TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Transformação Linear

Sejam V e W espaços vetoriais reais. Dizemos que uma função $T: V \to W$ é uma **transformação linear** se a função ***T*** **preserva as operações** de adição e de multiplicação por escalar, isto é, se os seguintes axiomas são satisfeitos:

TL1. Para quaisquer $v, u \in V$, $T(v+u) = T(v) + T(u)$.
TL2. Para todo $v \in V$ e para todo $k \in \mathbf{R}$, $T(k \cdot v) = k \cdot T(v)$.

Exemplos:

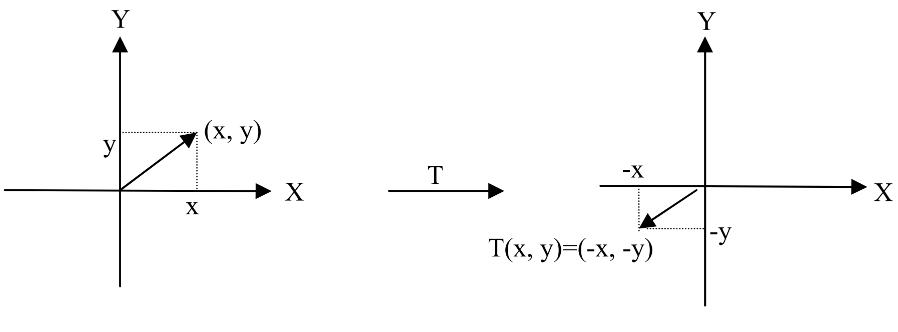
1) $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$
$(x, y) \mapsto T(x, y) = (-x, -y)$

Verificando os axiomas:

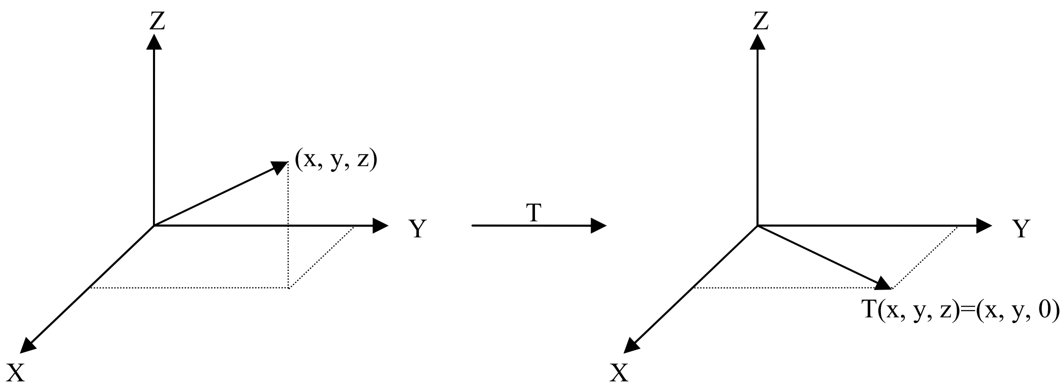
TL1. $T((x, y) + (z, t)) = T(x, y) + T(z, t)$, para quaisquer $(x, y), (z, t) \in \mathbf{R}^2$?
$T((x, y) + (z, t)) = T(x+z, y+t) = (-(x+z), -(y+t)) = (-x-z, -y-t)$
$T(x, y) + T(z, t) = (-x, -y) + (-z, -t) = (-x-z, -y-t)$
Assim, a transformação linear T preserva a operação de adição de vetores.

TL2. $T(k \cdot (x, y)) = k \cdot T(x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ e para todo $k \in \mathbf{R}$?
$T(k \cdot (x, y)) = T(kx, ky) = (-(kx), -(ky)) = (k(-x), k(-y)) = k \cdot (-x, -y) = k \cdot T(x, y)$
Assim, a transformação linear T preserva a operação de multiplicação por escalar.

Considere $v = (1,2)$ e $u = (-1,3)$.
$T(v) = T(1,2) = (-1,-2)$
$T(u) = T(-1,3) = (1,-3)$
$T(v) + T(u) = (-1,-2) + (1,-3) = (0,-5)$
$T(v+u) = T((1,2) + (-1,3)) = T(0,5) = (0,-5)$
$T(2 \cdot v) = T(2 \cdot (1,2)) = T(2,4) = (-2,-4) = 2 \cdot (-1,-2) = 2 \cdot T(1,2) = 2 \cdot T(v)$



2) $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$
$(x, y, z) \mapsto T(x, y, z) = (x, y, 0)$
T é uma transformação linear (Verifique !)
Esta transformação linear associa a cada vetor do $\mathbf{R}^3$ sua projeção ortogonal sobre o plano XY.



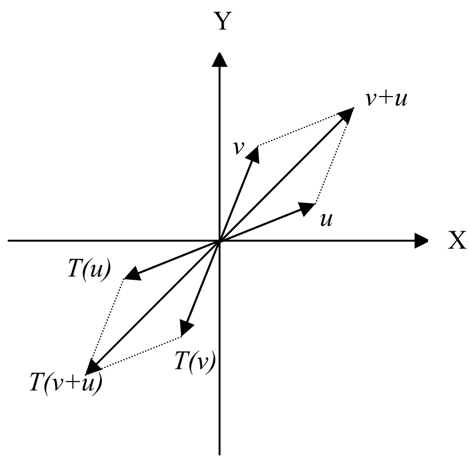
A transformação linear $T_{\mathbf{0}} : V \to W$ tal que $v \mapsto T_{\mathbf{0}}(v) = \mathbf{0}_W$ é denominada **Transformação Nula**.
Seja a transformação linear $T : V \to W$. Se os conjuntos V e W são iguais, $V = W$, então T é denominada um **Operador Linear**.
O operador linear $I_V : V \to V$ tal que $v \mapsto I_V(v) = v$ é denominado **Operador Identidade**.
As transformações lineares $T : V \to \mathbf{R}$ são denominadas **Funcionais Lineares**.

Operadores Lineares no Espaço Vetorial R^2

Reflexão em torno do eixo *X*: $T(x, y) = (x, -y)$.

Reflexão em torno do eixo *Y*: $T(x, y) = (-x, y)$.

Reflexão em torno da origem: $T(x, y) = (-x, -y)$.

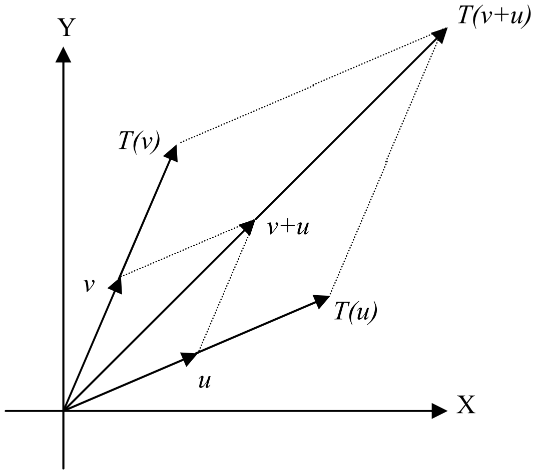


Reflexão em torno da reta $x = y$: $T(x, y) = (y, x)$.

Reflexão em torno da reta $x = -y$: $T(x, y) = (-y, -x)$.

Dilatação ou Contração de fator *k* na direção do vetor: $T(x, y) = (kx, ky)$ com $k \in \mathbf{R}$.

