Aula 21

1. Rotação dos eixos coordenados

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano e seja $O\,\overline{X}\,\overline{Y}$ o sistema de eixos obtido girando os eixos OX e OY de um ângulo θ, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, no sentido positivo.

Sejam (x, y) e $(\overline{x}, \overline{y})$ as coordenadas de um ponto P nos sistemas OXY e $O\,\overline{X}\,\overline{Y}$, respectivamente, φ o ângulo que o vetor $\overrightarrow{OP}$ faz com o semi-eixo positivo $O\,\overline{X}$ e $r = d(P, O)$. Então,

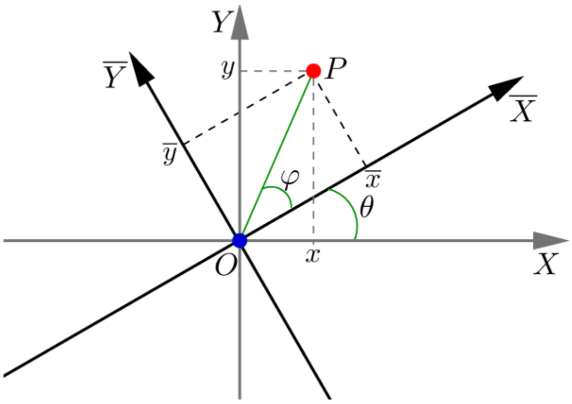

Fig. 1: Sistema $O\,\overline{X}\,\overline{Y}$ obtido girando de θ o sistema OXY.

$$\begin{cases} \overline{x} = r\cos\varphi \\ \overline{y} = r\,\text{sen}\,\varphi\,, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x = r\cos(\varphi + \theta) \\ y = r\,\text{sen}(\varphi + \theta)\,. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi - r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi \\ y = r\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi + r\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi\,, \end{cases} \qquad \text{ou seja,} \qquad \boxed{\begin{cases} x = \cos\theta\,\overline{x} - \text{sen}\,\theta\,\overline{y} \\ y = \text{sen}\,\theta\,\overline{x} + \cos\theta\,\overline{y} \end{cases}}$$

A **mudança de coordenadas pela rotação de um ângulo θ dos eixos OX e OY** pode ser escrita, também, na forma matricial:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}}$$

ou, na forma vetorial:

$$\boxed{(x, y) = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta)\overline{x} + (-\text{sen}\,\theta, \cos\theta)\overline{y}}$$

A mudança de coordenadas **inversa** (obtida pela rotação de $-\theta$ dos eixos $O\,\overline{X}$ e $O\,\overline{Y}$) se expressa, em termos de matizes, como:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

pois $\cos(-\theta) = \cos\theta$ e $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$. Então,

$$\boxed{\begin{cases} \overline{x} = \cos\theta\, x + \operatorname{sen}\theta\, y \\ \overline{y} = -\operatorname{sen}\theta\, x + \cos\theta\, y \end{cases}}$$

ou seja,

$$\boxed{(\overline{x}, \overline{y}) = (\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta)\, x + (\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\, y}$$

Exemplo 1

Por uma rotação de 45^o *dos eixos coordenados, uma certa equação é transformada na equação* $4\overline{x}^2 - 9\overline{y}^2 = 36$. *Encontre a equação original nas coordenadas* x, y.

Solução.
Como

$$\begin{cases} \overline{x} = \cos\theta\, x + \operatorname{sen}\theta\, y & = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ \overline{y} = -\operatorname{sen}\theta\, x + \cos\theta\, y & = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)\,, \end{cases}$$

a equação acima, nas coordenadas x, y, se escreve na forma:

$$4 \times \frac{2}{4}(x+y)^2 - 9 \times \frac{2}{4}(-x+y)^2 = 36\,,$$

ou seja,

$$4(x^2 + 2xy + y^2) - 9(x^2 - 2xy + y^2) = 72\,,$$

isto é,

$$\boxed{-5x^2 + 26xy - 5y^2 - 72 = 0}$$

Como, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a equação pode ser escrita na forma $\dfrac{\overline{x}^2}{9} - \dfrac{\overline{y}^2}{4} = 1$, ela representa uma hipérbole com $a = 3$; $b = 2$; $c = \sqrt{13}$; centro $C = (0,0)$; reta focal $\ell : \overline{y} = 0$; vértices $A_1 = (-3,0)$ e $A_2 = (3,0)$; reta não-focal $\ell' : \overline{x} = 0$; vértices imaginários $B_1 = (0,-2)$ e $B_2 = (0,2)$, e assíntotas $\overline{y} = \pm\frac{2}{3}\overline{x}$, ou seja, $2\overline{x} \pm 3\overline{y} = 0$.

Usando as relações de mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\overline{x} - \overline{y}) \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\overline{x} + \overline{y})\,, \end{cases}$$

vemos que, nas coordenadas x e y, o centro é $C = (0,0)$; os vértices são $A_1 = \left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

e $A_2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, e os vértices imaginários são $B_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$, $B_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$. Usando, agora, as relações de mudança de coordenadas inversa:

$$\begin{cases} \overline{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ \overline{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)\,, \end{cases}$$

obtemos que, nas coordenadas x e y, a reta focal é $\ell : -x + y = 0$; a reta não-focal é $\ell' : x + y = 0$, e as assíntotas são:

$$\begin{aligned} 2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,(x+y) \pm 3\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,(-x+y) &= 0 \\ 2\,(x+y) \pm 3\,(-x+y) = 0\,, \end{aligned}$$

ou seja, $\quad r_1 : y = \frac{1}{5}x \quad$ e $\quad r_2 : y = 5x\,.$ □

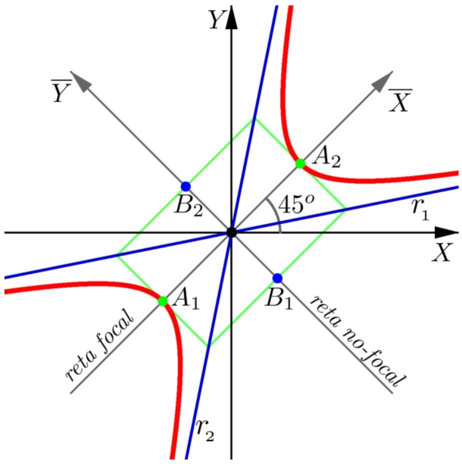

Fig. 2: Hipérbole $-5x^2 + 26xy - 5y^2 - 72 = 0$.

2. Redução da equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ à forma canônica, por uma rotação do sistema de eixos

Consideremos a equação do segundo grau:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (\star)$$

Após uma rotação positiva de um ângulo θ, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, dos eixos OX e OY, obtemos um novo sistema de eixos ortogonais $O\,\overline{X}$ e $O\,\overline{Y}$. As coordenadas (x, y) e $(\overline{x}, \overline{y})$ de um ponto P do plano nos sistemas de eixos OXY e $O\,\overline{X}\,\overline{Y}$, respectivamente, estão relacionadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta\,\overline{x} - \operatorname{sen}\theta\,\overline{y} \\ y &= \operatorname{sen}\theta\,\overline{x} + \cos\theta\,\overline{y}\,. \end{aligned}$$

Substituindo x por $\cos\theta\,\overline{x} - \operatorname{sen}\theta\,\overline{y}$ e y por $\operatorname{sen}\theta\,\overline{x} + \cos\theta\,\overline{y}$ na equação $(\star)$, obtemos a equação nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$:

$$\boxed{A_\theta\overline{x}^2 + B_\theta\overline{x}\,\overline{y} + C_\theta\overline{y}^2 + D_\theta\overline{x} + E_\theta\overline{y} + F_\theta = 0} \qquad (\star\star)$$

onde

$$\begin{aligned} A_\theta &= A\cos^2\theta + B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\operatorname{sen}^2\theta \\ B_\theta &= 2(C-A)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \\ C_\theta &= A\operatorname{sen}^2\theta - B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\cos^2\theta \\ D_\theta &= D\cos\theta + E\operatorname{sen}\theta \\ E_\theta &= -D\operatorname{sen}\theta + E\cos\theta \\ F_\theta &= F\,. \end{aligned}$$

