmente, quando $\vec{F}_s > \vec{F}_a$ o movimento poderá ser de planeio. Este fato acontece com bastante freqüência em pássaros quando estes estão simplesmente planando. Neste movimento, enquanto o animal esta se deslocando para frente com velocidade $\vec{v}_x$, sua altura cai diminuído com uma velocidade $\vec{v}_s$. A relação v_x / v_s é denominada razão de deslizamento. A velocidade de planeio resultante será $\vec{v}_R = \vec{v}_x + \vec{v}_s$.



Ave deslocando-se para frente com velocidade de planeio $\mathbf{V}_R = \mathbf{V}_x + \mathbf{V}_s$.

No caso dos vôos propulsionados os animais realizam trabalho (gastam energia) para se deslocar. O vôo de um animal depende basicamente de três fatores: i) da forma de seu corpo inteiro, ii) da forma de suas asas e iii) de sua direção de batimento.

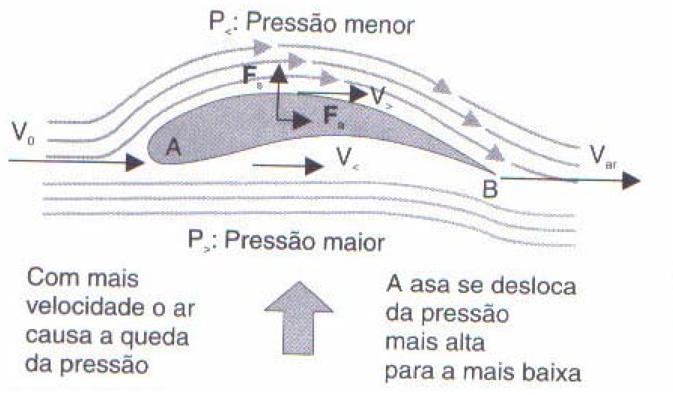


a) Grandes asas permitem alcançar grandes alturas; daí em diante é possível voar longas distâncias sem mover as asas e com pouco esforço;

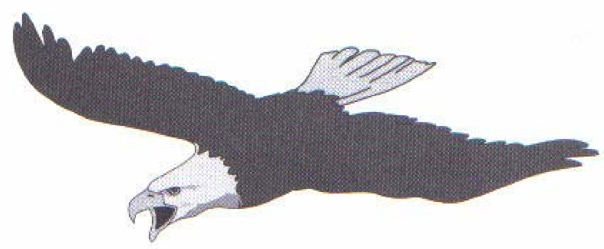
b) asas menores permitem subir muito com velocidade;

c) asas estreitas permitem alcançar grande velocidade.

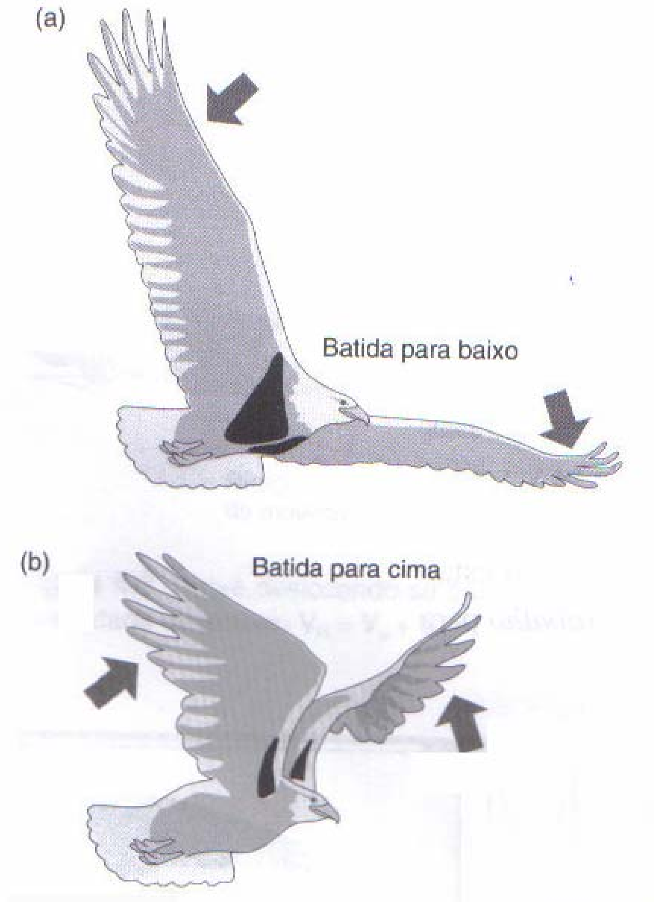
A forma geométrica e a estrutura das assas permitem que uma ave se eleve durante o voo. Alem disso quanto maior a velocidade do ar sobre a asa, mais ela sobe, ou seja, é maior sua suspensão. Isto acontece devido a diferença de pressão do ar entre a parte de cima e parte de baixo da asa.