Se $|k| > 1$: dilatação.



Se $|k| < 1$: contração.

Se $k < 0$: troca de sentido.

Se $k = 1$: operador identidade.

Dilatação ou Contração de fator *k* na direção do eixo *X*: $T(x, y) = (kx, y)$ com $k \in \mathbf{R}, k > 0$.

Se $k > 1$: dilatação.

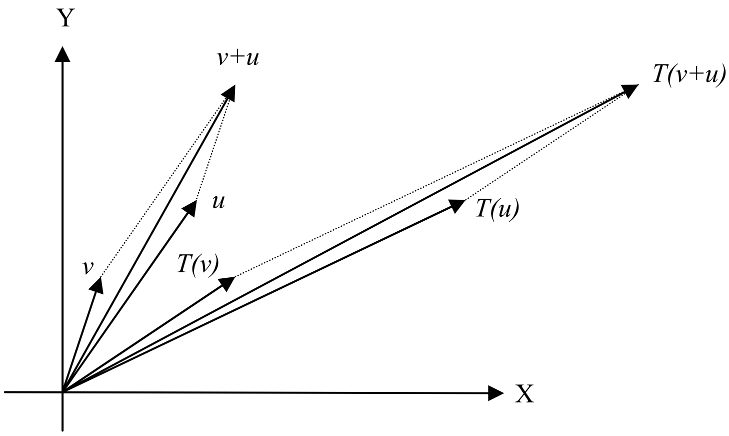
Se $0 < k < 1$: contração.

Dilatação ou Contração de fator *k* na direção do eixo *Y*: $T(x, y) = (x, ky)$ com $k \in \mathbf{R}, k > 0$.

Se $k > 1$: dilatação.

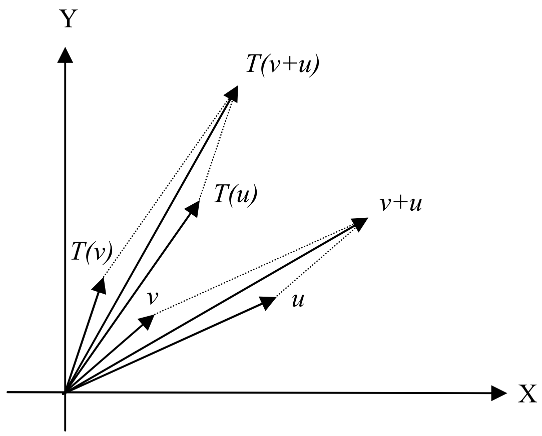
Se $0 < k < 1$: contração.

Cisalhamento na direção do eixo *X*: $T(x, y) = (x + ky, y)$ com $k \in \mathbf{R}$.



Cisalhamento na direção do eixo *Y*: $T(x, y) = (x, kx + y)$ com $k \in \mathbf{R}$.

Rotação: $T(x,y) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta, x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta)$ com $0 \le \theta \le 2\pi$.



Propriedades

1. Se $T: V \to W$ é uma transformação linear então $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.

   dem.: $T(\mathbf{0}_V) = T(\mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V) = T(\mathbf{0}_V) + T(\mathbf{0}_V)$.

   Mas, $T(\mathbf{0}_V) = T(\mathbf{0}_V) + \mathbf{0}_W$, pois $T(\mathbf{0}_V) \in W$ e $\mathbf{0}_W$ é o elemento neutro em *W*.

   Assim, , $T(\mathbf{0}_V) + T(\mathbf{0}_V) = T(\mathbf{0}_V) + \mathbf{0}_W$.

   Logo, $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.

   Portanto, se $T(\mathbf{0}_V) \ne \mathbf{0}_W$ então *T* não é uma transformação linear.

   No entanto, o fato de $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ não é suficiente para que T seja linear.

   Por exemplo, $T: \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}$ tal que $T(x,y) = (x^2, y^2)$.

$$T(1,2) = (1^2, 2^2) = (1,4)$$
$$T(3,5) = (3^2, 5^2) = (9,25)$$
$$T(1,2) + T(3,5) = T(10,29)$$
$$T((1,2)+(3,5)) = T(4,7) = (4^2, 7^2) = (16,49)$$

   Assim, $T(v+u) \ne T(v) + T(u)$

   Embora, $T(0,0) = (0,0)$, *T* não é uma transformação linear.

2. Seja $T: V \to W$ uma transformação linear.

   Então $T(k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_n \cdot v_n) = k_1 \cdot T(v_1) + k_2 \cdot T(v_2) + ... + k_n \cdot T(v_n)$ para quaisquer $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ e para quaisquer $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbf{R}$.

   Corolário: Sabendo-se as imagens dos vetores de uma base do espaço vetorial *V* é possível determinar a transformação linear $T: V \to W$.

Obtendo a Lei de uma Transformação Linear

Seja $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ um operador linear tal que $T(2,3)=(-1,5)$ e $T(0,1)=(2,1)$. Como encontrar a lei que define este operador?

Solução:

$\{(2,3),(0,1)\}$ é base para $\mathbf{R}^2$.(Verifique!)

Portanto, qualquer vetor $v \in \mathbf{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear destes vetores.

$$v=(x,y)=k_1\cdot(2,3)+k_2\cdot(0,1) \text{ com } k_1,k_2\in\mathbf{R}.$$
$$=(2k_1,3k_1)+(0,k_2)$$
$$=(2k_1,3k_1+k_2)$$

Assim, $x=2k_1$ e $y=3k_1+k_2$.

Então, $k_1=\dfrac{x}{2}$ e $k_2=\dfrac{2y-3x}{2}$.

Logo, $(x,y)=\dfrac{x}{2}(2,3)+\dfrac{2y-3x}{2}(0,1)$.

Aplicando o operador linear,

$$T(x,y)=T\left(\frac{x}{2}(2,3)+\frac{2y-3x}{2}(0,1)\right)$$
$$=\frac{x}{2}\cdot T(2,3)+\frac{2y-3x}{2}\cdot T(0,1)$$
$$=\frac{x}{2}\cdot(-1,5)+\frac{2y-3x}{2}\cdot(2,1)$$
$$=\left(-\frac{x}{2},\frac{5x}{2}\right)+\left(2y-3x,\frac{2y-3x}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{-7x+4y}{2},x+y\right)$$

Logo, $T(x,y)=\left(\dfrac{-7x+4y}{2},x+y\right)$.

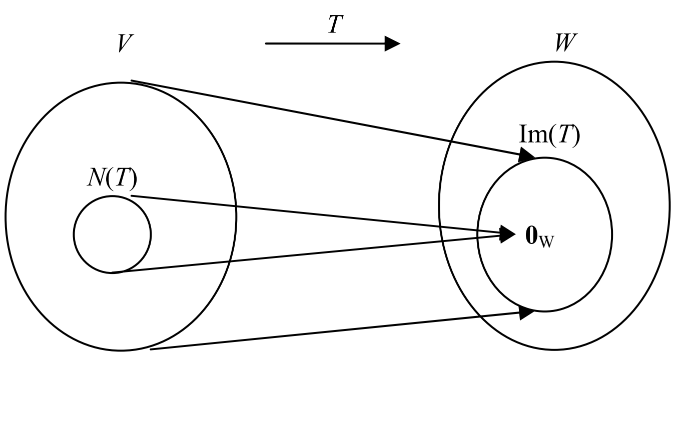
Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear

Núcleo de uma transformação linear $T:V\to W$ é o conjunto de vetores do espaço vetorial V cuja imagem é o vetor $\mathbf{0}_W$.