Por uma verificação direta, temos que:

$$\boxed{\begin{pmatrix} A_\theta & B_\theta/2 \\ B_\theta/2 & C_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}} \qquad (\star\star)$$

e

$$\boxed{\begin{pmatrix} D_\theta \\ E_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}}$$

Determinemos, agora, o ângulo $\theta = \theta_0$, $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$, para o qual o coeficiente B_{θ_0} da equação nas variáveis $\overline{x}$, $\overline{y}$, é igual a zero.

Sendo
$$B_{\theta_0} = 2(C-A)\operatorname{sen}\theta_0\cos\theta_0 + B(\cos^2\theta_0 - \operatorname{sen}^2\theta_0) = (C-A)\operatorname{sen}2\theta_0 + B\cos 2\theta_0 = 0,$$
temos que:

1. $\theta_0 = 45^\circ$, se $A = C$.

2. $\operatorname{tg} 2\theta_0 = \frac{B}{A-C}$, se $A \neq C$.

Pela relação $1 + \operatorname{tg}^2 2\theta_0 = \sec^2 2\theta_0$, e pelo fato que $\operatorname{tg} 2\theta_0$ e $\cos 2\theta_0$ têm o mesmo sinal, já que $0 < 2\theta_0 < 180^\circ$, obtemos que:

$$\cos 2\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\theta_0}}, \quad \text{se} \quad \frac{B}{A-C} > 0, \quad \text{e}$$
$$\cos 2\theta_0 = \frac{-1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\theta_0}}, \quad \text{se} \quad \frac{B}{A-C} < 0.$$

Além disto, como $\cos 2\theta_0 = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$ e $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, temos que:

$$\cos 2\theta_0 = \cos^2\theta_0 - (1-\cos^2\theta_0) = 2\cos^2\theta_0 - 1$$

$$\text{e} \qquad \cos 2\theta_0 = (1-\operatorname{sen}^2\theta_0) - \operatorname{sen}^2\theta_0 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta_0,$$

ou seja,

$$\boxed{\cos\theta_0 = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta_0}{2}} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\theta_0 = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta_0}{2}}}$$

Fazendo $\theta = \theta_0$, $\overline{A} = A_{\theta_0}$, $\overline{C} = C_{\theta_0}$, $\overline{D} = D_{\theta_0}$, $\overline{E} = E_{\theta_0}$ e $\overline{F} = F_{\theta_0} = F$ a equação do segundo grau $(\star\star)$ fica na forma

$$\boxed{\overline{A}\overline{x}^2 + \overline{C}\overline{y}^2 + \overline{D}\overline{x} + \overline{E}\overline{y} + \overline{F} = 0}$$

onde

$$\boxed{\begin{pmatrix} \overline{A} & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & \operatorname{sen}\theta_0 \\ -\operatorname{sen}\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & -\operatorname{sen}\theta_0 \\ \operatorname{sen}\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix}}$$

e

$$\boxed{\begin{pmatrix} \overline{D} \\ \overline{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & \operatorname{sen}\theta_0 \\ -\operatorname{sen}\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}}$$

Definição 1

O **indicador** *da equação do segundo grau*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,,$$

é o número

$$\boxed{I = B^2 - 4AC = -4\det\begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}}$$

Como o determinante de um produto de matrizes é igual ao produto dos determinantes das matrizes fatores, temos, por ($\star\star$), que, para todo $\theta \in \mathbb{R}$,

$$I_\theta = B_\theta^2 - 4A_\theta C_\theta = -4\det\begin{pmatrix} A_\theta & B_\theta/2 \\ B_\theta/2 & C_\theta \end{pmatrix} = -4\det\begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} = I\,,$$

pois $\det\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = 1$.

