PRODUTO ESCALAR de dois vetores

Se $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$ e $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$ são dois vetores no $I\!R^3$ então $\vec{u}\cdot\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$. Analogamente, se $\vec{u}=(x_1,y_1)$ e $\vec{v}=(x_2,y_2)$ são dois vetores no $I\!R^2$ então $\vec{u}\cdot\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2$. **Obs**: $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ou $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ (lê-se u escalar v)

Exemplo 1 *Em* $I\!R^3$*:* $(-1,2,0)\cdot(5,2,3)=(-1)\,5+2\times 2+0\times 3=-5+4+0=-1$

Em $I\!R^2$*:* $(-1,2)\cdot(5,2)=(-1)\,5+2\times 2=-5+4=-1$

PROPRIEDADES do Produto Escalar Para quaisquer vetores vetores $\vec{u},\vec{v}$ e $\vec{w}$ e número real α, são válidas:

1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
2) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
3) $\alpha\,(\vec{u}\cdot\vec{v})=(\alpha\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v})$
4) $\vec{u}\cdot\vec{u}>0$, se $\vec{u}\neq\vec{0}$ e $\vec{u}\cdot\vec{u}=0$, se $\vec{u}=\vec{0}$.
5) $\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2$
6) $|\vec{u}\cdot\vec{v}|\leq|\vec{u}|\,|\vec{v}|$ (Desigualdade de Schwarz)
7) $|\vec{u}+\vec{v}|\leq|\vec{u}|+|\vec{v}|$ (Desigualdade Triangular)

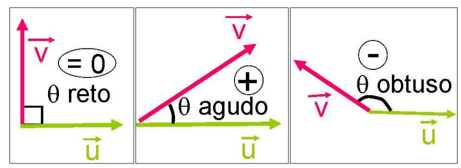
DEFINIÇÃO GEOMÉTRICA de produto escalar

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não-nulos e θ o ângulo entre eles, então $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\theta$ ou $\boxed{\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}}$. Sendo $|\vec{u}|>0$ e $|\vec{v}|>0$,

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0\iff\cos\theta=0\iff\theta=90^\circ\iff\vec{u}\perp\vec{v}$ (ângulo reto)

$\vec{u}\cdot\vec{v}>0\iff\cos\theta>0\iff 0^\circ\leq\theta<90^\circ$ (ângulo agudo)

$\vec{u}\cdot\vec{v}<0\iff\cos\theta<0\iff 90^\circ<\theta\leq 180^\circ$ (ângulo obtuso)



OBS: O vetor $\vec{0}$ é ortogonal a todo vetor, isto é, $\vec{0}\cdot\vec{v}=0$, para todo $\vec{v}$.

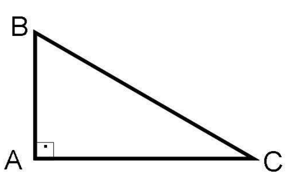
Exemplo 2 *Mostrar que os seguintes pares de vetores são ortogonais:*

a) $\vec{u}=(1,-2,3)$ e $\vec{v}=(4,5,2)$ $\vec{u}\cdot\vec{v}=1.4+(-2)\,.5+3.2=4-10+6=0$

b) $\vec{i}$ e $\vec{k}$ $\vec{i}\cdot\vec{k}=(1,0,0)\,.\,(0,0,1)=1.0+0.0+0.1=0$

c) $\vec{u}=(1,-2)$ e $\vec{v}=(2,1)$ $\vec{u}\cdot\vec{v}=1.2+(-2)\,.1=0$

Exemplo 3 *(Pág. 67 – Ex. 19) Dados os pontos* $A\,(m,1,0)$*,* $B\,(m-1,2m,2)$ *e* $C\,(1,3,-1)$*, determinar* m *de modo que o triângulo* ABC *seja retângulo em* A*. Calcular a* ***área*** *do triângulo.*

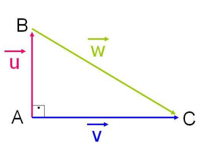


$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=B-A=(m-1,2m,2)-(m,1,0)=(-1,2m-1,2)\\ \overrightarrow{AC}=C-A=(1,3,-1)-(m,1,0)=(1-m,2,-1)\end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow(-1,2m-1,2)\cdot(1-m,2,-1)=-5+5m=0\Rightarrow\boxed{m=1}$$

$$\begin{cases}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=(-1,1,2)\cdot(-1,1,2)=6\\ \left|\overrightarrow{AC}\right|^2=(0,2,-1)\cdot(0,2,-1)=5\end{cases}\Rightarrow\text{Área}=\frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|}{2}=\frac{\sqrt{6}\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{30}}{2}$$