Notação: $N(T)=Ker(T)=\{v\in V \mid T(v)=\mathbf{0}_W\}$

Imagem de uma transformação linear $T:V\to W$ é o conjunto de vetores de W que são imagem dos vetores do conjunto V.

Notação: $\mathrm{Im}(T)=T(V)=\{w\in W \mid T(v)=w, \text{para algum } v\in V\}$



Propriedades

1. $N(T)$ é um subespaço vetorial de *V*.
2. $\mathrm{Im}(T)$ é um subespaço vetorial de *W*.
3. **Teorema do Núcleo e da Imagem** : $\dim V = \dim N(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$

Exemplo: Seja $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tal que $T(x, y) = (0, x + y, 0)$.

$N(T) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid T(x, y) = (0,0,0)\}$.

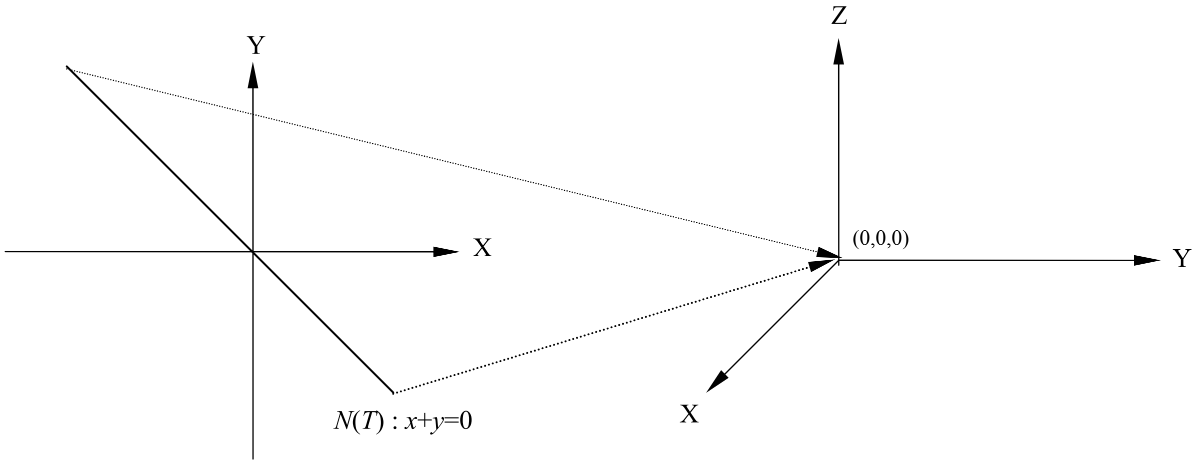
Então, $T(x, y) = (0, x + y, 0) = (0,0,0)$.

Assim, $x + y = 0 \therefore x = -y$.

Portanto, $N(T) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = -y\} = \{(-y, y), y \in \mathbf{R}\}$.

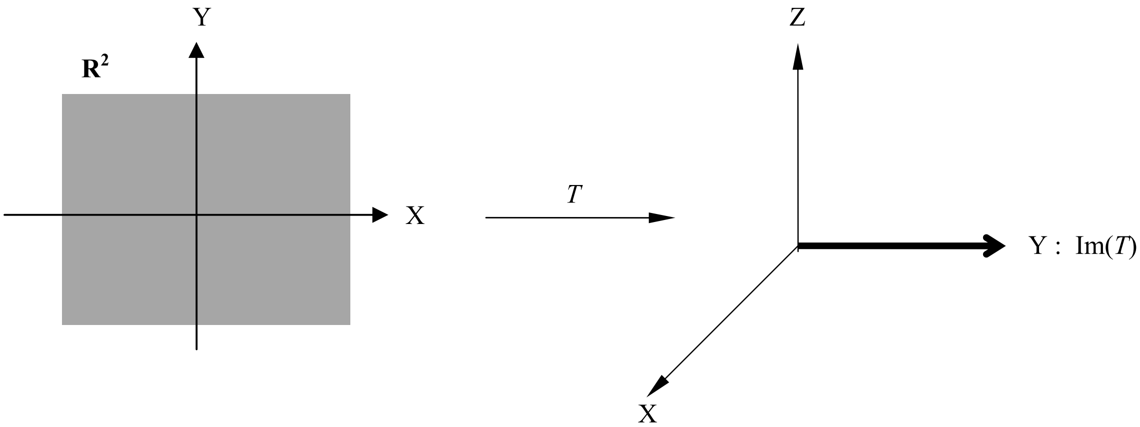
Uma base é $\{(-1,1)\}$ e $\dim N(T) = 1$.

Representação gráfica,



$\mathrm{Im}(T) = \{T(x, y) = (0, x + y, 0),\ \text{para todo}\ (x, y) \in \mathbf{R}^2\}$

Uma base para o conjunto imagem é $\{(0,1,0)\}$ e $\dim \mathrm{Im}(T) = 1$.



Observe que, $\dim \mathbf{R}^2 = \dim N(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$, $(2 = 1 + 1)$.

Transformação Linear Injetora

Uma transformação linear $T: V \to W$ é injetora, se para quaisquer $v, u \in V$, se $v \neq u$ então $T(v) \neq T(u)$. O que é equivalente a, se $T(v) = T(u)$ então $v = u$.

Exemplo:

1) A transformação linear $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tal que $T(x, y) = (x, y, x + y)$ é injetora.
   Sejam $(x, y), (z, t) \in \mathbf{R}^2$.
   Se $T(x, y) = T(z, t) \therefore (x, y, x + y) = (z, t, z + t)$.
   Então $\begin{cases} x = z \\ y = t \\ x + y = z + t \end{cases}$
   Logo, $(x, y) = (z, t)$.

2) Seja o operador linear no $\mathbf{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x, 0, 0)$, que associa a cada vetor sua projeção ortogonal no eixo *X*.
   Considere os vetores $(2,1,3)$ e $(2,0,-4)$.
   Assim, $T(2,1,3) = T(2,0,-4) = (2,0,0)$.
   Então, T não é injetora, pois $T(v) = T(u)$ com $v \neq u$.

Teorema: Uma transformação $T: V \to W$ é injetora se e somente se $N(T) = \{\mathbf{0}_V\}$.
Assim, basta verificar se $N(T) = \{\mathbf{0}_V\}$ para garantir que uma transformação linear *T* é injetora.

Exemplo: Seja o operador linear em no $\mathbf{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2x, x + y)$ é injetora, pois:
$N(T) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid T(x, y) = (0,0)\} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (2x, x + y) = (0,0)\}$.
Assim, $\begin{cases} 2x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$
Então, $N(T) = \{(0,0)\}$.

Transformação Linear Sobrejetora

Uma transformação linear $T: V \to W$ é sobrejetora se o conjunto imagem de *T* é o conjunto *W*, isto é, $\mathrm{Im}(T) = W$.

Exemplo: O operador linear em $\mathbf{R}^2$ do exemplo anterior é injetor.
Então, $\dim N(T) = 0$.
Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, $\dim \mathbf{R}^2 = \dim N(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$.
Assim, $2 = 0 + \dim \mathrm{Im}(T) \therefore \dim \mathrm{Im}(T) = 2$.
Logo, $\mathrm{Im}(T) = \mathbf{R}^2$.