Devido a sua forma geométrica, quando a asa adquire mais velocidade, o ar causa uma queda de pressão.

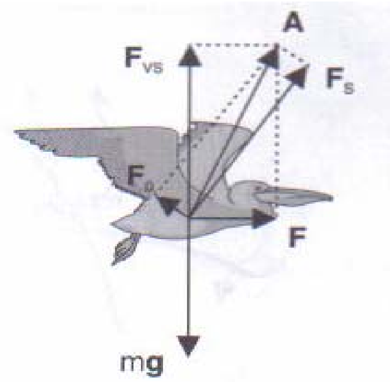


Quando uma ave voa, para ser mais veloz, ela vira as bordas frontais das asas na direção do vento para *cortar* o ar.

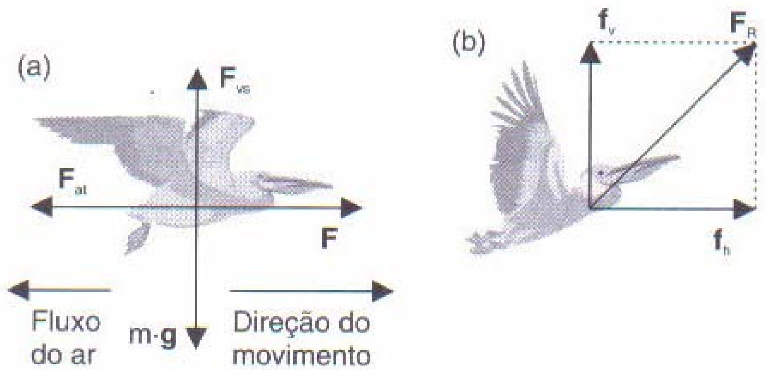


Nas aves voadoras, os músculos que movimentam as asas para baixo (a) são maiores que os músculos que as movimentam para cima (b).

Uma representação aproximada das principais forças que agem sobre uma ave em vôo é visto abaixo:



A força aerodinâmica **A,** sobre uma ave voadora, depende das forças de impulso, de sustentação e de arraste.

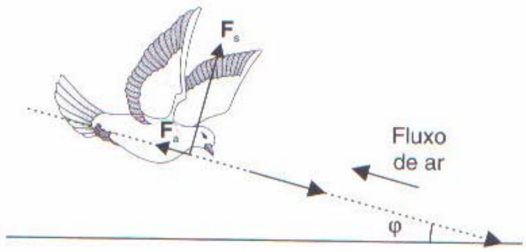


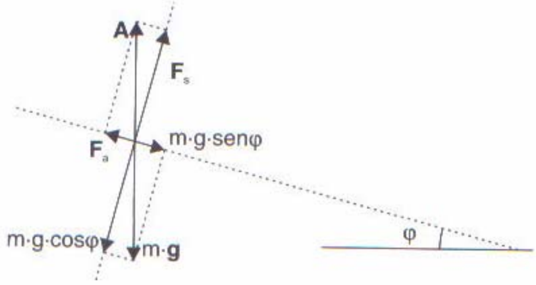
a) Em vôo *horizontal uniforme*, as forças nas direções horizontal e vertical se equilibram;
b) em vôo *ascendente*, o desequilíbrio das forças origina uma força aceleradora F_R.

Exemplo: Um pássaro com massa m está planando com ângulo φ e velocidade constante v_0. Se a força de arraste F_a tem intensidade κv_0, então qual deverá ser:

a) a intensidade da força aerodinâmica **A**?

b) a relação entre a intensidade de **A** e o ângulo de planeio?





Resolução:

a) Por definição, a força aerodinâmica é a resultante das forças de sustentação F_s e de arraste F_a, ou seja,

$$A^2 = F_s^{\,2} + F_a^{\,2}.$$

Como o pássaro se movimenta com velocidade constante, então

$$F_s = m \cdot g \cdot \cos\varphi \text{ e } F_a = m \cdot g \cdot \operatorname{sen}\varphi.$$

Logo,

$$A^2 = (m \cdot g)^2(\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi) \Rightarrow A = m \cdot g.$$

b) Como κv_0 é a magnitude da força de arraste, então

$F_a = m \cdot g \cdot \operatorname{sen}\varphi$ ou $\kappa v_0 = A \operatorname{sen}\varphi \Rightarrow A = \kappa v_0/\operatorname{sen}\varphi$ ∴ quando φ aumenta, a intensidade da força aerodinâmica decresce.

Exercícios propostos

1)

Três vetores **A**, **B** e **C**, com 5 unidades cada um, estão respectivamente inclinados: 60°, 180° e 300°. Determine:

a) **A** + **C**; b) **A** – **B** + **C**; c) **A** · **B**;

d) **B** · **C**; e) **A** · **C**.