Exemplo 4 *(Pág. 68 – Ex. 27) Calcular os ângulos internos do triângulo de vértices* $A\,(2,1,3)$*,* $B\,(1,0-1)$ *e* $C\,(-1,2,1)$*.*



$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(1,0,-1)-(2,1,3)=(-1,-1,-4)$ $|\vec{u}|=\sqrt{(-1,-1,-4)\cdot(-1,-1,-4)}=\sqrt{18}$

$\vec{v}=\overrightarrow{AC}=C-A=(-1,2,1)-(2,1,3)=(-3,1,-2)$ $|\vec{v}|=\sqrt{(-3,1,-2)\cdot(-3,1,-2)}=\sqrt{14}$

$\vec{w}=\overrightarrow{BC}=C-B=(-1,2,1)-(1,0,-1)=(-2,2,2)$ $|\vec{w}|=\sqrt{(-2,2,2)\cdot(-2,2,2)}=\sqrt{12}$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(-1,-1,-4)\cdot(-3,1,-2)=10$

$\vec{u}\cdot\vec{w}=(-1,-1,-4)\cdot(-2,2,2)=-8$

$\vec{v}\cdot\vec{w}=(-3,1,-2)\cdot(-2,2,2)=4$

$$\cos\widehat{A}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}=\frac{10}{\sqrt{18}\sqrt{14}}=\frac{10}{\sqrt{18}\sqrt{14}}\Rightarrow\widehat{A}=\arccos\frac{10}{\sqrt{18}\sqrt{14}}\approx 51$$

$$\cos\widehat{B}=\frac{(-\vec{u})\cdot\vec{w}}{|(-\vec{u})|\,|\vec{w}|}=\frac{-(\vec{u})\cdot\vec{w}}{|\vec{u}|\,|\vec{w}|}=\frac{8}{\sqrt{18}\sqrt{12}}\Rightarrow\widehat{B}=\arccos\frac{8}{\sqrt{18}\sqrt{12}}\approx 57$$

$$\cos\widehat{C}=\frac{(-\vec{v})\cdot(-\vec{w})}{|(-\vec{v})|\,|(-\vec{w})|}=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\,|\vec{w}|}=\frac{4}{\sqrt{14}\sqrt{12}}\Rightarrow\widehat{C}=\frac{4}{\sqrt{14}\sqrt{12}}\approx 72$$

Exercício 1 *(Pág. 66 – Ex. 1) Dados os vetores* $\vec{u} = (2, -3, -1)$ *e* $\vec{v} = (1, -1, 4)$*, calcular*

a) $2\vec{u} \cdot (-\vec{v})$

b) $(\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} - 2\vec{u})$

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

d) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{u})$

Exercício 2 *(Pág. 66 – Ex. 8) Sabendo que* $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ *e* $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$*, calcular:*

a) $(\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot \vec{u}$

b) $(2\vec{v} - \vec{u}) \cdot (2\vec{v})$

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - 4\vec{u})$

Exercício 3 *(Pág. 66 – Ex. 10) Os pontos A, B, e C são vértices de um triângulo equilátero cujo lado mede 20 cm. Calcular* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ *e* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$*. Obs: Equilátero* $\Rightarrow$ *Equiângulo*

Exercício 4 *(Pág. 67 – Ex. 17) Dados os pontos* $A(-1, 0, 5)$, $B(2, -1, 4)$ *e* $C(1, 1, 1)$*, determinar* x *tal que* $\overrightarrow{AC}$ *e* $\overrightarrow{BP}$ *sejam ortogonais, sendo* $P(x, 0, x - 3)$.

Exercício 5 *(Pág. 67 – Ex. 18) Provar que os pontos* $A\,(-1, 2, 3)$, $B\,(-3, 6, 0)$ *e* $C\,(-4, 7, 2)$ *são vértices de um triângulo retângulo.*

Exercício 6 *(Pág. 67 – Ex. 25) Determinar o ângulo entre os vetores*

a) $\vec{u} = (2, -1, -1)$ *e* $\vec{v} = (-1, -1, 2)$

b) $\vec{u} = (1, -2, 1)$ *e* $\vec{v} = (-1, 1, 0)$

Exercício 7 *(Ex. 44) Determinar o valor de k para que os vetores $\vec{u} = (-2, 3)$ e $\vec{v} = (k, -4)$ sejam*

a) paralelos

b) ortogonais

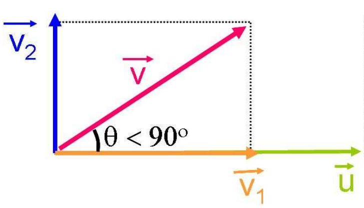
Exercício 8 *(Ex. 47) Determinar, aproximadamente, o ângulo entre os pares de vetores*