Transformação Linear Bijetora – Isomorfismo

Uma transformação linear $T: V \to W$ é bijetora quando for injetora e sobrejetora. Transformações lineares bijetoras são também denominadas **isomorfismos** e, conseqüentemente, V e W são denominados espaços vetoriais isomorfos.

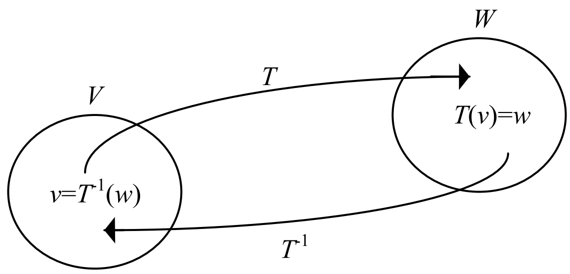
Exemplos:

1) $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T(x,y) = (y,-x)$.
2) $I_V: V \to V$ tal que $I_V(v) = v$.
3) $T: Mat_{2\times 2}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^4$ tal que $T(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}) = (t,z,y,x)$.

Uma transformação $T: V \to W$ é denominada de transformação invertível quando existir uma transformação $T^{-1}: W \to V$ tal que $T \circ T^{-1} = I_W$ e $T^{-1} \circ T = I_V$. A transformação T^{-1} é denominada a **transformação inversa de *T***. As transformações lineares bijetoras são transformações lineares **invertíveis**.

Teorema: Seja $T: V \to W$ uma transformação. A transformação T é bijetora se e somente se T é invertível.

Teorema: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear invertível. Então a transformação $T^{-1}: W \to V$ é linear.



Obtendo a Lei da Transformação Linear Inversa T^{-1}

Seja o operador linear $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T(x,y) = (2x,-y)$. O operador linear inverso T^{-1} será obtido da maneira a seguir:

$\{(1,0),(0,1)\}$ é uma base para $\mathbf{R}^2$.

$T(1,0) = (2,0)$ e $T(0,1) = (0,-1)$.

Portanto, $T^{-1}(2,0) = (1,0)$ e $T^{-1}(0,-1) = (0,1)$.

Obtendo a lei de T^{-1}: $(x,y) = k_1 \cdot (2,0) + k_2 \cdot (0,-1) = (2k_1,0) + (0,-k_2) = (2k_1,-k_2)$.

Assim, $\begin{cases} x = 2k_1 \\ y = -k_2 \end{cases}$

Tem-se que, $k_1 = \dfrac{x}{2}$ e $k_2 = -y$.

Então, $(x,y) = \frac{x}{2} \cdot (2,0) + (-y) \cdot (0,-1)$.

$$\begin{aligned} T^{-1}(x,y) &= T^{-1}\left(\tfrac{x}{2} \cdot (2,0) + (-y) \cdot (0,-1)\right) \\ &= \tfrac{x}{2} \cdot T^{-1}(2,0) + (-y) \cdot T^{-1}(0,-1) \\ &= \tfrac{x}{2} \cdot (1,0) + (-y) \cdot (0,-1) \\ &= \left(\tfrac{x}{2},-y\right) \end{aligned}$$

Logo, a lei é $T^{-1}(x,y) = \left(\frac{x}{2},-y\right)$.

Matriz Associada a uma Transformação Linear

Sejam V um espaço vetorial n-dimensional, W um espaço vetorial m-dimensional e $T: V \to W$ uma transformação linear.

Considerando as bases $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de V e $B = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ de W e um vetor qualquer $v \in V$, tem-se:

$$v = k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_n \cdot v_n$$

com $k_i \in \mathbf{R}$, para todo $i = 1,...,n$.

Aplicando a transformação linear T,

$$T(v) = T(k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_n \cdot v_n)$$

$$T(v) = k_1 \cdot T(v_1) + k_2 \cdot T(v_2) + ... + k_n \cdot T(v_n) \qquad (1)$$

Além disso, $T(v) \in W$, portanto:

$$T(v) = l_1 \cdot w_1 + l_2 \cdot w_2 + ... + l_m \cdot w_m \qquad (2)$$

com $l_j \in \mathbf{R}$, para todo $j = 1,...,m$.

Como $T(v_i) \in W$, para todo $i = 1,...,n$.

$$\left.\begin{array}{l} T(v_1) = a_{11} \cdot w_1 + a_{21} \cdot w_2 + ... + a_{m1} \cdot w_m \\ T(v_2) = a_{12} \cdot w_1 + a_{22} \cdot w_2 + ... + a_{m2} \cdot w_m \\ \qquad\qquad ... \\ T(v_n) = a_{1n} \cdot w_1 + a_{2n} \cdot w_2 + ... + a_{mn} \cdot w_m \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Substituindo (3) em (1), tem-se:

$$T(v) = k_1 \cdot (a_{11} \cdot w_1 + ... + a_{m1} \cdot w_m) + k_2 \cdot (a_{12} \cdot w_1 + .. + a_{m2} \cdot w_m) + ... + k_n \cdot (a_{1n} \cdot w_1 + ... + a_{mn} \cdot w_m)$$

$$T(v) = (k_1 a_{11} + k_2 a_{12} + ... + k_n a_{1n}) \cdot w_1 + ... + (k_1 a_{m1} + k_2 a_{m2} + ... + k_n a_{mn}) \cdot w_m \qquad (4)$$

Comparando (2) e (4), tem-se:

$$\begin{array}{l} l_1 = k_1 a_{11} + k_2 a_{12} + ... + k_n a_{1n} \\ l_2 = k_1 a_{21} + k_2 a_{22} + ... + k_n a_{2n} \\ .... \\ l_m = k_1 a_{m1} + k_2 a_{m2} + ... + k_n a_{mn} \end{array}$$

Na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ ... \\ l_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ ... \\ k_n \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$[T(v)]_B = [T]_B^A . [v]_A$$

A matriz $[T]_B^A$ é a **matriz associada a transformação *T* em relação as bases *A* e *B*.**

Exemplo: Seja a transformação linear $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tal que $T(x, y) = (x, y, x + y)$. Sendo A a base canônica do $\mathbf{R}^2$ e B a base canônica do $\mathbf{R}^3$, tem-se:

$T(1,0) = (1,0,1) = 1 \cdot (1,0,0) + 0 \cdot (0,1,0) + 1 \cdot (0,0,1)$ e

$T(0,1) = (0,1,1) = 0 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,1,0) + 1 \cdot (0,0,1)$.

Então, $[T]_B^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Por exemplo, $[(2,3)]_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Obtém-se, $[T(2,3)]_B = [(2,3,5)]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Sejam as bases não canônicas $A = \{(1,2),(3,5)\}$ e $B = \{(1,2,0),(2,-3,1),(0,-1,1)\}$.

Assim, $T(1,2) = (1,2,3) = 2 \cdot (1,2,0) + (-\frac{1}{2}) \cdot (2,-3,1) + \frac{7}{2} \cdot (0,-1,1)$ e

$$T(3,5) = (3,5,8) = \frac{16}{3} \cdot (1,2,0) + (-\frac{7}{6}) \cdot (2,-3,1) + \frac{55}{6} \cdot (0,-1,1).$$

Então, $[T]_B^A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{16}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{7}{6} \\ \frac{7}{2} & \frac{55}{6} \end{pmatrix}$.