2)

Um gafanhoto, para fazer um salto, estende suas patas 2,5 cm em 25 ms. Determine a:

a) aceleração com a qual ele estende suas patas;

b) velocidade quando parte do chão, ou seja, no instante em que suas patas estão completamente estendidas;

c) a altura máxima que ele conseguirá atingir neste salto.

3)

Um atleta de salto em altura fez um salto de 1,3 m. Com que velocidade ele saiu do chão?

4)

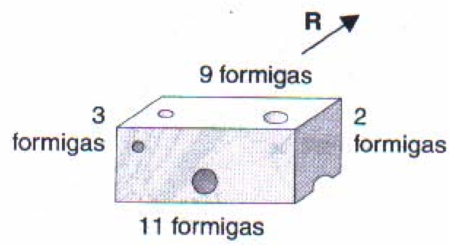
Um estudante decide verificar *in vivo* a lei da queda livre. Para isso, ele sobe ao topo de um penhasco que se encontra a 300 m do solo e se atira levando com ele um cronômetro. O Super-Homem aparece no topo de penhasco 5 s depois e se lança com uma aceleração igual à dos corpos em queda livre. Determine:

a) a velocidade inicial do Super-Homem, para agarrar o estudante justamente antes de tocar o solo;

b) de que altura o estudante deveria se atirar, para que nem mesmo o Super-Homem pudesse salvá-lo.

5)

Um grupo de 25 formigas conduz um pedaço de queijo de forma retangular. O queijo desliza lentamente na direção **R**. Com uma faca, retiramos a fileira de 11 formigas e vemos que o queijo se move mais rapidamente na mesma direção. Considerando que a intensidade da força exercida por cada formiga é aproximadamente a mesma, mostre em que direção age a força exercida por cada formiga, para que o queijo se mova na direção **R**.

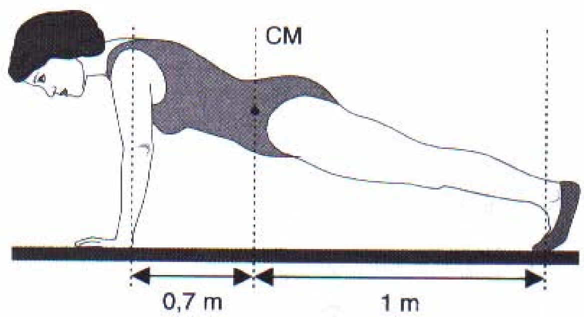


6)

Uma atleta com 70 kg está realizando flexões de braço. A projeção de seu centro de massa no chão está a 1 m de seus pés e a 0,7 m de suas mãos. Determine as forças de contato que o solo exerce sobre:

a) as mãos;

b) os pés.

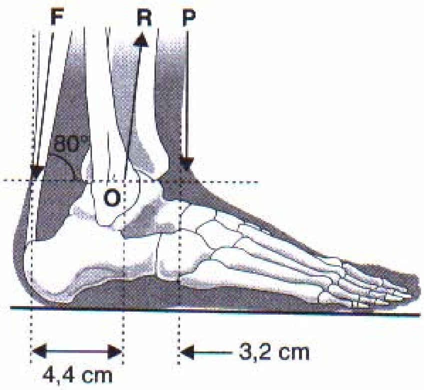


7)

Uma pessoa com 70 kg encontra-se em pé. A projeção vertical de seu centro de massa passa a 3,2 cm à frente da articulação do tornozelo. O músculo da barriga da perna se liga ao tornozelo a 4,4 cm da articulação. Considerando que cada perna suporta metade do peso da pessoa, determine:

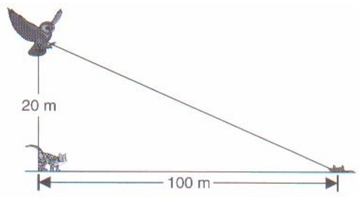
a) a intensidade da força muscular **F**;

b) a direção da força de contato **R** exercida pela articulação do tornozelo.



8)

Um gato precisa se deslocar 100 m para alcançar um ratinho morto. Quando o gato começa a correr, com aceleração uniforme de $1\,m/s^2$, uma coruja, que está 20 m acima do gato, tem uma velocidade de 5 m/s. Se a coruja seguir uma trajetória retilínea, qual deverá ser sua aceleração para alcançar o ratinho juntamente com o gato?



Referências

- Duran J. E. R., 2003, "Biofísica – Fundamentos e Aplicações", Ed. Peason.
- Halliday D, Resnick R. e Walker J., Fundamentos de Física, Volume 1. Livros Técnicos e Científicos Editora SA - LTC, 8ª Ed., 2009.
- Heneine I. F., 2000, "Biofisica Básica", Ed. Atheneu.