Em particular, fazendo $\theta = \theta_0$, temos que $I = B^2 - 4AC = -4\overline{A}\,\overline{C}$. Dizemos, então, que a equação do segundo grau ($\star$) é do tipo:

- **elíptico**, se $I = B^2 - 4AC = -4\overline{A}\,\overline{C} < 0$.
- **parabólico**, se $I = B^2 - 4AC = -4\overline{A}\,\overline{C} = 0$.
- **hiperbólico**, se $I = B^2 - 4AC = -4\overline{A}\,\overline{C} > 0$.

3. Exemplos

Exemplo 2

(a) *Reduza, por uma rotação dos eixos coordenados, a equação*

$$x^2 + 2xy + y^2 - x + y + 1 = 0 \qquad (\star)$$

à sua forma canônica.

(b) *Determine o foco, o vértice e a diretriz da cônica nas coordenadas x, y.*

(c) *Faça um esboço da curva.*

Solução.

(a) Os coeficientes da equação são $A = 1$, $B = 2$, $C = 1$, $D = -1$, $E = 1$, $F = 1$, e seu indicador é $I = B^2 - 4AC = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$. Então a equação é do tipo parabólico.

Sendo $A = C = 1$, o ângulo da rotação necessária para eliminar o termo misto (xy) é $\theta = 45^o$ e as relações de mudança de coordenadas, por essa rotação, são:

$$\begin{cases} x = \cos(45^o)\,\overline{x} - \operatorname{sen}(45^o)\,\overline{y} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} - \overline{y}) \\ y = \operatorname{sen}(45^o)\,\overline{x} + \cos(45^o)\,\overline{y} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} + \overline{y}) \end{cases} \qquad (1)$$

e

$$\begin{cases} \overline{x} = \cos(45^o)\,x + \operatorname{sen}(45^o)\,y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ \overline{y} = -\operatorname{sen}(45^o)\,x + \cos(45^o)\,y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) \end{cases} \qquad (2)$$

Nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, a equação $(\star)$ se escreve na forma:

$$\overline{A}\,\overline{x}^2 + \overline{C}\,\overline{y}^2 + \overline{D}\,\overline{x} + \overline{E}\,\overline{y} + \overline{F} = 0$$

onde $\overline{F} = F = 1$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \overline{A} & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2/2 \\ 2/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ou seja,} \quad \overline{A} = 2\,,\ \overline{C} = 0\,, \end{aligned}$$

e

$$\begin{pmatrix} \overline{D} \\ \overline{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

ou seja, $\overline{D} = 0$, $\overline{E} = \sqrt{2}$.

Portanto, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a equação da cônica se escreve na forma:

$$2\overline{x}^2 + \sqrt{2}\,\overline{y} + 1 = 0\,,$$

isto é,

$$\overline{x}^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overline{y} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

que é a forma canônica de uma parábola.

(b) A parábola, nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, possui os seguintes elementos:

- vértice: $V = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
- reta focal: $\ell : \overline{x} = 0$;
- parâmetro: $2p = \frac{\sqrt{2}}{4} \Longrightarrow p = \frac{\sqrt{2}}{8}$;
- foco: $F = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}\right) = \left(0, -\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)$;
- diretriz: $\overline{y} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{8} = -\frac{3\sqrt{2}}{8}$;

Determinação dos elementos da parábola nas coordenadas x e y:

Por (1), $V = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ é o vértice, $F = \left(\frac{5}{8}, -\frac{5}{8}\right)$ é o foco, e por (2), $\ell : x + y = 0$ é a reta focal e $\mathcal{L} : x - y = \frac{3}{4}$ é a diretriz da parábola nas coordenadas x e y.