Por exemplo, $[(2,3)]_A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Obtém-se, $[T(2,3)]_B = [(2,3,5)]_B = \begin{pmatrix} 2 & \frac{16}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{7}{6} \\ \frac{7}{2} & \frac{55}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{17}{3} \end{pmatrix}$

As matrizes associadas a alguns dos operadores lineares no espaço vetorial $\mathbf{R}^2$ em relação à base canônica.

	$[T]_B^A . [v]_A$	$=$	$[T(v)]_B$
Reflexão em torno do eixo X	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$
Dilatação ou Contração de fator k na direção do vetor	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$
Cisalhamento na direção do eixo Y	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} x \\ kx + y \end{pmatrix}$
Rotação	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} x\cos\theta - ysen\theta \\ xsen\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$

Operações com Transformações Lineares

1. **Adição**

Sejam $T_1 : V \to W$ e $T_2 : V \to W$ transformações lineares. Define-se a adição de T_1 com T_2 como sendo a transformação linear:

$$(T_1 + T_2) : V \to W$$
$$v \mapsto (T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v)$$

Matricialmente, $[T_1 + T_2]_B^A = [T_1]_B^A + [T_2]_B^A$, onde A é uma base de V e B uma base de W.

Exemplo: Sejam $T_1 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que $T_1(x, y, z) = (x, 2y, z)$ e $T_2 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que $T_2(x, y, z) = (0, 0, z)$.

A transformação soma é $(T_1 + T_2) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que $(T_1 + T_2)(x, y, z) = (x, 2y, 2z)$.

Ainda, $[T_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $[T_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $[T_1 + T_2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ em relação a base canônica do $\mathbf{R}^3$.

2. **Multiplicação por Escalar**

Sejam $T : V \to W$ uma transformação linear e $k \in \mathbf{R}$ um escalar. Define-se a transformação linear produto de T pelo escalar k como sendo:

$$(k \cdot T) : V \to W$$
$$v \mapsto (k \cdot T)(v) = k \cdot T(v)$$

Matricialmente, $[k \cdot T]_B^A = k \cdot [T]_B^A$, onde A é uma base de V e B é uma base de W.

Exemplo: Seja $[T] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ e $\mathrm{k} = 2$.

Então, $T(x, y) = (x + 2y, y, 3x)$ e $(2 \cdot T)(x, y) = (2x + 4y, 2y, 6x)$.

Ainda, $[2 \cdot T] = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot [T]$

3. **Composição**

Sejam $T_1 : V \to U$ e $T_2 : U \to W$ transformações lineares. Define-se a composta de T_1 com T_2 como sendo a transformação linear:

$$(T_2 \circ T_1) : V \to W$$
$$v \mapsto (T_2 \circ T_1)(v) = T_2(T_1(v))$$

Matricialmente, $[T_2 \circ T_1]_C^A = [T_2]_C^B \cdot [T_1]_B^A$, onde A é uma base de V, B é uma base de U e C é uma base de W.

Exemplo: Sejam os operadores lineares no $\mathbf{R}^2$, $T_1(x,y)=(2x+y,-y)$ e $T_2(x,y)=(2y,-x+3y)$.

$(T_1\circ T_2)(x,y)=T_1(T_2(x,y))=T_1(2y,-x+3y)=(2(2y)+(-x+3y),-(-x+3y))=(-x+7y,x-3y)$

$(T_2\circ T_1)(x,y)=T_2(T_1(x,y))=T_2(2x+y,-y)=(2(-y),-(2x+y)+3(-y))=(-2y,-2x-4y)$

Com relação a base canônica: $[T_1]=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ e $[T_2]=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

Assim, $[T_1\circ T_2]=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 7\\ 1 & -3\end{pmatrix}$ e $[T_2\circ T_1]=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & -4\end{pmatrix}$.

Propriedades de Transformações Invertíveis

Sejam $T:V\to W$, $T_1:V\to W$ e $T_2:W\to U$ transformações lineares invertíveis e $k\in\mathbf{R}, k\neq 0$.

1. $(T^{-1})^{-1}=T$
2. $(k\cdot T)^{-1}=k^{-1}\cdot T^{-1}$
3. $(T_2\circ T_1)^{-1}=T_1^{-1}\circ T_2^{-1}$

Exercícios

1) Verificar se as transformações são lineares:

a) $\begin{aligned}T:\ &\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2\\ &(x,y,z)\mapsto T(x,y,z)=(x^2,y+z)\end{aligned}$

b) $\begin{aligned}T:\ &\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2\\ &(x,y,z)\mapsto T(x,y,z)=(x,2y)\end{aligned}$

c) $\begin{aligned}T:\ &\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2\\ &(x,y)\mapsto T(x,y)=(x+a,y+b),\ a,b\in\mathbf{R}-\{0\}\end{aligned}$

d) $\begin{aligned}T:\ &\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}\\ &(x,y,z)\mapsto T(x,y,z)=x-3y+1\end{aligned}$

e) $\begin{aligned}T:\ &\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}\\ &(x,y)\mapsto T(x,y)=|x|\end{aligned}$

2) Para que valores de $k\in\mathbf{R}$ a transformação no $\mathbf{R}^3$ tal que $T(x,y,z)=(2x+3k,y,3z)$ é linear?

3) Seja $Mat_{n\times n}(\mathbf{R})$ o espaço vetorial das matrizes quadradas $n\times n$ sobre $\mathbf{R}$ e $M\in Mat_{n\times n}(\mathbf{R})$ uma matriz arbitrária qualquer.
A transformação $T:Mat_{n\times n}(\mathbf{R})\to Mat_{n\times n}(\mathbf{R})$ tal que $T(A)=A\cdot M+M\cdot A$ é linear?

4) Sejam $v=(0,1), u=(1,0), t=(2,1)$ e $w=(1,2)$ e $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ tal que $T(x,y)=(2x,2y)$, que define a dilatação de fator 2 na direção do vetor.
Represente $v,u,t,w,T(v),T(u),T(t)$ e $T(w)$ em um sistema de eixos cartesianos.

5) Considere a transformação linear $T:\mathbf{R^2}\rightarrow Mat_{2\times1}(\mathbf{R})$ tal que $T(x,y)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.

Determine $T(1,1), T(-3,4)$ e $T(x,y)$.

6) Encontre a lei que define a transformação linear $T:\mathbf{R^2}\rightarrow\mathbf{R^2}$ que faz associar cada vetor $v=(x,y)$ à sua reflexão em torno do eixo *Y*.
Determine $T(-2,-3)$.
Represente no sistema de eixos cartesianos.

7) Seja $T:\mathbf{R^3}\rightarrow\mathbf{R^2}$ uma transformação linear tal que $T(1,0,0)=(2,4)$, $T(0,1,0)=(3,5)$ e $T(1,1,1)=(1,1)$. Indique a lei de *T*.

8) Seja $T:\mathbf{R^3}\rightarrow\mathbf{R^2}$ uma transformação linear definida por $T(1,1,1)=(1,2)$, $T(1,1,0)=(2,3)$ e $T(1,0,0)=(3,4)$.
a) Determine $T(x,y,z)$.
b) Determine $(x,y,z)\in\mathbf{R^3}$ tal que $T(x,y,z)=(-3,-2)$.
c) Determine $(x,y,z)\in\mathbf{R^3}$ tal que $T(x,y,z)=(0,0)$.