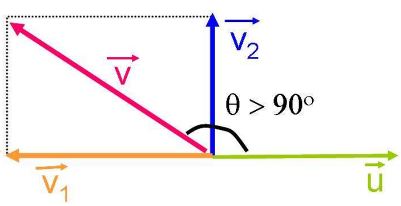
a) $\vec{u} = (2, 1)$ *e* $\vec{v} = (4, -2)$

b) $\vec{u} = (1, -1)$ *e* $\vec{v} = (-4, -2)$

c) $\vec{u} = (1, 1)$ *e* $\vec{v} = (-1, 1)$

PROJEÇÃO DE $\vec{v}$ SOBRE $\vec{u}$





$$\boxed{\overrightarrow{v_1} = proj_{\vec{u}}\vec{v} = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\right)\vec{u} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}\vec{u}}$$

Demonstração:

$\overrightarrow{v_1} // \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{v_1} = \alpha\vec{u}$

$\vec{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} \Rightarrow \overrightarrow{v_2} = \vec{v} - \overrightarrow{v_1} \Rightarrow \overrightarrow{v_2} = \vec{v} - \alpha\vec{u}$

$\overrightarrow{v_2} \perp \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{v_2} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (\vec{v} - \alpha\vec{u}) \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} - \alpha(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 0 \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} = \alpha\vec{u} \cdot \vec{u} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \Rightarrow \overrightarrow{v_1} = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\vec{u}$

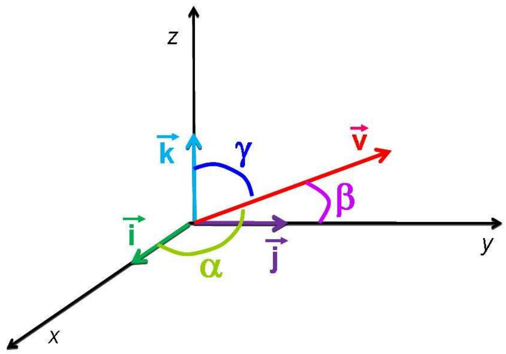
Exemplo 5 *Determinar o vetor projeção de $\vec{v} = (2, 3, 4)$ sobre $\vec{u} = (1, -1, 0)$.*

$$proj_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}\vec{u} = \frac{(2,3,4) \cdot (1,-1,0)}{1^2 + (-1)^2 + 0^2}(1,-1,0) = -\frac{1}{2}(1,-1,0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

Exercício 9 *(Ex. 40) Dados os vetores $\vec{u} = (3, 0, 1)$ e $\vec{v} = (-2, 1, 2)$, determinar $proj_{\vec{v}}\vec{u}$ e $proj_{\vec{u}}\vec{v}$.*

Exercício 10 *(Ex. 41) Determinar os vetores projeção de $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ sobre os eixos cartesianos x, y e z.*

C0SSENOS DIRETORES



Sendo $\vec{v} = (x, y, z)$, temos: $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{|\vec{v}|\left|\vec{i}\right|} = \dfrac{x}{|\vec{v}|} \\[2ex] \cos\beta = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{|\vec{v}|\left|\vec{j}\right|} = \dfrac{y}{|\vec{v}|} \\[2ex] \cos\gamma = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{|\vec{v}|\left|\vec{k}\right|} = \dfrac{z}{|\vec{v}|} \end{cases}$

Exemplo 6 *(Pág. 58) Calcular os ângulos diretores de $\vec{v} = (1, -1, 0)$.*

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x}{|\vec{v}|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ \\[2ex] \cos\beta = \dfrac{y}{|\vec{v}|} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta = \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 135^\circ \\[2ex] \cos\gamma = \dfrac{z}{|\vec{v}|} = 0 \Rightarrow \gamma = 90^\circ \end{cases}$$

Exercício 11 *(Ex. 32) Calcular os ângulos diretores do vetor $\vec{v} = (6, -2, 3)$.*

Exercício 12 *(Ex. 48) Dados os vetores $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$, determinar o módulo e o ângulo que os seguintes vetores formam com o vetor $\vec{i}$:*

a) $\vec{u}$

b) $\vec{v}$

c) $\vec{u} + \vec{v}$

d) $\vec{u} - \vec{v}$

e) $\vec{v} - \vec{u}$