(c) Na figura abaixo mostramos o esboço da parábola. □

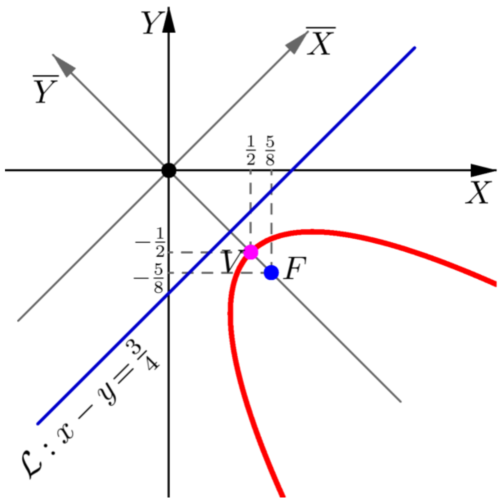

Fig. 3: Parábola $x^2 + 2xy + y^2 - x + y + 1 = 0$.

Exemplo 3

(a) *Reduza, por uma rotação dos eixos coordenados, a equação*

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 + 20x + 20y + 44 = 0\,,$$

à sua forma canônica.

(b) *Determine os focos, os vértices, o centro, a reta focal e a reta não-focal da cônica nas coordenadas* x, y.

(c) *Faça um esboço da curva.*

(d) *Prove que a reta* $x + y = 10$ *não é tangente à curva.*

Solução.

(a) Os coeficientes da equação são $A = 5$, $B = 4$, $C = 2$, $D = 20$, $E = 20$, $F = 44$, e seu indicador é $I = B^2 - 4AC = 16 - 40 = -24 < 0$. Portanto, a equação é do tipo elíptico.

Como $A \neq C$, temos que $\operatorname{tg} 2\theta = \dfrac{B}{A-C} = \dfrac{4}{3} > 0$. Logo,

$$\cos 2\theta = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 2\theta}} = \sqrt{\frac{1}{1+16/9}} = \frac{3}{5} > 0\,,$$

de onde obtemos:

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+3/5}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\,,$$
$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-3/5}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\,.$$

As relações de mudança de coordenadas são:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(2\overline{x} - \overline{y}) \\[2ex] y = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(\overline{x} + 2\overline{y}) \end{cases} \quad (1) \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(2x + y) \\[2ex] \overline{y} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(-x + 2y) \end{cases} \quad (2),$$

e a equação nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$ fica na forma:

$$\overline{A}\,\overline{x}^2 + \overline{C}\,\overline{y}^2 + \overline{D}\,\overline{x} + \overline{E}\,\overline{y} + \overline{F} = 0,$$

onde $\overline{F} = F = 44$;

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \overline{A} & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix} &= \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ou seja, } \overline{A} = 6 \quad \text{e} \quad \overline{C} = 1;
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{D} \\ \overline{E} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\sqrt{5} \\ 4\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad \text{ou seja, } \overline{D} = 12\sqrt{5} \quad \text{e} \quad \overline{E} = 4\sqrt{5}\,.$$

Logo, a equação da elipse, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, é dada por:

$$6\overline{x}^2 + \overline{y}^2 + 12\sqrt{5}\,\overline{x} + 4\sqrt{5}\,\overline{y} + 44 = 0\,.$$

Completando os quadrados, temos:

$$\begin{aligned}
&6(\overline{x}^2 + 2\sqrt{5}\overline{x}) + (\overline{y}^2 + 4\sqrt{5}\,\overline{y}) = -44 \\
&6(\overline{x}^2 + 2\sqrt{5}\overline{x} + 5) + (\overline{y}^2 + 4\sqrt{5}\,\overline{y} + 20) = -44 + 30 + 20 \\
&6(\overline{x} + \sqrt{5})^2 + (\overline{y} + 2\sqrt{5})^2 = 6 \\
&\mathcal{E} : (\overline{x} + \sqrt{5})^2 + \frac{(\overline{y} + 2\sqrt{5})^2}{6} = 1\,,
\end{aligned}$$

que é a forma canônica de uma elipse.