9) Calcule o núcleo e o conjunto imagem das transformações abaixo:

a) $$\begin{array}{l} T\ :\ \mathbf{R^3}\rightarrow\mathbf{R^2}\\ (x,y,z)\mapsto T(x,y,z)=(x+2y+3z,3x+2y+z)\end{array}$$

b) $$\begin{array}{l} T\ :\ \mathbf{R^2}\rightarrow\mathbf{R^3}\\ (x,y)\mapsto T(x,y)=(x+y,2x-y,-x+3y)\end{array}$$

10) Ache uma transformação linear $T:\mathbf{R^3}\rightarrow\mathbf{R^2}$ cujo núcleo seja gerado pelo vetor $(1,1,0)$.

11) Determinar um operador linear no $\mathbf{R^3}$ cujo conjunto imagem seja gerado por $\{(2,1,1),(1,-1,2)\}$.

12) Indique a lei de T^{-1} para cada uma das transformações lineares:

a) $$\begin{array}{l} T:\ \mathbf{R^2}\rightarrow\mathbf{R^2}\\ (x,y)\mapsto T(x,y)=(y,-x)\end{array}$$

b) $$\begin{array}{l} I_V:V\rightarrow V\\ v\mapsto I_V(v)=v\end{array}$$

c) $$\begin{array}{l} T\ :\ Mat_{2\times2}(\mathbf{R})\rightarrow\mathbf{R^4}\\ \begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\mapsto T(\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix})=(t,z,y,x)\end{array}$$

13) Seja o operador linear *T* no $\mathbf{R^3}$ tal que $T(x,y,z)=(x+2y,y,x+z)$. Mostre que *T* é um isomorfismo e indique sua inversa.

14) Considere $B=\{v,u,w\}$ uma base do $\mathbf{R}^3$, onde $v=(1,2,3)$, $u=(2,5,3)$ e $w=(1,0,1)$.

a) Ache uma fórmula para a transformação linear $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ tal que $T(v)=(1,0)$, $T(u)=(1,0)$ e $T(w)=(0,1)$.

b) Encontre uma base e a dimensão do $N(T)$.

c) Encontre uma base e a dimensão da $\operatorname{Im}(T)$.

d) *T* é invertível? Justifique sua resposta.

15) Seja $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ tal que $T(x,y,z)=(x+y,x+z)$. Indique:

a) $[T]_B^A$ considerando *A* e *B* bases canônicas.

b) $[T]_D^C$ onde $C=\{(1,0,0),(0,-1,0),(0,0,2)\}$ e $D=\{(1,2),(3,5)\}$.

c) $[T(v)]_D$ onde $v=(1,1,0)$.

16) Sejam *S* e *T* operadores lineares no $\mathbf{R}^2$ definidas por $S(x,y)=(x+2y,y)$ e $T(x,y)=(x,3y)$.
Determine:

a) $S+T$

b) $(2\cdot S)+(4\cdot T)$

c) $S\circ T$

d) $S\circ S$

17) Escolha alguns vetores de $\mathbf{R}^2$, represente-os no plano cartesiano. Em seguida encontre a imagem de cada um deles em relação ao operador *S* anterior. Represente essas imagens no plano cartesiano. Observe o que acontece.

18) Repita os mesmos passos do exercício anterior, para o operador *T*.

19) Seja *T* a transformação linear determinada pela matriz $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$.

a) Indique a lei da transformação.

b) Calcule $T(-2,1)$.

20) Seja *T* o operador linear no $\mathbf{R}^3$ definido por $T(x,y,z)=(2y+z,x-4y,3x)$.

a) Encontre a matriz de *T* na base $B=\{(1,1,0),(1,0,1),(1,0,0)\}$.

b) Encontre $[T(1,0,-1)]_B$ utilizando $[T]_B^B$.

21)Seja *T* a transformação linear associada a matriz $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

a) Ache uma base para $N(T)$.

b) Ache uma base para $\operatorname{Im}(T)$.

c) *T* é sobrejetora ? E injetora?

d) Determine a matriz associada a *T* em relação a base $\{(1,2,0),(0,-1,1),(0,1,2)\}$.

22) Seja $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ a transformação linear definida por $T(x,y)=(x+2y,-x,0)$.

a) Ache a matriz associada a *T* relativa as bases $A=\{(1,3),(-2,4)\}$ e $B=\{(1,1,1),(2,2,0),(3,0,0)\}$.

b) Use a matriz para calcular $[T(v)]_B$ onde $[v]_A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

23) Seja T a transformação linear associada a matriz $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Qual a lei que define T?
b) Determine o núcleo de T e uma base para $N(T)$.
c) Determine a imagem de T e uma base para $\mathrm{Im}(T)$.

24) Seja a transformação linear $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (2x - y + 3z, 4x + 2y + 3z)$.

a) Considerando A e B as bases canônicas do $\mathbf{R}^3$ e do $\mathbf{R}^2$, encontre $[T]_B^A$.
b) Considerando $A = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$ uma base do $\mathbf{R}^3$ e $B = \{(1,1), (1,-1)\}$ uma base do $\mathbf{R}^2$, encontre $[T]_B^A$.

25) Seja a transformação linear $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ tal que $T(x, y) = (2x + y, y, x + y)$. Encontre:

a) A matriz de T em relação a base canônica
b) A matriz de T em relação as bases $A = \{(1,-2), (0,1)\}$ e $B = \{(1,0,0), (0,2,1), (0,0,3)\}$.

26) Considere $[T]_B^A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ onde $A = \{(1,0), (-1,1)\}$ e $B = \{(1,2,3), (0,-1,1), (0,0,2)\}$. Encontre as coordenadas de $[T(v)]_B$ sabendo que as coordenadas de v em relação à base canônica do $\mathbf{R}^2$ são $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

27) Sabendo que a transformação linear $T_\theta : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, cuja matriz em relação à base canônica é $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, aplicada a um vetor $[v] = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ indica a rotação do vetor v de um ângulo θ.

Assim, $[T_\theta] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot [v]$.

Utilizando a matriz de rotação, determine o vértice $C = (x, y)$ de um triângulo retângulo e isósceles em A, onde $A = (2,1)$ e $B = (5,3)$.

28) Seja $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a matriz associada a um operador T em relação à base $\{(1,0,1), (0,-1,1), (0,0,1)\}$.

Determine a lei de T.

Respostas

1) b) Sim

2) $k = 0$

3) Sim

5) $T(1,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $T(-3,4) = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$

$T(x,y) = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3y \end{pmatrix}$

6) $T(x,y) = (-x, y)$ e $T(-2,-3) = (2,-3)$

7) $T(x,y,z) = (2x + 3y - 4z, 4x + 5y - 8z)$

8) a) $T(x,y,z) = (3x - y - z, 4x - y - z)$

b) $\{(1, 6 - z, z), z \in \mathbf{R}\}$

$\{(0, y, -y), y \in \mathbf{R}\}$

9) a) $N(T) = \{(z, -2z, z), z \in \mathbf{R}\}$

$\mathrm{Im}(T) = \mathbf{R}^2$

b) $N(T) = \{(0,0)\}$

$\mathrm{Im}(T) = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid -5x + 4y + 3z = 0\}$

12) a) $T^{-1}(x,y) = (-y, x)$

b) $I_V^{-1} = I_V$

c) $T^{-1}(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} t & z \\ y & x \end{pmatrix}$

14) a) $T(x,y,z) = \left(\frac{17x+y-z}{2}, \frac{9x-3y-z}{8}\right)$

b) $N(T) = \{(\frac{y}{3}, y, 0), y \in \mathbf{R}\}$

base $N(T): \{(1,3,0)\}$

$\dim N(T) = 1$

c) $\mathrm{Im}(T) = \mathbf{R}^2$

base $\mathrm{Im}(T): \{(1,0),(0,1)\}$

$\dim \mathrm{Im}(T) = 2$

d) Não, pois T não é injetora.

15) a) $[T]_B^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $[T]_D^C = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

c) $[T(v)]_D = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$

16) a) $(S + T)(x,y) = (2x + 2y, 4y)$

b) $(2 \cdot S + 4 \cdot T)(x,y) = (6x + 4y, 14y)$

c) $(S \circ T)(x,y) = (x + 6y, 3y)$

d) $(S \circ S)(x,y) = (x + 4y, y)$

19) a) $T(x,y) = (2x, 4x, -4y)$

b) $T(-2,1) = (-4,-8,-4)$

20) a) $[T]_B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

b) $[T(1,0,-1)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

21) a) base $N(T): \{(0,1,0)\}$

b) base $\mathrm{Im}(T): \{(1,3,2),(2,-1,0)\}$

c) Nem injetora nem sobrejetora.

d) $[T]_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{20}{3} \\ 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$

22) a) $[T]_B^A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ b) $[T(v)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

23) a) $T(x,y) = (-x + 2y, 3x, 2x + y)$

b) $N(T) = \{(0,0)\}$

$\mathrm{Im}(T) = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 3x + 5y - 6z = 0\}$

base $\mathrm{Im}(T): \{(-1,3,2),(2,0,1)\}$

24) a) $[T]_B^A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $[T]_B^A = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & 6 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$

25) a) $[T]_B^A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $[T]_B^A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

26) $[T(v)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

27) $C = (0,4)$ ou $C = (4,-2)$

28) $T(x,y,z) = (-2x, y, -4x + y + 2z)$

Apêndice C – Teoremas

Teo33. Se $T : V \to W$ é uma transformação linear então $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.

Teo34. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear.

Então $T(k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_n \cdot v_n) = k_1 \cdot T(v_1) + k_2 \cdot T(v_2) + ... + k_n \cdot T(v_n)$, para quaisquer $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ e para quaisquer $k_1, k_2, ..., k_n \in \mathbf{R}$.

dem.: (indução em *n*).

Base: Para $k = 2$.

$T(k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2) = T(k_1 \cdot v_1) + T(k_2 \cdot v_2) = k_1 \cdot T(v_1) + k_2 \cdot T(v_2)$ por TL1 e TL2.

Passo: (Hipótese de Indução) Supor que vale a igualdade para $k \in \mathbf{N}, k > 2$, isto é, $T(k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_n \cdot v_n) = k_1 \cdot T(v_1) + k_2 \cdot T(v_2) + ... + k_n \cdot T(v_n)$.

Vale a igualdade para $k+1$ vetores ?

$T((k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_n \cdot v_n) + k_{n+1} \cdot v_{n+1}) =$ por TL1.

$T(k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_n \cdot v_n) + T(k_{n+1} \cdot v_{n+1}) =$ por TL2.

$T(k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_n \cdot v_n) + k_{n+1} \cdot T(v_{n+1}) =$ por hipótese de indução.

$k_1 \cdot T(v_1) + k_2 \cdot T(v_2) + ... + k_n \cdot T(v_n) + k_{n+1} \cdot T(v_{n+1})$.

Assim, $T(k_1 \cdot v_1 + ... + k_n \cdot v_n + k_{n+1} \cdot v_{n+1}) = k_1 \cdot T(v_1) + ... + k_n \cdot T(v_n) + k_{n+1} \cdot T(v_{n+1})$

Logo, vale a igualdade para todo $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$.

Corolário34: Sabendo-se as imagens dos vetores de uma base do espaço vetorial V é possível determinar a transformação linear $T : V \to W$.

Teo35. Seja $T : V \to W$ é uma transformação linear.

Então i) $T(-v) = -T(v)$, para todo $v \in V$.

ii) $T(v - u) = T(v) - T(u)$, para quaisquer $v, u \in V$.

Teo36. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear e S um subespaço vetorial do espaço vetorial V então $T(S) = \{w \in W \mid \text{existe } s \in S \text{ tal que } T(s) = w\}$ é um subespaço vetorial do espaço *W*.

dem.: (Sub1) Por hipótese, $S \leq V$.

Por Sub1, $\mathbf{0}_V \in S$.

Pelo Teo33, $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.

Logo, $\mathbf{0}_W \in T(S)$.

(Sub2) Sejam $w_1, w_2 \in T(S)$.

Então, existem $v_1, v_2 \in S$ tais que $T(v_1) = w_1$ e $T(v_2) = w_2$.

Assim, $w_1 + w_2 = T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2)$, por TL1.

Como, $S \leq V$.

Pelo fechamento para operação de adição em *S*, $v_1 + v_2 \in S$.

Então, $w_1 + w_2 \in T(S)$.

Logo, vale o fechamento para operação de adição em $T(S)$.

(Sub3) Sejam $w \in T(S)$ e $k \in \mathbf{R}$.

Então, existe $v \in S$ tal que $T(v) = w$.

Assim, $k \cdot w = k \cdot T(v) = T(k \cdot v)$, por TL2.

Como, $S \leq V$.
Pelo fechamento para operação de multiplicação por escalar em S, $k \cdot v \in S$.
Então, $k \cdot w \in T(S)$.
Logo, vale o fechamento para operação de multiplicação por escalar em $T(S)$.

Teo37. $N(T)$ é um subespaço vetorial de *V*.

Teo38. $\text{Im}(T)$ é um subespaço vetorial de *W*.