(b) A equação representa uma elipse $\mathcal{E}$ com $a = \sqrt{6}$; $b = 1$; e $c = \sqrt{5}$, que nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ tem:

- centro: $C = (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$;
- reta focal: $\ell : \overline{x} = -\sqrt{5}$, paralela ao eixo$-O\,\overline{Y}$;
- reta não-focal: $\ell' : \overline{y} = -2\sqrt{5}$, paralela ao eixo$-O\,\overline{X}$;
- vértices sobre o eixo focal: $A_1 = (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5} - \sqrt{6})$ e $A_2 = (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5} + \sqrt{6})$;
- vértices sobre o eixo não-focal: $B_1 = (-\sqrt{5} - 1, -2\sqrt{5})$ e $B_2 = (-\sqrt{5} + 1, -2\sqrt{5})$;
- focos: $F_1 = (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5} - \sqrt{5}) = (-\sqrt{5}, -3\sqrt{5})$ e $F_2 = (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5} + \sqrt{5}) = (-\sqrt{5}, -\sqrt{5})$;
- excentricidade: $e = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$.

Determinação dos elementos da elipse nas coordenadas x e y.

Temos, por (2), que:

- $\ell : 2x + y = -5$ é a reta focal;
- $\ell' : x - 2y = 10$ é a reta não-focal;

e, por (1),

- $C = (0, -5)$ é o centro;
- $F_1 = (1, -7)$ e $F_2 = (-1, -3)$ são os focos;
- $A_1 = \left(\dfrac{\sqrt{30}}{5}, -5 - \dfrac{2\sqrt{30}}{5}\right)$ e $A_2 = \left(-\dfrac{\sqrt{30}}{5}, -5 + \dfrac{2\sqrt{30}}{5}\right)$ são os vértices sobre a reta focal;
- $B_1 = \left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, -5 - \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$ e $B_2 = \left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}, -5 + \dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$ são os vértices sobre o eixo não-focal da elipse nas coordenadas x e y.

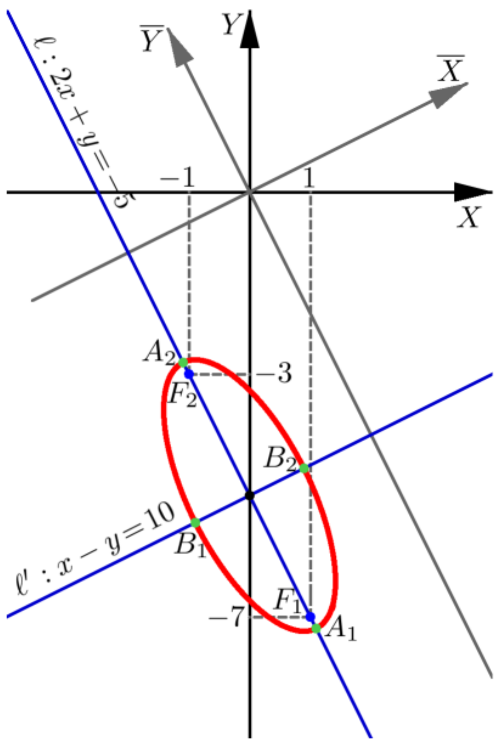

Fig. 4: Elipse $x^2 + 2xy + y^2 - x + y + 1 = 0$.

(c) Na figura ao lado mostramos o esboço da elipse.