Teo39. (**Teorema do Núcleo e da Imagem**)
Seja $T : V \to W$ uma transformação linear . Então $\dim V = \dim N(T) + \dim \text{Im}(T)$.
dem.: Considere $\dim N(T) = t$ e $\{v_1, v_2, ..., v_t\} \subseteq N(T)$ uma base para $N(T)$.
Seja $\dim \text{Im}(T) = s$ e $\{w_1, w_2, ..., w_s\} \subseteq \text{Im}(T)$ uma base para $\text{Im}(T)$.
Existem $u_1, u_2, ..., u_s \in V$ tais que $T(u_1) = w_1, T(u_2) = w_2, ..., T(u_s) = w_s$. (1)
Considere o conjunto $\{v_1, ..., v_t, u_1, ..., u_s\} \subseteq V$.
Se $v \in V$ então $T(v) \in \text{Im}(T)$.
Como $[w_1, ..., w_s] = \text{Im}(T)$, existem $l_1, ..., l_s \in \mathbf{R}$ tais que $T(v) = l_1 \cdot w_1 + ... + l_s \cdot w_s$. (2)
Considere o vetor $u = l_1 \cdot u_1 + ... + l_s \cdot u_s - v$. (3)
Assim, $T(u) = T(l_1 \cdot u_1 + ... + l_s \cdot u_s - v)$.
Pelo Teo34, $T(u) = l_1 \cdot T(u_1) + ... + l_s \cdot T(u_s) - T(v)$.
De (1), $T(u) = l_1 \cdot w_1 + ... + l_s \cdot w_s - T(v)$.
De (2), $T(u) = T(v) - T(v)$.
Assim, $T(u) = \mathbf{0}_W$.
Então, $u \in N(T)$.
Mas, $[v_1, ..., v_t] = N(T)$.
Então, existem $k_1, ..., k_t \in \mathbf{R}$ tais que $u = k_1 \cdot v_1 + ... + k_t \cdot v_t$. (4)
De (3) e (4), $l_1 \cdot u_1 + ... + l_s \cdot u_s - v = k_1 \cdot v_1 + ... + k_t \cdot v_t$.
Assim, $v = l_1 \cdot u_1 + ... + l_s \cdot u_s - k_1 \cdot v_1 - ... - k_t \cdot v_t$.
Então, $[v_1, ..., v_t, u_1, ..., u_s] = V$. (5)
Seja $k_1 \cdot v_1 + ... + k_t \cdot v_t + k_{t+1} \cdot u_1 + ... + k_{t+s} \cdot u_s = \mathbf{0}_V$, com $k_1, ..., k_{t+s} \in \mathbf{R}$. (6)
Assim, $T(k_1 \cdot v_1 + ... + k_t \cdot v_t + k_{t+1} \cdot u_1 + ... + k_{t+s} \cdot u_s) = T(\mathbf{0}_V)$.
Pelo Teo33, $T(k_1 \cdot v_1 + ... + k_t \cdot v_t + k_{t+1} \cdot u_1 + ... + k_{t+s} \cdot u_s) = \mathbf{0}_W$.
Pelo Teo34, $k_1 \cdot T(v_1) + ... + k_t \cdot T(v_t) + k_{t+1} \cdot T(u_1) + ... + k_{t+s} \cdot T(u_s) = \mathbf{0}_W$
Mas, $\{v_1, ..., v_t\} \subseteq N(T)$.
Então, $T(v_1) = \mathbf{0}_W, ..., T(v_t) = \mathbf{0}_W$. (7)
De (1) e (7), $k_1 \cdot \mathbf{0}_W + ... + k_t \cdot \mathbf{0}_W + k_{t+1} \cdot w_1 + ... + k_{t+s} \cdot w_s = \mathbf{0}_W$.
Assim, $k_{t+1} \cdot w_1 + ... + k_{t+s} \cdot w_s = \mathbf{0}_W$.
Como, $\{w_1, ..., w_s\}$ é uma base para $\text{Im}(T)$.
Então, $\{w_1, ..., w_s\}$ é linearmente independente.

Tem-se, $k_{t+1} = ... = k_{t+s} = 0$.
Substituindo em (6), $k_1 \cdot v_1 + ... + k_t \cdot v_t = \mathbf{0}_V$.
Como, $\{v_1,...,v_t\}$ é uma base para $N(T)$.
Então, $\{v_1,...,v_t\}$ é linearmente independente.
Tem-se, $k_1 = ... = k_t = 0$.
Então, $\{v_1,...,v_t,u_1,...,u_s\}$ é linearmente independente. (8)
De (5) e (8), $\{v_1,...,v_t,u_1,...,u_s\}$ é uma base de *V*.
Logo, $\dim V = t + s = \dim N(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$.

Teo40. Seja $T: V \to W$ é uma transformação linear. *T* é uma transformação linear injetora se e somente se $N(T) = \{\mathbf{0}_V\}$.

dem.:

($\to$) Se *T* é uma transformação linear injetora então $N(T) = \{\mathbf{0}_V\}$?
Considere $v \in N(T)$ qualquer.
Então, $T(v) = \mathbf{0}_W$.
Pelo Teo33, $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.
Assim, $T(v) = T(\mathbf{0}_V)$.
Como T é uma transformação linear injetora.
Se $T(v) = T(\mathbf{0}_V)$ então $v = \mathbf{0}_V$.
Logo, $N(T) = \{\mathbf{0}_V\}$.

($\leftarrow$) Se $N(T) = \{\mathbf{0}_V\}$ então *T* é uma transformação linear injetora ?
Sejam $v,u \in V$ tais que $T(v) = T(u)$.
Assim, $T(v) - T(u) = \mathbf{0}_W$.
Pelo Teo35, $T(v - u) = \mathbf{0}_W$.
Mas, $N(T) = \{\mathbf{0}_V\}$.
Assim, $v - u = \mathbf{0}_V$.
Então, $v = u$.
Logo, *T* é uma transformação linear injetora.

Teo41. Seja $T: V \to W$ é uma transformação linear injetora e $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subseteq V$ um conjunto de vetores linearmente independente. O conjunto $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\} \subseteq W$ também é linearmente independente.

Teo42. Seja $T: V \to W$ é uma transformação linear injetora e $\dim V = \dim W$. Então a transformação linear T é sobrejetora.

Teo43. Seja $T: V \to W$ uma transformação. A transformação *T* é bijetora se e somente se for invertível.

Teo44. Seja $T:V\to W$ uma transformação linear e $\{v_1, v_2,..., v_n\}\subseteq V$. Se $[v_1, v_2,..., v_n]=V$ então $[T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)]=\operatorname{Im}(T)$.

Teo45. Sejam $T:V\to W$ e $R:W\to U$ transformações lineares.
Então a transformação composta $(R\circ T):V\to U$ tal que $(R\circ T)(v)=R(T(v))$ é linear.

Teo46. Sejam $T:V\to W$ e $R:W\to U$ transformações lineares bijetoras e $k\in\mathbf{R}, k\neq 0$.
Então i) a transformação inversa $T^{-1}:W\to V$ é linear.
ii) $(T^{-1})^{-1}=T$
iii) $(k\cdot T)^{-1}=k^{-1}\cdot T^{-1}$
iv) $(R\circ T)^{-1}=T^{-1}\circ R^{-1}$

Teo47. Seja $Q:V\to W$, $R:V\to W$, $S:W\to U$ e $T:W\to U$ transformações lineares e $k\in\mathbf{R}$.
Então i) $(S+T)\circ Q=(S\circ Q)+(T\circ Q)$
ii) $T\circ(Q+R)=(T\circ Q)+(T\circ R)$
iii) $(k\cdot T)\circ Q=k\cdot(T\circ Q)=T\circ(k\cdot Q)$

Teo48.Sejam *V* e *W* espaços vetoriais e $\{v_1, v_2,..., v_n\}$ uma base *V*. Se o vetor v_i pode ser associado a um vetor $w_i\in W$, para todo $i=1,...,n$ então existe uma única transformação linear $T:V\to W$ tal que $T(v_i)=w_i$, para todo $i=1,...,n$.

Teo49. Seja $L(V,W)$ (ou $Hom(V,W)$) o conjunto de todas as transformações lineares de *V* em *W* e as seguintes operações:

$$+: L(V,W)\times L(V,W)\to L(V,W)$$
$$(T_1,T_2)\quad\mapsto T_1+T_2 \text{ tal que } (T_1+T_2)(v)=T_1(v)+T_2(v)$$

$$\cdot: \mathbf{R}\times L(V,W)\to L(V,W)$$
$$(k,T)\quad\mapsto k\cdot T \text{ tal que } (k\cdot T)(v)=k\cdot T(v)$$

Então $[L(V,W),\mathbf{R},+,\cdot]$ é um espaço vetorial.

Teo50. Se $\dim V=n$ e $\dim W=m$ então $\dim L(V,W)=nm$.

O conjunto $L(V,\mathbf{R})$ ou $Hom(V,\mathbf{R})$ ou V^* de todos os funcionais de *V* em **R** é denominado **espaço vetorial dual de *V***.