(d) Nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, a reta $r : x + y = 10$ é dada por:

$$r : \frac{\sqrt{5}}{5}(2\overline{x} - \overline{y} + \overline{x} + 2\overline{y}) = 10, \quad \text{ou seja,} \quad r : 3\overline{x} + \overline{y} = 10\sqrt{5}\,.$$

Então $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathcal{E} \cap r$ se, e somente se, $\overline{y} = 10\sqrt{5} - 3\overline{x}$ e

$$\begin{aligned} & 6(\overline{x} + \sqrt{5})^2 + (10\sqrt{5} - 3\overline{x} + 2\sqrt{5})^2 = 6 \\ \iff\ & 6\overline{x}^2 + 12\sqrt{5}\overline{x} + 30 + 9\overline{x}^2 - 72\sqrt{5}\overline{x} + 720 - 6 = 0 \\ \iff\ & 15\overline{x}^2 - 60\sqrt{5}\overline{x} - 744 = 0\,. \end{aligned}$$

Como essa equação possui duas raízes, pois o seu discriminante é

$$\Delta = (-60\sqrt{5})^2 - 4 \times 15 \times (-744) = 60(300 + 744) > 0\,,$$

$r \cap \mathcal{E}$ consiste de dois pontos. Então a reta r não é tangente à elipse $\mathcal{E}$. $\square$

Exemplo 4

(a) *Reduza, por uma rotação dos eixos coordenados, a equação*

$$11x^2 + 10\sqrt{3}xy + y^2 - (22 + 10\sqrt{3})x - (2 + 10\sqrt{3})y - (4 - 10\sqrt{3}) = 0,$$

à sua forma canônica.

(b) *Determine os focos, os vértices, o centro, a reta focal e as assíntotas, se existirem, da cônica nas coordenadas x, y.*

(c) *Faça um esboço da curva.*

Solução.

(a) Os coeficientes da equação são

$$A = 11,\ B = 10\sqrt{3},\ C = 1,\ D = -(22 + 10\sqrt{3}),\ E = -(2 + 10\sqrt{3}),\ F = -(4 - 10\sqrt{3}),$$

e seu indicador é $I = B^2 - 4AC = 300 - 44 = 256 > 0$. Então a equação é do tipo hiperbólico.

Como $A \neq C$, temos que $\operatorname{tg} 2\theta_0 = \dfrac{B}{A - C} = \sqrt{3} > 0$. Logo $\cos 2\theta_0 = \sqrt{\dfrac{1}{1+3}} = \dfrac{1}{2} > 0$,

$$\cos\theta_0 = \sqrt{\frac{1 + 1/2}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta_0 = \sqrt{\frac{1 - 1/2}{2}} = \frac{1}{2}\,,$$

isto é, $\theta_0 = 30^o$.

Assim, as relações de mudança de coordenadas são:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}\overline{x} - \overline{y}) \\[2ex] y = \dfrac{1}{2}(\overline{x} + \sqrt{3}\overline{y}) \end{cases} \quad (1) \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \overline{x} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}x + y) \\[2ex] \overline{y} = \dfrac{1}{2}(-x + \sqrt{3}y) \end{cases} \quad (2),$$

e a equação, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, é dada por:

$$\overline{A}\overline{x}^2 + \overline{C}\overline{y}^2 + \overline{D}\overline{x} + \overline{E}\overline{y} + \overline{F} = 0,$$

onde $\overline{F} = F = -(4 - 10\sqrt{3})$;

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \overline{A} & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix} &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 16\sqrt{3} & 16 \\ 4 & -4\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \text{ou seja,} \qquad \overline{A} = 16 \quad \text{e} \quad \overline{C} = -4\,,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{pmatrix} \overline{D} \\ \overline{E} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -(22+10\sqrt{3}) \\ -(2+10\sqrt{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16\sqrt{3}-16 \\ -4+4\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

ou seja, $\overline{D} = -16(\sqrt{3}+1)$ e $\overline{E} = 4(\sqrt{3}-1)$.

Nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, a equação se escreve como:

$$16\overline{x}^2 - 4\overline{y}^2 - 16(\sqrt{3}+1)\overline{x} - 4(1-\sqrt{3})\overline{y} - (4-10\sqrt{3}) = 0.$$

Completando os quadrados nessa equação, obtemos:

$$16(\overline{x}^2 - (\sqrt{3}+1)\overline{x}) - 4(\overline{y}^2 + (1-\sqrt{3})\overline{y}) = 4 - 10\sqrt{3}$$

$$16\left(\overline{x}^2 - (\sqrt{3}+1)\overline{x} + \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{4}\right) - 4\left(\overline{y}^2 + (1-\sqrt{3})\overline{y} + \frac{(1-\sqrt{3})^2}{4}\right) = 4 - 10\sqrt{3} + 4(\sqrt{3}+1)^2 - (1-\sqrt{3})^2$$

$$16\left(\overline{x} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 - 4\left(\overline{y} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 16$$

$$\mathcal{H}: \left(\overline{x} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2 - \frac{\left(\overline{y} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2}{4} = 1,$$

que é a forma canônica de uma hipérbole.

(b) A equação representa uma hipérbole com $a^2 = 1$, $b^2 = 4$, $c^2 = a^2 + b^2 = 5$, que nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ tem:

- centro: $C = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$;
- reta focal: $\ell : \overline{y} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, paralela ao eixo$-O\,\overline{X}$;
- reta não-focal: $\ell' : \overline{x} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, paralela ao eixo$-O\,\overline{Y}$;
- focos: $F_1 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} - \sqrt{5}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ e $F_2 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \sqrt{5}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$;
- vértices: $A_1 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ e $A_2 = \left(\frac{\sqrt{3}+3}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$;
- vértices imaginários: $B_1 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}-5}{2}\right)$ e $B_2 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}+3}{2}\right)$;
- excentricidade: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$;
- assíntotas: $2\left(\overline{x} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) \pm \left(\overline{y} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = 0$;

Determinação dos elementos da hipérbole nas coordenadas x e y.

Temos, por (2), que:

- $\ell : x - \sqrt{3}y = 1 - \sqrt{3}$ é a reta focal;
- $\ell' : \sqrt{3}\,x + y = \sqrt{3} + 1$ é a reta não-focal;
- $\begin{cases} r_1 : (2\sqrt{3}-1)(x-1) + (\sqrt{3}+2)(y-1) = 0 \\ r_2 : (2\sqrt{3}+1)(x-1) + (2-\sqrt{3})(y-1) = 0 \end{cases}$ são as assíntotas;

e, por (1),

- $C = (1,1)$ é o centro;
- $F_1 = \left(1 - \frac{\sqrt{15}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ e $F_2 = \left(1 + \frac{\sqrt{15}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ são os focos;
- $A_1 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $A_2 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ são os vértices;
- $B_1 = (2, 1-\sqrt{3})$ e $B_2 = (0, 1+\sqrt{3})$ são os vértices imaginários da hipérbole nas coordenadas x e y.

(c) Na figura abaixo mostramos o esboço da hipérbole. □

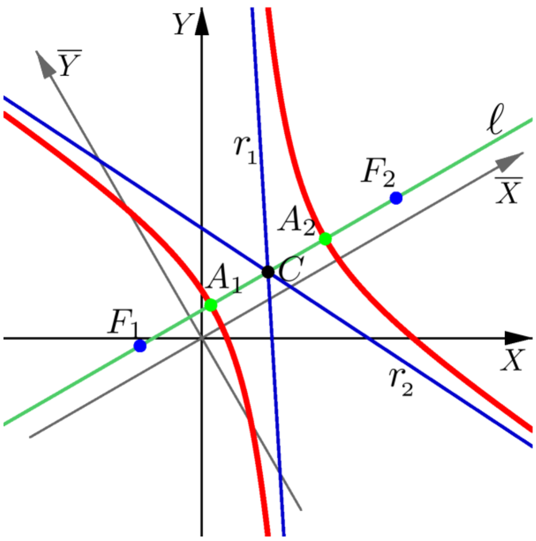

Fig. 5: Hipérbole $11x^2 + 10\sqrt{3}xy + y^2 - (22+10\sqrt{3})x - (2+10\sqrt{3})y - (4-10\sqrt{3}) = 0$.